

О.С. Істер



АЛГЕБРА

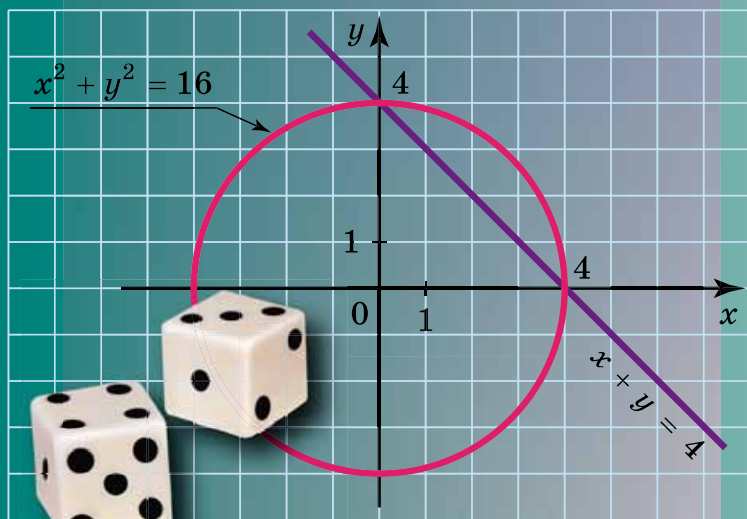
9

$$(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4)$$

$$4 - x > 3(2 + x)$$

$$2x^2 + 3x - 5 \geq 0$$

$$y = x^2 + 4x + 5$$



О. С. ІСТЕР

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Київ
«Генеза»
2017

УДК 512(075.3)

I-89

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)*

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Експерти, які здійснили експертизу підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Ковальчук В.П., учитель математики середньої загальноосвітньої школи I–III ступенів № 1 смт. Крижопіль Вінницької області, учитель-методист;

Мазій С.М., старший учитель, методист методичного кабінету відділу освіти Люботинської міської державної адміністрації Харківської області;

Скрипка Г.В., старший викладач кафедри теорії і методики середньої освіти комунального закладу «Кіровоградський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського».

Істер О. С.

I-89 Алгебра : підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. — Київ : Генеза, 2017. — 264 с.

ISBN 978-966-11-0843-0.

Навчальний матеріал підручника відповідає чинній програмі з математики, містить достатню кількість диференційованих вправ і прикладних задач.

Після кожного параграфа відповідними рубриками викремлено вправи для повторення, нестандартні задачі та задачі на застосування математики в повсякденному житті. У кінці кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – задачі підвищеної складності. Для підготовки до контрольної роботи передбачено вправи з рубрик «Домашня самостійна робота» та «Завдання для перевірки знань». Рубрика «А ще раніше...» знайомить з історією розвитку і становлення алгебри як науки.

УДК 512(075.3)

© Істер О.С., 2017

© Видавництво «Генеза»,
оригінал-макет, 2017

ISBN 978-966-11-0843-0

Шановні дев'ятикласники та дев'ятикласниці!

Цьогоріч ви продовжите вивчати одну з найважливіших математичних дисциплін – алгебру. Допоможе вам у цьому підручник, який ви тримаєте в руках.

Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на текст, надрукований **жирним** шрифтом. Його треба запам'ятати.

Зверніть увагу й на умовні позначення:



– треба запам'ятати;



– вправи для повторення;



– запитання і завдання до параграфів;



– рубрика «Розв'яжіть і підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»;

1 – завдання для класної роботи; **2** – для домашньої роботи;



– рубрика «Життєва математика»;



– рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих» та додатковий матеріал;



– вправи початкового рівня;



– вправи середнього рівня;



– вправи достатнього рівня;



– вправи високого рівня;



– вправи підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «Домашньої самостійної роботи» та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – «Завдання для перевірки знань за курс алгебри 9 класу». «Задачі підвищеної складності» допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики. Також підручник вміщує зразок варіанта атестаційної письмової роботи.

Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково треба опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках та під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

Цікаві факти з історії розвитку та становлення математики як науки ви знайдете в рубриці «А ще раніше...».

Шановні вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках і позаурочних заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня диференціації навчання тощо.

Додаткові вправи рубрики «Завдання для перевірки знань» призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Їх правильне розв'язання вчитель може оцінити окремо. Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням під час узагальнювальних уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року. У кінці підручника наведено зразок варіанта атестаційної письмової роботи. Задачі підвищеної складності та «Цікаві задачі для учнів неледачих» допоможуть задовольнити підвищену цікавість учнів до предмета і сприятимуть їх підготовці до різноманітних математичних змагань.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків з алгебри, потрібно запропонувати їй за підручником удома самостійно опрацювати матеріал цих уроків. Спочатку учень має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та який містить значну кількість зразків виконання вправ, а потім із запропонованих у відповідному тематичному параграфі завдань розв'язати посильні йому вправи.

Упродовж опрацювання дитиною курсу алгебри 9 класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині виконати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.



Розділ 1

Нерівності

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** числові нерівності, подвійні нерівності;
- **ознайомитесь** з поняттями об'єднання і перерізу множин, лінійними нерівностями з однією змінною та їх системами;
- **дізнаєтеся** про властивості числових нерівностей;
- **навчитеся** розв'язувати лінійні нерівності з однією змінною та системи лінійних нерівностей з однією змінною.

§ 1. ЧИСЛОВІ • НЕРІВНОСТІ

У попередніх класах ви навчилися порівнювати будь-які числа та записувати результат порівняння у вигляді рівності або нерівності, використовуючи знаки $=$, $>$, $<$. Наприклад, $0,4 = \frac{2}{5}$, $-2 > -11$, $5 < 7$. Вираз, який записано зліва від знака нерівності, називають *лівою частиною нерівності*, а вираз, який записано справа, – *правою частиною нерівності*. Так, в останній нерівності лівою частиною нерівності є число 5, а правою – число 7.

Нерівність, обидві частини якої – числа, називають *числовою нерівністю*. Наприклад,

$$1,2 > -0,8; \sqrt{2} < 2; 0,1 < \frac{1}{9}; \sqrt{7} + 2 > \sqrt{8}.$$

Для двох довільних чисел a і b правильним є одне і тільки одне із співвідношень: $a > b$, $a < b$ або $a = b$. Раніше ми використовували те чи інше правило порівняння чисел залежно від виду чисел (натуральні числа, десяткові дробі, звичайні дробі з однаковими або різними знаменниками). Але зручно було б мати універсальне правило порівняння.

Відомо, що $5 > 2$. Розглянемо різницю лівої і правої частин цієї нерівності: $5 - 2 = 3 > 0$, різниця є додатною. Розглядаючи різницю лівої і правої частин нерівності $3 < 7$, матимемо: $3 - 7 = -4 < 0$, різниця є від'ємною. У рівності $4 = 4$, розглянувши різницю лівої і правої частин, отримаємо: $4 - 4 = 0$, тобто різниця дорівнює нулю.

Приходимо до означення порівняння чисел.



$a > b$, якщо $a - b > 0$;

$a < b$, якщо $a - b < 0$;

$a = b$, якщо $a - b = 0$.

Приклад 1. Порівняти $\frac{5}{9}$ і $0,6$.

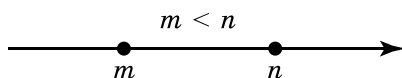
Розв'язання. Розглянемо різницю чисел $\frac{5}{9}$ і $0,6$:

$$\frac{5}{9} - 0,6 = \frac{5}{9} - \frac{3}{5} = \frac{25 - 27}{45} = -\frac{2}{45} < 0.$$

Різниця є від'ємною, тому $\frac{5}{9} < 0,6$.

Відповідь. $\frac{5}{9} < 0,6$.

Нагадаємо, що на координатній прямій меншому числу відповідає точка, що лежить зліва від точки, що відповідає більшому числу. На малюнку 1 точка, що відповідає числу m , лежить зліва від точки, що відповідає числу n , тому $m < n$.



Мал. 1

Числові нерівності бувають *правильні* і *неправильні*.

Наприклад, $\frac{5}{9} < 0,6$; $\sqrt{2} > 1$ – правильні числові нерівності,

$1,8 > 2$; $\frac{3}{8} < -0,1$ – неправильні числові нерівності.

Крім знаків $>$ і $<$, які називають *знаками строгої нерівності*, у математиці також використовують знаки \leq (читають: «менше або дорівнює», або «не більше») і \geq («більше або дорівнює», або «не менше»). Знаки \geq і \leq називають *знаками нестрокої нерівності*. Нерівності, які містять знак $>$ або $<$, називають *строгими нерівностями*, а ті, що містять знак \geq або \leq , – *нестрогими нерівностями*.

З означення співвідношень «більше», «менше» і «дорівнює» доходимо висновку, що $a \geq b$, якщо $a - b \geq 0$, і $a \leq b$, якщо $a - b \leq 0$.

Розглянемо, як за допомогою означення порівняння чисел можна *доводити нерівності*.

Приклад 2. Довести, що для будь-якого значення a справджується нерівність

$$(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4).$$

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності та спростимо її:

$$(a - 3)^2 - (a - 2)(a - 4) = a^2 - 6a + 9 - (a^2 - 2a - 4a + 8) = a^2 - 6a + 9 - a^2 + 6a - 8 = 1 > 0.$$

Оскільки $(a - 3)^2 - (a - 2)(a - 4) > 0$ для будь-якого значення a , то для будь-якого значення a справджується нерівність $(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4)$, що й треба було довести.

Умову для прикладу 2 можна було сформулювати коротше, наприклад: довести нерівність $(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4)$.

Приклад 3. Довести нерівність $2(x - 8) \leq x(x - 6)$.

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності та спростимо її:

$$2(x - 8) - x(x - 6) = 2x - 16 - x^2 + 6x = -x^2 + 8x - 16 = -(x^2 - 8x + 16) = -(x - 4)^2.$$

Оскільки $(x - 4)^2 \geq 0$ для будь-якого значення x , то $-(x - 4)^2 \leq 0$. Отже, за означенням, нерівність $2(x - 8) \leq x(x - 6)$ є правильною при будь-якому x , що й треба було довести.

Приклад 4. Довести нерівність $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 > 0$.

Доведення. У виразі, який записано в лівій частині нерівності, виділимо квадрати двочленів:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + 15 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 2.$$

Для будь-яких значень x і y : $(x + 2)^2 \geq 0$ і $(y - 3)^2 \geq 0$. Тому $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 \geq 0$, а $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 2 > 0$.

Отже, $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 > 0$, що й треба було довести.

Нагадаємо, що число $\frac{a + b}{2}$ називають *середнім арифметичним чисел* a і b . Для невід'ємних чисел a і b число \sqrt{ab} називають їх *середнім геометричним*.

Приклад 5. Довести, що середнє арифметичне двох невід'ємних чисел a і b не менше від їх середнього геометричного (*нерівність Коші*):

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ де } a \geq 0, b \geq 0.$$

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності та перетворимо її, врахувавши, що $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ для $a \geq 0, b \geq 0$. Матимемо:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \text{ для всіх } a \geq 0 \text{ і } b \geq 0. \text{ Отже, } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

для будь-яких $a \geq 0, b \geq 0$, що й треба було довести.

Зауважимо, що знак рівності в нерівності Коші можливий тоді і тільки тоді, коли $a = b$. Якщо $a \neq b$, то $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

А ще раніше...

Поняття «більше» й «менше» виникли одночасно з поняттям «дорівнювати». Адже ще з давніх часів у практичній діяльності людини виникла потреба порівнювати кількість предметів, довжини відрізків, площі ділянок тощо. Так, наприклад, кілька нерівностей є й у видатній праці «Начала» давньогрецького математика Евкліда (бл. 356–300 до н. е.). Зокрема, він наводить доведення нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для додатних чисел a і b геометричним методом.

Інший давньогрецький фізик і математик Архімед (бл. 287–212 до н. е.), щоб оцінити значення відношення довжини кола C до його діаметра d (пізніше назване числом π), використовує нерівність: $3\frac{10}{71} < \frac{C}{d} < 3\frac{1}{7}$.

Звичні нам символи для запису нерівностей з'явилися лише в XVII–XVIII ст. Знаки строгої нерівності ($>$ і $<$) уперше вжив англійський математик Томас Харріот (1560–1621) у праці «Практика аналітичного мистецтва», що вийшла друком у 1631 р. А знаки нестрогої нерівності (\geq і \leq) – у 1734 р. французький математик і астроном П'єр Бугер (1698–1758).

З відомих нерівностей, крім нерівності Коші, зазначимо такі:

1) Нерівність *Бернуллі*.

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \text{ де } x \geq -1, \alpha - \text{ціле число.}$$

2) Нерівність *Чебишова*.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n},$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ – додатні числа і $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$.

3) Нерівність *Коші–Буняковського*.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2,$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ – довільні числа.

Остання нерівність була доведена французьким математиком О.Л. Коші (1789–1857) та нашим земляком В.Я. Буняковським.

Віктор Якович Буняковський (1804–1889) народився в містечку Бар (нині – Вінницька обл.). Навчався він здебільшого за кордоном, в основному у Франції, де його найближчим наставником був сам Коші. У 1825 р. в Паризькому університеті Буняковський захистив дисертацію і отримав ступінь доктора наук. Його дослідження стосувалися галузі прикладної математики та математичної фізики. У 1826 р. він повертається з Парижа до Петербурга та починає викладати математику і механіку у відомих на той час навчальних закладах. Одночасно він перекладав праці Коші з французької.



1. Назвіть ліву і праву частини нерівності $-5 > -10$.
2. Наведіть приклади числових нерівностей.
3. Сформулюйте означення порівняння чисел.
4. Які нерівності називають строгими? Нестрогими?
5. Сформулюйте та доведіть нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним двох невід'ємних чисел (нерівність Коші).



Початковий рівень

1. Порівняйте числа:

- 1) 0,8 і 0,7; 2) $-1,2$ і $-1,25$; 3) $1\frac{2}{3}$ і $\frac{2}{3}$;
 4) $-\frac{4}{7}$ і $-\frac{3}{7}$; 5) π і 3; 6) $-2,31$ і 0.

2. Порівняйте числа:

- 1) 1,8 і 1,9; 2) $-1,3$ і $-1,27$; 3) $\frac{4}{5}$ і $2\frac{4}{5}$;
 4) $-\frac{5}{8}$ і $-\frac{7}{8}$; 5) 4 і π ; 6) 0 і $-3,71$.

3. (Усно). Які із числових нерівностей правильні:

- 1) $2,7 > -3,1$; 2) $0,5 < -3,17$; 3) $7,8 > 7,08$;
 4) $4,1 < 4\frac{1}{10}$; 5) $-7,1 > -7,19$; 6) $5,05 < 5,5?$

4. Порівняйте числа a і b , якщо:

- 1) $a - b = 5$; 2) $a - b = 0$; 3) $a - b = -7$.

5. Порівняйте числа m і n , якщо різниця $m - n$ дорівнює:

- 1) -18 ; 2) $1,7$; 3) 0.



Середній рівень

6. Яке із чисел x чи y менше, якщо:

1) $x + 4 = y$; 2) $y - 2 = x$; 3) $y + 2 = x$; 4) $x - 3 = y$?

7. Яке із чисел a чи b більше, якщо:

1) $a - 7 = b$; 2) $a + 3 = b$; 3) $b + 2 = a$; 4) $b - 5 = a$?

8. Позначте на координатній прямій точки, що відповідають числам m , n і p , якщо $m < n$ і $p > n$.

9. Запишіть у порядку зростання числа:

$$\frac{4}{5}; -\frac{3}{7}; -0,1; 0; \frac{3}{8}; -1,2; 0,7.$$

10. Запишіть у порядку спадання числа:

$$-1,2; \frac{3}{4}; 0; -0,99; 0,8; -0,6; 0,51.$$

11. Укажіть серед даних нерівностей ті, що є правильними для будь-якого значення x :

1) $x^2 > 0$; 2) $x^2 \geq 0$; 3) $x + 1 > 0$;
 4) $x^2 + 1 > 0$; 5) $(x - 3)^2 \geq 0$; 6) $(x + 4)^2 > 0$;
 7) $x > -x$; 8) $-x \leq x$.

12. Доведіть нерівність:

1) $3m + 5 > 3(m - 1)$; 2) $p(p - 2) < p^2 - 2p + 7$;
 3) $(a + 1)(a - 1) < a^2$; 4) $x(x + 2) > 2x - 1$.

13. Доведіть нерівність:

1) $2a - 3 < 2(a - 1)$; 2) $c(c + 2) > c^2 + 2c - 3$;
 3) $(x + 2)(x - 2) + 5 > x^2$; 4) $3m - 2 < m(m + 3)$.

14. Доведіть нерівність:

1) $x^2 + y^2 \geq -2xy$; 2) $p(p - 6) \geq -9$;
 3) $a(a + b) \geq ab$; 4) $m^2 + 5m + 4 \geq m$.

15. Доведіть нерівність:

1) $m^2 + n^2 \geq 2mn$; 2) $t(t + 2) \geq -1$;
 3) $c(c - d) \geq -cd$; 4) $p^2 - 11p + 36 \geq p$.



Достатній рівень

16. Порівняйте числа:

1) $\sqrt{5} - 2$ і $\frac{1}{\sqrt{5} + 2}$; 2) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ і $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.

17. Порівняйте числа:

$$1) \sqrt{3} - 1 \text{ і } \frac{1}{\sqrt{3} + 1};$$

$$2) 4 + \sqrt{15} \text{ і } \frac{1}{4 - \sqrt{15}}.$$

18. Доведіть нерівність:

$$1) a^2 + 10a + 26 > 0;$$

$$2) 8a < a^2 + 20.$$

19. Доведіть нерівність:

$$1) b^2 - 4b + 7 > 0;$$

$$2) -2b < b^2 + 2.$$

20. Нехай x – довільне число. Порівняйте з нулем значення виразу:

$$1) x^2 + 5;$$

$$2) -(x - 1)^2 - 3;$$

$$3) (x - 7)^2;$$

$$4) -(x + 9)^2;$$

$$5) 9 + (x - 1)^2;$$

$$6) (x - 1)^2 + (x - 2)^2.$$

21. Доведіть, що: 1) $x^3 - 3x^2 + x - 3 \geq 0$, якщо $x \geq 3$;

$$2) \frac{3}{a + 3} > \frac{1}{a + 1}, \text{ якщо } a - \text{ додатне число.}$$

22. Доведіть, що: 1) $m^3 + m^2 + 5m + 5 \geq 0$, якщо $m \geq -1$;

$$2) \frac{p}{p + 7} < \frac{p + 1}{p + 8}, \text{ якщо } p - \text{ додатне число.}$$



4 Високий рівень

23. Доведіть нерівність:

$$1) m^2 + 4m + p^2 + 2p + 5 \geq 0;$$

$$2) a^2 + b^2 \geq 4(a + b) - 8;$$

$$3) m^2 + n^2 + 1 \geq m + n + mn;$$

$$4) a^2 + b^2 + c^2 > 2(a + b + c) - 4.$$

24. Для кожного додатного значення a доведіть, що:

$$1) a^3 + 2a^2 + a > 0;$$

$$2) a^3 + 1 \geq a^2 + a;$$

$$3) (a + 1)^3 \leq 4(a^3 + 1);$$

$$4) a^6 - a^5 + a^4 > 0.$$

25. Для кожного від'ємного значення p доведіть, що:

$$1) p^3 + 10p^2 + 25p \leq 0;$$

$$2) 1 - p^3 > p - p^2.$$

26. Доведіть, що:

$$1) \frac{7a}{2b} + \frac{8b}{7a} \geq 4, \text{ якщо } a \text{ і } b - \text{ числа одного знака;}$$

$$2) \frac{3m}{5n} + \frac{5n}{12m} \leq -1, \text{ якщо } m \text{ і } n - \text{ числа різних знаків.}$$

27. Доведіть, що:

$$1) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \text{ якщо } a > 0, b > 0;$$

$$2) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2, \text{ якщо } a < 0, b > 0.$$

28. Порівняйте значення виразів $m^3 + n^3$ і $mn(m + n)$, якщо m і n – додатні числа, $m \neq n$.

29. До кожного із чисел 2, 3, 4, 5 додали одне й те саме число a . Порівняйте добуток першого й четвертого виразів, що утворилися, з добутком другого й третього.



Вправи для повторення



30. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2x^2 - 3x - 5 = 0;$$

$$2) 5x^2 - 2x - 3 = 0.$$

31. Побудуйте графік функції:

$$1) y = 3x - 5;$$

$$2) y = 7;$$

$$3) y = -0,2x.$$



32. Трактористи мали зорати поле площею 40 га. Кожен день вони орали на 1 га більше, ніж планували, а тому закінчили оранку на 2 дні раніше визначеного терміну. За скільки днів трактористи зорали поле?



33. Обчисліть значення суми:

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{49} + \sqrt{45}}.$$



Життєва математика

34. Для будівництва гаража можна використати один з двох типів фундаменту: бетонний або з піноблоків. Для фундаменту з піноблоків потрібно 3 кубометри піноблоків і 6 мішків цементу. Для бетонного фундаменту потрібно 3 тонни щебеню і 30 мішків цементу. Кубометр піноблоків коштує 780 грн, щебінь – 185 грн за тонну, а мішок цементу коштує 65 грн. Скільки коштуватиме матеріал, якщо вибрати найдешевший тип фундаменту?



Розв'яжіть і підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

35. Прочитайте запис:

- 1) $a \leq 7$; 2) $b > -8$; 3) $x < -2$;
 4) $m \geq 0$; 5) $-2 < x \leq 3$; 6) $0 < p < 5$;
 7) $3 \leq c \leq 5$; 8) $-5 \leq y < 7$.

36. Чи правильне твердження:

- 1) якщо $a = b$, то $b = a$;
 2) якщо $a = b$, $b = c$, то $a = c$;
 3) якщо $a = b$ і p – будь-яке число, то $a + p = b + p$;
 4) якщо $a = b$ і p – будь-яке число, то $a - p = b - p$?

37. Порівняйте числа x і y , якщо:

- 1) $x < 0$, $y > 0$;
 2) $x \geq 0$, $y < 0$;
 3) $x > 0$, $y \leq 0$;
 4) $x \leq 0$, $y > 0$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



38. Водій планував їхати з міста A в місто B зі швидкістю 60 км/год, а повертатися назад зі швидкістю 80 км/год. Та, повертаючись назад, проїхав половину шляху із запланованою швидкістю і зупинився на ночівлю. Яка середня швидкість водія за описаний проміжок часу?



2. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Розглянемо властивості числових нерівностей.



Властивість 1. Якщо $a > b$, то $b < a$;
 якщо $a < b$, то $b > a$.

Доведення. Оскільки $a > b$, то $a - b > 0$. Тоді $-(a - b) < 0$, але $-(a - b) = b - a$, тому $b - a < 0$. Отже, $b < a$. Аналогічні міркування можна провести, коли $a < b$.

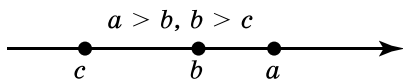


Властивість 2. Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$;
 якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

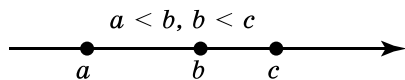
Доведення. За умовою $a > b$ і $b > c$. Тому $a - b > 0$ і $b - c > 0$, тобто $a - b$ і $b - c$ – додатні числа. Розглянемо різницю $a - c$. Маємо: $a - c = a - c - b + b = (a - b) + (b - c) > 0$ (оскільки $a - b$ і $b - c$ – додатні числа). Тому $a > c$.

Аналогічні міркування можна провести, коли $a < b$ і $b < c$.

Геометричні ілюстрації до властивості 2 подано на малюнках 2 і 3.



Мал. 2



Мал. 3



Властивість 3. Якщо $a > b$ і p – будь-яке число, то $a + p > b + p$.

Доведення. За умовою $a > b$, тому $a - b > 0$. Розглянемо різницю $(a + p) - (b + p)$ та перетворимо її:

$$(a + p) - (b + p) = a + p - b - p = a - b > 0.$$

Тому $a + p > b + p$.



Наслідок. Якщо $a > b + t$, то $a - t > b$.

Доведення. Оскільки $a > b + t$, то $a - (b + t) > 0$, тобто $a - b - t > 0$. Але $a - b - t = (a - b) - t$, тому $(a - b) - t > 0$. Отже, $a - t > b$.

Із цього наслідку випливає:



якщо деякий доданок перенести з однієї частини правильної нерівності у другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то одержимо правильну нерівність.



Властивість 4. Якщо $a > b$ і $p > 0$, то $ap > bp$;
якщо $a > b$ і $p < 0$, то $ap < bp$.

Доведення. Нехай $a > b$, тоді $a - b > 0$. Розглянемо різницю $ap - bp$ і перетворимо її: $ap - bp = p(a - b)$.

Якщо $p > 0$, то $p(a - b) > 0$, тому $ap > bp$;

якщо $p < 0$, то $p(a - b) < 0$, тому $ap < bp$.

Оскільки ділення можна замінити множенням на число,

обернене до дільника $\left(\frac{a}{q} = a \cdot \frac{1}{q}\right)$, то аналогічна властивість

справджується і у випадку ділення обох частин нерівності на відмінне від нуля число q .

Отже,



якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність;

якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число та змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.



Наслідок. Якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Доведення. Поділимо ліву і праву частини нерівності $a > b$ на додатне число ab . Матимемо: $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$; $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, тобто $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Приклад 1. Дано: $m > n$. Порівняти:

- 1) $m + 1$ і $n + 1$; 2) $n - 5$ і $m - 5$; 3) $1,7m$ і $1,7n$;
 4) $-m$ і $-n$; 5) $-10n$ і $-10m$; 6) $\frac{m}{8}$ і $\frac{n}{8}$.

Розв'язання. 1) Якщо до обох частин правильної нерівності $m > n$ додамо число 1, то за властивістю 3 матимемо: $m + 1 > n + 1$.

2) Якщо до обох частин правильної нерівності $m > n$ додамо число -5 , то за властивістю 3 матимемо правильну нерівність $m - 5 > n - 5$, тобто $n - 5 < m - 5$.

3) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ помножимо на додатне число 1,7, то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $1,7m > 1,7n$.

4) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ помножимо на від'ємне число -1 , то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $-m < -n$.

5) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ помножимо на від'ємне число -10 , то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $-10m < -10n$, тобто $-10n > -10m$.

Записати розв'язання таких вправ можна й коротше:

$$\begin{aligned} m > n &| \cdot (-10) \\ -10m &< -10n; \\ -10n &> -10m. \end{aligned}$$

6) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ поділимо на додатне число 8, то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $\frac{m}{8} > \frac{n}{8}$.

Відповідь. 1) $m + 1 > n + 1$; 2) $n - 5 < m - 5$;
 3) $1,7m > 1,7n$; 4) $-m < -n$; 5) $-10n > -10m$; 6) $\frac{m}{8} > \frac{n}{8}$.

Нагадаємо, що в математиці трапляються також *подвійні числові нерівності*: $a < b < c$, $a \leq b < c$, $a < b \leq c$, $a \leq b \leq c$. Наприклад, подвійна нерівність $a < b < c$ означає, що одночасно справджуються нерівності $a < b$ і $b < c$. Оскільки $a < b$ і $b < c$, то для будь-якого числа p за властивістю 3 справджуються нерівності $a + p < b + p$ і $b + p < c + p$, тобто $a + p < b + p < c + p$.

Отже, якщо до всіх частин правильної подвійної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну подвійну нерівність.

Міркуючи аналогічно, матимемо:

якщо $a < b < c$ і $p > 0$, то $ap < bp < cp$;

якщо $a < b < c$ і $p < 0$, то $ap > bp > cp$, тобто $cp < bp < ap$;

якщо a, b, c – додатні числа і $a < b < c$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$, тобто

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

Властивості числових нерівностей, які ми розглянули, можна використовувати для *оцінювання значення виразу*.

Приклад 2. Оцінити периметр квадрата зі стороною a см, якщо $3,2 < a < 3,9$.

Розв'язання. Оскільки периметр P квадрата обчислюють за формулою $P = 4a$, то всі частини нерівності $3,2 < a < 3,9$ помножимо на 4. Матимемо:

$$3,2 \cdot 4 < 4a < 3,9 \cdot 4, \text{ тобто } 12,8 < P < 15,6.$$

Отже, периметр квадрата більший за 12,8 см, але менший від 15,6 см.

Відповідь. $12,8 < P < 15,6$.

Приклад 3. Дано: $1 < x < 5$. Оцінити значення виразу:

1) $x + 2$; 2) $x - 3$; 3) $6x$; 4) $-x$;

5) $\frac{x}{15}$; 6) $-\frac{x}{10}$; 7) $3x - 1$; 8) $\frac{1}{x}$.

Розв'язання. Використаємо форму запису, запропоновану в завданні 5 прикладу 1.

$$\begin{array}{ll} 1) & 1 < x < 5 \quad | + 2 & 2) & 1 < x < 5 \quad | - 3 \\ & 1 + 2 < x + 2 < 5 + 2; & & 1 - 3 < x - 3 < 5 - 3; \\ & 3 < x + 2 < 7; & & -2 < x - 3 < 2; \end{array}$$

$$3) \quad 1 < x < 5 \mid \cdot 6$$

$$1 \cdot 6 < 6x < 5 \cdot 6;$$

$$6 < 6x < 30;$$

$$4) \quad 1 < x < 5 \mid \cdot (-1)$$

$$1 \cdot (-1) > x \cdot (-1) > 5 \cdot (-1);$$

$$-5 < -x < -1;$$

$$5) \quad 1 < x < 5 \mid : 15$$

$$\frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{5}{15};$$

$$\frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{1}{3};$$

$$6) \quad 1 < x < 5 \mid : (-10)$$

$$\frac{1}{-10} > \frac{x}{-10} > \frac{5}{-10};$$

$$-\frac{1}{2} < -\frac{x}{10} < -\frac{1}{10};$$

$$7) \quad 1 < x < 5 \mid \cdot 3$$

$$1 \cdot 3 < 3x < 5 \cdot 3 \mid - 1$$

$$3 - 1 < 3x - 1 < 15 - 1;$$

$$2 < 3x - 1 < 14;$$

$$8) \quad 1 < x < 5$$

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{x} > \frac{1}{5};$$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < 1.$$

Відповідь. 1) $3 < x + 2 < 7$;

2) $-2 < x - 3 < 2$;

3) $6 < 6x < 30$;

4) $-5 < -x < -1$;

5) $\frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{1}{3}$;

6) $-\frac{1}{2} < -\frac{x}{10} < -\frac{1}{10}$;

7) $2 < 3x - 1 < 14$;

8) $\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < 1$.



1. Сформулюйте й доведіть властивості числових нерівностей та наслідки з них.

2. Наведіть приклади подвійних числових нерівностей.

3. Сформулюйте властивості подвійних числових нерівностей.



Початковий рівень

39. Запишіть правильну нерівність, яку отримаємо, якщо:

1) до обох частин нерівності $-2 < 5$ додамо -5 ;

2) від обох частин нерівності $7 > 3$ віднімемо 1;

3) обидві частини нерівності $-2 < 9$ помножимо на 3;

4) обидві частини нерівності $-5 > -10$ помножимо на -2 ;

5) обидві частини нерівності $8 > 4$ поділимо на 2;

6) обидві частини нерівності $3 < 18$ поділимо на -3 .

40. Запишіть правильну нерівність, яку отримаємо, якщо:
- 1) до обох частин нерівності $7 > 5$ додамо 8;
 - 2) від обох частин нерівності $0 < 8$ віднімемо 6;
 - 3) обидві частини нерівності $12 > 4$ помножимо на 3; на -1 ;
 - 4) обидві частини нерівності $15 < 18$ поділимо на 3; на -3 .
41. (Усно). Порівняйте x і y , якщо:
- 1) $x < 5$, $5 < y$; 2) $x > 2$, $2 > y$.



Середній рівень

42. Покажіть на координатній прямій розташування точок, що відповідають числам a , b , c , d , e , якщо: $a > b$, $b > c$, $d < c$, $a < e$.
43. Відомо, що $m > n$, $p < n$, $t > m$. Порівняйте:
- 1) p і m ; 2) p і t ; 3) n і t .
44. Порівняйте число a з нулем, якщо:
- 1) $a > b$, $b \geq 1$; 2) $a < b$, $b < -2$.
45. Порівняйте число x з нулем, якщо:
- 1) $x < y$, $y \leq -3$; 2) $x > y$, $y > 5$.
46. Відомо, що $x > y$. Яким знаком ($>$ або $<$) треба замінити зірочку, щоб утворилася правильна нерівність:
- 1) $x + 2 * y + 2$; 2) $x - 3 * y - 3$; 3) $1,8x * 1,8y$;
 - 4) $-x * -y$; 5) $-2,7x * -2,7y$; 6) $\frac{x}{3} * \frac{y}{3}$?
47. Дано: $a < b$. Порівняйте:
- 1) $a - 7$ і $b - 7$; 2) $a + 3$ і $b + 3$; 3) $1,9a$ і $1,9b$;
 - 4) $-a$ і $-b$; 5) $-0,8a$ і $-0,8b$; 6) $\frac{a}{5}$ і $\frac{b}{5}$.
48. Відомо, що $1 < p < 2$. Оцініть значення виразу:
- 1) $p + 3$; 2) $p - 4$; 3) $12p$;
 - 4) $\frac{p}{2}$; 5) $-p$; 6) $-3p$.
49. Відомо, що $2 < m < 10$. Оцініть значення виразу:
- 1) $m + 1$; 2) $m - 2$; 3) $3m$;
 - 4) $\frac{m}{5}$; 5) $-m$; 6) $-7m$.

50. Порівняйте числа:

- 1) $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$, якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a < b$;
 2) $\frac{1}{m}$ і $\frac{1}{n}$, якщо $m > n$, m і n – додатні числа.

51. Порівняйте числа:

- 1) $\frac{1}{x}$ і $\frac{1}{5}$, якщо $x > 5$; 2) $\frac{1}{b}$ і $\frac{1}{2}$, якщо $0 < b < 2$.

52. Порівняйте числа:

- 1) $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{9}$, якщо $0 < a < 9$; 2) $\frac{1}{c}$ і $\frac{1}{3}$, якщо $c > 3$.

53. Оцініть значення виразу $\frac{1}{a}$, якщо $10 < a < 20$.

54. Оцініть значення виразу $\frac{1}{x}$, якщо $5 < x < 10$.

3 Достатній рівень

55. Порівняйте число a з нулем, якщо:

- 1) $a + 2 > b + 2$ і $b \geq 0,3$; 2) $a - 3 < p - 3$ і $p < -0,7$;
 3) $7a > 7x$ і $x > 8$; 4) $-9a < -9b$ і $b \geq 13$.

56. Порівняйте число x з нулем, якщо:

- 1) $x - 5 < y - 5$ і $y < -1$; 2) $x + 7 > a + 7$ і $a \geq 1$;
 3) $2x > 2p$ і $p > 0,17$; 4) $-x > -t$ і $t \leq -2,5$.

57. Чи правильне твердження:

- 1) якщо $a > 5$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{5}$; 2) якщо $a < 5$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{5}$?

58. Відомо, що $x > y$. Порівняйте, якщо це можливо:

- 1) $x + 2$ і y ; 2) $y - 3$ і x ; 3) $-x + 1$ і $-y + 1$;
 4) $-x$ і $-y + 8$; 5) $-(x + 1)$ і $-y$; 6) $x - 1$ і $y + 2$.

59. Відомо, що $a < b$. Порівняйте, якщо це можливо:

- 1) $a - 2$ і b ; 2) $b + 3$ і a ; 3) $-a + 2$ і $-b + 2$;
 4) $-b - 7$ і $-a$; 5) $-a$ і $-(b + 3)$; 6) $a + 3$ і $b - 1$.

60. Відомо, що $1,2 < x < 1,5$. Оцініть значення виразу:

- 1) $2x + 0,7$; 2) $5 - x$; 3) $\frac{x}{3} - 1$; 4) $2 - 10x$.

61. Відомо, що $0,8 < a < 1,2$. Оцініть значення виразу:

- 1) $3a - 0,2$; 2) $4 - a$;
 3) $\frac{a}{2} + 3$; 4) $10 - 5a$.

62. Оцініть значення виразу:

- 1) $\frac{20}{a}$, якщо $2 < a < 5$; 2) $\frac{1}{3a + 4}$, якщо $-1 < a < 2$.

63. Оцініть значення виразу:

- 1) $\frac{100}{x}$, якщо $5 < x < 10$; 2) $\frac{1}{2x - 3}$, якщо $2 < x < 4$.

64. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює P см. Оцініть сторону a (у см) цього трикутника, якщо $12,6 < P < 15$.

65. Маса чотирьох однакових мішків із цукром дорівнює m кг. Оцініть масу p (у кг) одного такого мішка, якщо $192 < m < 204$.



4 Високий рівень

66. Порівняйте x і y , якщо:

- 1) $x + 2 > m > y + 3$; 2) $x - 2 < p < y - 3$.

67. Порівняйте a і b , якщо:

- 1) $a + 3 < c < b + 2$; 2) $a - 7 > d > b - 5$.

68. Відомо, що $1 < a < 2$. Оцініть значення виразу $\frac{12}{7 - 3a}$.

69. Відомо, що $2 < b < 5$. Оцініть значення виразу $\frac{27}{13 - 2b}$.

70. Дано $-2 < x < 2$. Оцініть значення виразу $\frac{6}{x}$.



Вправи для повторення

2 71. Виконайте дії:

- 1) $\frac{x + 3y}{3x} - \frac{x + 2y}{2x}$; 2) $\frac{1}{m(m + n)} + \frac{1}{n(m + n)}$;
 3) $\frac{3p^2}{p - 2} - 3p$; 4) $\frac{a}{a - 5} + \frac{5}{5 - a}$.

3 72. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x+3}{x+1} - \frac{x+2}{1-x} = \frac{x+5}{x^2-1},$$

$$2) \frac{3}{x} - \frac{x}{2-x} = \frac{x+2}{x^2-2x}.$$

73. Доведіть, що значення виразу $8^{15} - 2^{40}$ кратне числу 31.

4 74. Відомо, що x_1 і x_2 – корені рівняння $2x^2 - 3x - 10 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $x_1^2 + x_2^2$.



ЖИТТЄВА МАТЕМАТИКА

75. Незалежна експертна лабораторія визначає рейтинг R побутових приладів на підставі коефіцієнта цінності, у якому враховують 0,01 від середньої ціни P , показники функціональності F , якості Q і дизайну D . Кожен з показників оцінюють цілим числом від 0 до 4. Підсумковий рейтинг обчислюють за формулою $R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P$.

У таблиці подано середню ціну та оцінку кожного з показників для кількох моделей кухонних комбайнів.

Визначте моделі з найвищим і найнижчим рейтингами серед тих, які подано в таблиці.

Модель комбайна	Середня ціна, P (грн)	Функціональність, F	Якість, Q	Дизайн, D
А	2800	3	2	4
Б	3000	3	3	3
В	3150	4	2	4
Г	3400	4	3	2

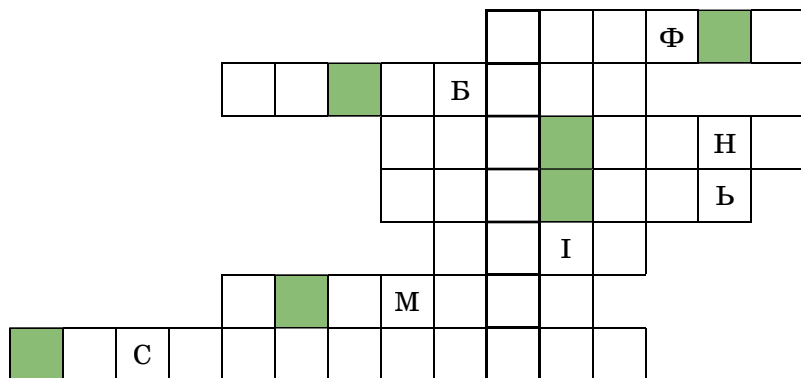
Додаткове завдання. Спробуйте розв'язати задачу, використовуючи електронні таблиці, наприклад *Excel*.



Цікаві задачі для учнів неледачих



76. 1) Пригадайте алгебраїчні поняття та впишіть їх у рядки кросворда, деякі літери до якого вже внесено (див. с. 22). Якщо назви понять запишете правильно, то у виділеному стовпчику отримаєте назву гори – найвищої точки України, а з літер у зафарбованих клітинках можна буде скласти назву річки, що протікає по території України. Знайдіть ці назви.



2) Користуючись додатковими джерелами інформації, зокрема Інтернетом, знайдіть відомості про ці географічні об'єкти.

3. ПОЧЛЕННЕ ДОДАВАННЯ І МНОЖЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Продовжимо розглядати *властивості* нерівностей.

Нехай маємо дві правильні нерівності одного й того самого знака: $2 < 5$ і $3 < 7$. Додамо їх ліві частини, їх праві частини й між результатами запишемо той самий знак: $2 + 3 < 5 + 7$. Отримаємо правильну числову нерівність, адже, дійсно, $5 < 12$. Дію, яку ми виконали, називають *почленным додаванням нерівностей*. Зауважимо, що почленно додавати можна лише нерівності одного знака.



Властивість 5 (про почленне додавання нерівностей).
Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доведення. До обох частин нерівності $a < b$ додамо число c , а до обох частин нерівності $c < d$ – число b , отримаємо дві правильні нерівності: $a + c < b + c$ і $c + b < d + b$, тому $a + c < b + d$. Доведено.

Аналогічно можна довести, що коли $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.

Зауважимо, що властивість 5 справджується і для більш ніж двох нерівностей.

Приклад 1. Сторони деякого трикутника дорівнюють a см, b см і c см. Оцінити периметр трикутника P (у см), якщо $2,1 < a < 2,3$; $2,5 < b < 2,7$; $3,1 < c < 3,5$.

Розв'язання. Наведемо скорочений запис розв'язання:

$$\begin{array}{r} 2,1 < a < 2,3 \\ + \quad 2,5 < b < 2,7 \\ + \quad 3,1 < c < 3,5 \\ \hline 7,7 < a + b + c < 8,5. \end{array}$$

Отже, $7,7 < P < 8,5$.

Відповідь. $7,7 < P < 8,5$.

Аналогічна до почленного додавання двох і більше нерівностей властивість справджується і для *множення*. Почленно помноживши правильні нерівності $2 < 7$ і $3 < 4$, одержимо правильну нерівність $2 \cdot 3 < 7 \cdot 4$, адже $6 < 28$. Якщо ж почленно помножити правильні нерівності $-2 < -1$ і $2 < 8$, то одержимо $-4 < -8$ – неправильну нерівність. Зауважимо, що в першому випадку обидві частини нерівностей були додатними (2 і 7; 3 і 4), а у другому – деякі були від'ємними (-2 і -1).



Властивість 6 (про почленне множення нерівностей).
Якщо $a < b$ і $c < d$, де a, b, c, d – додатні числа,
то $ac < bd$.

Доведення. Помножимо обидві частини нерівності $a < b$ на додатне число c , а обидві частини нерівності $c < d$ – на додатне число b , одержимо дві правильні нерівності: $ac < bc$ і $bc < bd$. Тоді $ac < bd$ (за властивістю 2). Доведено.

Аналогічно можна довести, що коли $a > b$ і $c > d$, де a, b, c, d – додатні числа, то $ac > bd$.

Зауважимо, що властивість 6 справджується і для більш ніж двох нерівностей.



Наслідок. Якщо a і b – додатні числа і $a < b$,
то $a^n < b^n$, де n – натуральне число.

Доведення. Перемноживши почленно n правильних нерівностей $a < b$, де a і b – додатні числа, отримаємо $a^n < b^n$.

За допомогою властивостей, які ми розглянули, можна оцінювати суму, різницю, добуток і частку чисел.

Приклад 2. Дано: $10 < a < 12$, $2 < b < 5$. Оцінити:

1) суму $a + b$; 2) різницю $a - b$; 3) добуток ab ; 4) частку $\frac{a}{b}$.

Розв'язання. 1)
$$\begin{array}{r} 10 < a < 12 \\ + \quad 2 < b < 5 \\ \hline 12 < a + b < 17 \end{array}$$

2) Щоб оцінити різницю $a - b$, подамо її у вигляді суми $a - b = a + (-b)$ та оцінимо спочатку вираз $-b$.

Оскільки $2 < b < 5$, то, помноживши обидві частини нерівності на число -1 і змінивши знаки нерівності на протилежні, матимемо $-2 > -b > -5$, тобто $-5 < -b < -2$. Отже,

$$\begin{array}{r} 10 < a < 12 \\ + \\ -5 < -b < -2 \\ \hline 5 < a - b < 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad 10 < a < 12 \\ \times \\ \quad 2 < b < 5 \\ \hline 20 < ab < 60 \end{array}$$

4) Щоб оцінити частку $\frac{a}{b}$, подамо її у вигляді добутку:

$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. Оцінимо вираз $\frac{1}{b}$. Якщо $2 < b < 5$, то $\frac{1}{2} > \frac{1}{b} > \frac{1}{5}$,

тобто $\frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$. Отже,

$$\begin{array}{r} 10 < a < 12 \\ \times \\ \quad \frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2} \\ \hline 2 < \frac{a}{b} < 6 \end{array}$$

Відповідь. 1) $12 < a + b < 17$; 2) $5 < a - b < 10$;

3) $20 < ab < 60$; 4) $2 < \frac{a}{b} < 6$.

За допомогою властивостей, які ми розглянули, можна також доводити нерівності.

Приклад 3. Довести, що $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$, якщо $x > 0$, $y > 0$.

Розв'язання. Застосуємо до кожного множника лівої частини нерівності нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним (нерівність Коші). Матимемо:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{і} \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}}.$$

Обидві частини кожної із цих нерівностей за властивістю 4 помножимо на 2, отримаємо:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad \text{і} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}.$$

Перемножимо ці нерівності почленно:

$$\begin{array}{r} x + y \geq 2\sqrt{xy} \\ \times \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}} \\ \hline (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4\sqrt{xy} \cdot \sqrt{\frac{1}{xy}}. \end{array}$$

Отже, $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$, що й треба було довести.



1. Що мають на увазі під почленим додаванням нерівностей?
2. Сформулюйте й доведіть властивість про почленне додавання нерівностей.
3. Що мають на увазі під почленим множенням нерівностей?
4. Сформулюйте й доведіть властивість про почленне множення нерівностей.
5. Сформулюйте наслідок з властивості про почленне множення нерівностей.



Початковий рівень

77. Додайте почленно нерівності:

$$1) 3 < 9 \text{ і } 10 < 14; \quad 2) -2 > -5 \text{ і } 3 > 0.$$

78. Додайте почленно нерівності:

$$1) 8 > 3 \text{ і } 10 > 7; \quad 2) -3 < -1 \text{ і } -5 < 1.$$

79. Перемножте почленно нерівності:

$$1) 3 > 1 \text{ і } 5 > 2; \quad 2) 7 < 10 \text{ і } 2 < 5.$$

80. Перемножте почленно нерівності:

$$1) 5 < 7 \text{ і } 1 < 10; \quad 2) 7 > 3 \text{ і } 5 > 1.$$

81. (Усно). Чи отримаємо правильну нерівність, перемноживши нерівності почленно:

$$1) -2 < -1 \text{ і } 5 < 17; \quad 2) 0 > -3 \text{ і } 1 > -5?$$



Середній рівень

82. Оцініть значення виразу $a + b$, якщо:

1) $-3 < a < 5$ і $0 < b < 7$; 2) $2 < a < 7$ і $-10 < b < -8$.

83. Оцініть значення виразу $m + n$, якщо:

1) $3 < m < 7$ і $0 < n < 2$; 2) $-3 < m < -2$ і $-5 < n < -1$.

84. Оцініть значення виразу xy , якщо:

1) $1 < x < 2$ і $5 < y < 10$; 2) $3 < x < 4,5$ і $1 < y < 10$.

85. Оцініть значення виразу cd , якщо:

1) $2 < c < 10$ і $1,5 < d < 2,5$; 2) $\frac{1}{3} < c < 1$ і $3 < d < 8$.

86. Відомо, що $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$; $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$. Оцініть:

1) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; 2) $\sqrt{10}$.

87. Оцініть значення виразу $2a + b$, де $-1 < a < 4$ і $2 < b < 3$.

88. Оцініть значення виразу $3x + y$, де $2 < x < 3$ і $1 < y < 7$.

89. Оцініть значення виразу p^2 , якщо $2 < p < 3$.

90. Оцініть значення виразу m^2 , якщо $1 < m < 5$.

91. Відомо, що $x > 3$, $y > 4$. Чи правильне твердження:

1) $x + y > 7$; 2) $x + y > 6$; 3) $x + y > 8$;
4) $xy > 12$; 5) $xy > 13$; 6) $xy > 10$?



Достатній рівень

92. Відомо, що $x < 3$, $y < 4$. Чи можна стверджувати, що $xy < 12$?

93. Відомо, що $-3 < x < 4$, $1 < y < 4$. Оцініть значення виразу:

1) $x - y$; 2) $3x - y$; 3) $2y - x$; 4) $2x - 3y$.

94. Відомо, що $-2 < a < 0$, $3 < b < 5$. Оцініть значення виразу:

1) $a - b$; 2) $2a - b$; 3) $3b - a$; 4) $4a - 5b$.

95. Дано: $5 < a < 10$, $1 < b < 2$. Оцініть значення виразу:

1) $\frac{a}{b}$; 2) $\frac{4b}{3a}$.

96. Дано: $2 < x < 4$, $1 < y < 5$. Оцініть значення виразу:

1) $\frac{x}{y}$; 2) $\frac{5y}{2x}$.

97. Оцініть периметр P прямокутника зі сторонами a см і b см, якщо $2,3 < a < 2,5$ і $3,1 < b < 3,7$.
98. Оцініть периметр P рівнобедреного трикутника з основою x см і бічною стороною y см, якщо $10 < x < 12$ і $9 < y < 11$.
99. Оцініть міру кута A трикутника ABC , якщо $50^\circ < \angle B < 52^\circ$, $60^\circ < \angle C < 65^\circ$.



Високий рівень

100. Дано: $a > 4$, $b < -3$. Доведіть, що:
- 1) $a - b > 7$;
 - 2) $2a - b > 11$;
 - 3) $5b - a < -19$;
 - 4) $6b - 11a < -60$.
101. Дано: $m > 6$, $n < -1$. Доведіть, що:
- 1) $m - n > 7$;
 - 2) $3m - n > 13$;
 - 3) $2n - m < -8$;
 - 4) $4n - 5m < -34$.
102. Доведіть нерівність:
- 1) $(x^3 + y)(x + y^3) \geq 4x^2y^2$, якщо $x \geq 0$, $y \geq 0$;
 - 2) $(m + 6)(n + 3)(p + 2) \geq 48\sqrt{mnp}$, якщо $m \geq 0$, $n \geq 0$, $p \geq 0$;
 - 3) $(a + 1)(b + 1)(c + 1) > 32$, якщо $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $abc = 16$.
103. Доведіть нерівність:
- 1) $(mn + 1)(m + n) \geq 4mn$, якщо $m \geq 0$, $n \geq 0$;
 - 2) $(a + 2c)(b + 2a)(c + 2b) \geq 16\sqrt{2abc}$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$;
 - 3) $(x + 3)(y + 3)(z + 3) > 72$, якщо $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ і $xyz = 3$.

104. Доведіть нерівність:

$$1) x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} \geq 4, \text{ якщо } x > 0, y > 0;$$

$$2) \left(1 + x + \frac{1}{x}\right) \left(1 + y + \frac{1}{y}\right) \geq 9, \text{ якщо } x > 0, y > 0.$$



Вправи для повторення

105. Виконайте дії:

$$1) \frac{4c^2 - 4c + 1}{5c + 5} \cdot \frac{c + 1}{2c - 1};$$

$$2) \frac{p - 2}{m^2 + 2m} : \frac{p - 2}{5m + 10}.$$

- 3 106.** Після того як змішали 6-відсотковий і 3-відсотковий розчини солі, отримали 300 г 4-відсоткового розчину. По скільки грамів кожного розчину змішали?

107. Обчисліть: $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$.

4 108. Побудуйте графік функції $y = \frac{12 - 6x}{x^2 - 2x}$.



Життєва математика

- 109.** 1) Петро Петрович придбав американський позашляховик, спідометр якого показує швидкість у милях за годину. Американська миля дорівнює 1609 м. Знайдіть швидкість позашляховика в кілометрах за годину в момент, коли спідометр показує 60 миль за годину. Відповідь округліть до десятих км/год.
- 2) Щоб спростити обчислення, Петро Петрович для визначення швидкості в км/год вирішив помножити показники спідометра на число 1,6. Знайдіть абсолютну похибку (у км/год) такого обчислення, якщо спідометр показує 70 миль за годину.



Розв'яжіть і підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 110.** Чи є число 2 розв'язком рівняння:

1) $2x - 1 = 5$; 2) $x^2 + x = 6$;
 3) $3x - 7 = -1$; 4) $x^2 + x + 9 = 2x + 7$;
 5) $x^3 + x^2 + x = 14$; 6) $\frac{x + 8}{x - 1} = 10$?

- 111.** Чи правильна нерівність $25 - x > 20$, якщо $x = -5; 3; 5; 11$?

- 112.** До кожної нерівності доберіть два таких значення x , щоб для кожного з них вона була правильною:

1) $x \geq 5$; 2) $x < -2$; 3) $x + 7 > 9$;
 4) $x - 3 \leq 0$; 5) $2x \geq 9$; 6) $-3x < -12$.

- 113.** Які із запропонованих виразів є додатними для всіх значень змінної, а які – невід'ємними:

1) x^2 ; 2) $(x - 3)^2 + 1$;
 3) $(x + 5)^2$; 4) $(x + 7)^2 + 11$?



Цікаві задачі для учнів неледачих



114. (Українська математична олімпіада, 1962 р.). Знайдіть значення виразу $a^3 + b^3 + 3(a^3b + ab^3) + 6(a^3b^2 + a^2b^3)$, де a і b – корені рівняння $x^2 - x + q = 0$.

§ 4. НЕРІВНОСТІ ЗІ ЗМІННИМИ. РОЗВ'ЯЗОК НЕРІВНОСТІ

Розглянемо нерівність $2x + 1 > 11$. Це нерівність зі змінною. При одних значеннях змінної x вона перетворюється на правильну числову нерівність, а при інших – на неправильну. Справді, якщо замість x підставити, наприклад, число 8, то матимемо нерівність $2 \cdot 8 + 1 > 11$, що є правильною, якщо ж підставити число 4, то матимемо нерівність $2 \cdot 4 + 1 > 11$, що є неправильною. У такому випадку кажуть, що число 8 є *розв'язком нерівності* $2x + 1 > 11$ (або число 8 *задовольняє нерівність* $2x + 1 > 11$), а число 4 – не є розв'язком цієї нерівності (або число 4 *не задовольняє нерівність* $2x + 1 > 11$).

Також розв'язками нерівності $2x + 1 > 11$ є, наприклад, числа 34; 5,5; $\sqrt{90}$; $7\frac{1}{8}$ тощо.



Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її у правильну числову нерівність.

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Приклад 1. Розв'язати нерівності: 1) $\sqrt{x} > 0$; 2) $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 0$.

Розв'язання. 1) \sqrt{x} набуває невід'ємних значень для всіх $x \geq 0$, причому $\sqrt{x} = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = 0$. Отже, розв'язком нерівності є будь-яке додатне число.

2) Оскільки $x^2 \geq 0$ для будь-якого значення x , то $x^2 + 1 > 0$ для будь-якого x . Тому значення виразу $\frac{1}{x^2 + 1}$ також є додатним для будь-якого x . Отже, нерівність $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 0$ є неправильною для кожного значення x , тобто не має розв'язків.

Відповідь. 1) Розв'язком є будь-яке число, більше за 0; 2) нерівність не має розв'язків.



1. Наведіть приклад нерівності з однією змінною.
2. Що називають розв'язком нерівності з однією змінною?
3. Що означає розв'язати нерівність?



Початковий рівень

115. (Усно). Чи є розв'язком нерівності $x > 3$ число:

- 1) -2 ; 2) 5 ; 3) $2,7$; 4) 0 ; 5) $3,01$; 6) 17 ?

116. Чи є розв'язком нерівності $x < 7$ число:

- 1) 8 ; 2) -2 ; 3) 0 ; 4) $4,7$; 5) $8,1$; 6) 13 ?

117. Запишіть три будь-яких розв'язки нерівності $x \leq -2$.

118. Запишіть три будь-яких розв'язки нерівності $x \geq 4$.



Середній рівень

119. Які із чисел є розв'язками нерівності $x^2 + 3x \leq 3 + x$:

- 1) 2 ; 2) 0 ; 3) -4 ; 4) 1 ; 5) 3 ; 6) -3 ?

120. Які із чисел є розв'язками нерівності $x^2 + 4x \geq 6 + 3x$:

- 1) 4 ; 2) 0 ; 3) -3 ; 4) 1 ; 5) 2 ; 6) -1 ?

121. Запишіть два будь-яких розв'язки нерівності $\sqrt{x-1} > 3$.

122. Запишіть два будь-яких розв'язки нерівності $\sqrt{x+2} < 7$.

123. Знайдіть усі натуральні розв'язки нерівності $15\frac{1}{3} < x \leq 19$.



Достатній рівень

124. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності $\frac{20}{x} < -8$.

125. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності $-\frac{30}{x} < -7$.

126. Розв'яжіть нерівність:

- | | | |
|--------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1) $x^2 > 0$; | 2) $-x^2 < 0$; | 3) $x^2 \geq 0$; |
| 4) $x^2 \leq 0$; | 5) $(x-1)^2 > 0$; | 6) $(x-1)^2 \geq 0$; |
| 7) $(x-1)^2 < 0$; | 8) $(x-1)^2 \leq 0$; | 9) $x^2 + 9 < 0$. |

127. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $(x + 2)^2 \geq 0$; 2) $(x + 2)^2 > 0$; 3) $(x + 2)^2 < 0$;
 4) $(x + 2)^2 \leq 0$; 5) $\frac{1}{x^2} + 13 < 0$; 6) $x^2 + 5 \geq 0$.



Високий рівень

128. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{x + 2}{x + 2} > 0,5$; 2) $\frac{x - 3}{x - 3} \leq 0,7$; 3) $\left(\frac{x + 1}{x}\right)^2 \geq 0$;
 4) $\left(\frac{x + 1}{x}\right)^2 > 0$; 5) $\frac{(x + 3)^2}{x} > 0$; 6) $\frac{(x - 1)^2}{x} \leq 0$.

129. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{x - 3}{x - 3} > -2$; 2) $\frac{x + 7}{x + 7} < -1$; 3) $\left(\frac{x - 1}{x}\right)^2 \geq 0$;
 4) $\left(\frac{x - 1}{x}\right)^2 > 0$; 5) $\frac{(x - 3)^2}{x} > 0$; 6) $\frac{(x + 1)^2}{x} \leq 0$.



Вправи для повторення



130. Спростіть вираз:

- 1) $(3 + \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 - 9$.



131. Доведіть тотожність:

$$\frac{x^2 + x}{(x - 1)^2} : \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right) = \frac{x}{x - 1}.$$



132. Побудуйте графік рівняння $|x - y| = 3$.



Життєва математика

133. Діагональ екрана телевізора дорівнює 48 дюймів. Запишіть довжину діагоналі екрана в сантиметрах, якщо в одному дюймі 2,54 см. Результат округліть до цілого числа сантиметрів.



Розв'яжіть і підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

134. Де на координатній прямій містяться числа, якщо вони:
- 1) більші за число 5;
 - 2) менші від числа 3;
 - 3) більші за число 5, але менші від числа 9?
135. Укажіть кілька значень змінної, які задовольняють нерівність:
- 1) $x < -2$;
 - 2) $x > 3$;
 - 3) $-2 \leq x \leq 3$;
 - 4) $-2 < x < 3$.
136. Між якими цілими числами міститься число:
- 1) $\sqrt{2}$;
 - 2) $\sqrt{5}$;
 - 3) $\sqrt{13}$;
 - 4) $-\sqrt{3}$?
137. Укажіть елементи множини:
- 1) $A = \{4; 7; 10\}$;
 - 2) $B = \{\Delta; \square; !\}$.
138. 1) Наведіть приклади скінченних множин та нескінченних множин.
2) Як називають множину дійсних розв'язків рівняння $|x| = -4$?
139. Назвіть спільні елементи множин $A = \{1; 3; 5; 7\}$ і $B = \{2; 3; 4; 5\}$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



140. Першу половину шляху пішохід рухався зі швидкістю, на 25 % більшою від запланованої. На скільки відсотків меншою від запланованої може бути тепер його швидкість на другій половині шляху, щоб прибути до пункту призначення вчасно?



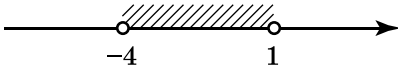
5. ЧИСЛОВІ ПРОМІЖКИ. ПЕРЕРІЗ ТА ОБ'ЄДНАННЯ МНОЖИН

Множину розв'язків нерівності зручно записувати за допомогою *числових проміжків*.

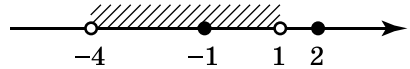
Приклад 1. Розглянемо подвійну нерівність з однією змінною $-4 < x < 1$. Цю нерівність задовольняють усі числа, які більші за -4 і менші від 1 , тобто ті числа, що на координатній прямій містяться між числами -4 і 1 . Множину всіх чисел, що задовольняють нерівність $-4 < x < 1$, називають *числовим проміжком*, або просто *проміжком*, від -4 до 1 і позначають: $(-4; 1)$ (читають: «проміжок від -4 до 1 »). Щоб показати на координатній прямій множину всіх чисел, що нале-

жать проміжку $(-4; 1)$, його виділяють штриховкою, як показано на малюнку 4. При цьому точки -4 і 1 зображують «порожніми» або «виколотими».

Число -1 задовольняє нерівність $-4 < x < 1$, а число 2 її не задовольняє. У такому разі кажуть, що число -1 належить проміжку $(-4; 1)$, а число 2 йому не належить (мал. 5). Отже, кожне число, що задовольняє нерівність $-4 < x < 1$, належить проміжку $(-4; 1)$, і, навпаки, кожне число, що належить проміжку $(-4; 1)$, задовольняє нерівність $-4 < x < 1$.

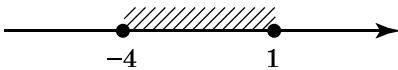


Мал. 4

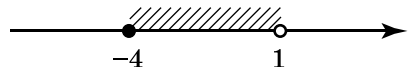


Мал. 5

Приклад 2. Подвійну нерівність $-4 \leq x \leq 1$ задовольняють не тільки всі числа, які більші за -4 і менші від 1 , а й самі числа -4 і 1 . Множину цих чисел позначають $[-4; 1]$ (читають: «проміжок від -4 до 1 , включаючи -4 і 1 »). У такому випадку на координатній прямій виділяють проміжок між числами -4 і 1 разом із цими числами (мал. 6).



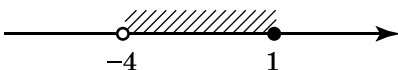
Мал. 6



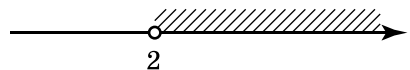
Мал. 7

Приклад 3. Множину чисел, що задовольняє подвійну нерівність $-4 \leq x < 1$, позначають: $[-4; 1)$ (читають: «проміжок від -4 до 1 , включаючи -4 »). Цей проміжок зображено на малюнку 7.

Приклад 4. Множину чисел, що задовольняє подвійну нерівність $-4 < x \leq 1$, позначають: $(-4; 1]$ (читають: «проміжок від -4 до 1 , включаючи 1 »). Цей проміжок зображено на малюнку 8.



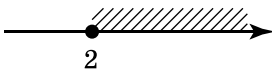
Мал. 8



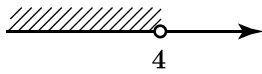
Мал. 9

Приклад 5. Нерівність $x > 2$ задовольняють усі числа, які більші за 2 , тобто ті числа, що на координатній прямій лежать праворуч від числа 2 . Множину цих чисел позначають $(2; +\infty)$ (читають: «проміжок від 2 до плюс нескінченності») і зображують променем, що виходить із «порожньої» точки з координатою 2 (мал. 9).

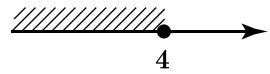
Приклад 6. Нерівність $x \geq 2$ задовольняють усі числа, які більші за 2, і саме число 2. Множину цих чисел позначають $[2; +\infty)$ (читають: «проміжок від 2 до плюс нескінченності, включаючи 2») і зображують променем, що лежить праворуч від точки з координатою 2, включаючи цю точку (мал. 10).



Мал. 10



Мал. 11



Мал. 12

Приклад 7. Множину чисел, що задовольняють умову $x < 4$, записують так: $(-\infty; 4)$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до 4»). Множину зображено на малюнку 11.

Приклад 8. Множину чисел, що задовольняють умову $x \leq 4$, записують так: $(-\infty; 4]$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до 4, включаючи 4»), її зображено на малюнку 12.

Таким чином, якщо кінець проміжка включається у проміжок (наприклад, коли нерівність нестрога), то біля цього кінця записують квадратну дужку, в усіх інших випадках записують круглу дужку.

Множину всіх чисел зображують усією координатною прямою та позначають $(-\infty; +\infty)$. Множину, яка не містить жодного числа, позначають \emptyset і називають *порожньою множиною*.

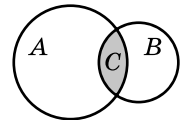
Над множинами можна виконувати певні дії (*операції*). Розглянемо дві з них: *переріз* і *об'єднання*.



Перерізом множин A і B називають множину, яка складається з елементів, що належать кожній з множин A і B .

Переріз множин записують за допомогою символа \cap . Зображувати переріз множин зручно у вигляді діаграм Ейлера–Венна (мал. 13).

Приклад 9. Нехай дано множини $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$ і $C = \{6; 7\}$. Тоді $A \cap B = \{2; 3\}$; $A \cap C = \emptyset$.



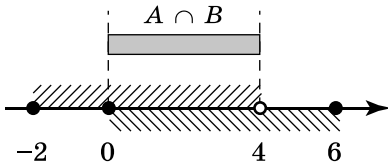
$$A \cap B = C$$

Мал. 13

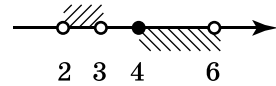


Перерізом числових проміжків називають множину, що містить усі числа, які належать кожному із цих проміжків.

Приклад 10. $[-2; 4) \cap [0; 6] = [0; 4)$ (мал. 14).



Мал. 14



Мал. 15

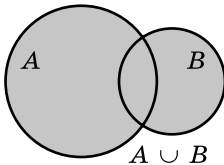
Приклад 11. Проміжки $(2; 3)$ і $[4; 6)$ не мають спільних точок (мал. 15), тому їх перерізом є порожня множина. Записати це можна так: $(2; 3) \cap [4; 6) = \emptyset$.



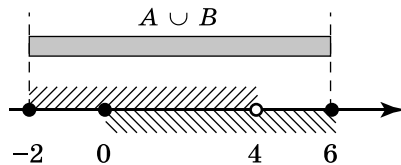
Об'єднанням множин A і B називають множину, що складається з усіх елементів, які належать хоча б одній з множин A або B .

Об'єднання множин записують за допомогою символу \cup . Зображувати об'єднання множин також зручно у вигляді діаграм Ейлера–Венна (мал. 16).

Приклад 12. Нехай дано множини $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$ і $C = \{6; 7\}$. Тоді $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$; $A \cup C = \{1; 2; 3; 6; 7\}$.



Мал. 16



Мал. 17



Об'єднанням числових проміжків називають множину, що складається з усіх чисел, які належать хоча б одному із цих проміжків.

Приклад 13. $[-2; 4) \cup [0; 6] = [-2; 6]$ (мал. 17).

Зауважимо, що об'єднання проміжків не завжди є проміжком. Наприклад, множина $(2; 3) \cup [4; 6)$ не є проміжком (мал. 15).



1. Наведіть приклади числових проміжків різних видів, запишіть їх та зобразіть на координатній прямій.
2. Що називають перерізом множин; числових проміжків?
3. Що називають об'єднанням множин; числових проміжків?



Початковий рівень

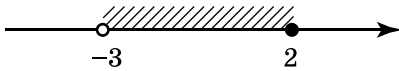
141. Зобразіть на координатній прямій проміжок:

- 1) $(-2; 1)$; 2) $(-4; 2]$; 3) $[1; 5)$; 4) $[3; 7]$;
 5) $(-\infty; 3)$; 6) $[4; +\infty)$; 7) $(-\infty; 0]$; 8) $(5; +\infty)$.

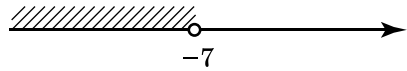
142. Зобразіть на координатній прямій проміжок:

- 1) $[4; 6)$; 2) $(-1; 7)$; 3) $[3; 4]$; 4) $(0; 2]$;
 5) $(-3; +\infty)$; 6) $(-\infty; 4]$; 7) $[0; +\infty)$; 8) $(-\infty; -1)$.

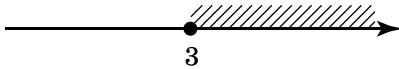
143. Запишіть проміжки, які зображено на малюнках 18–21.



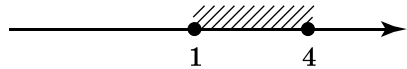
Мал. 18



Мал. 19

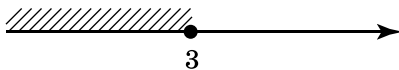


Мал. 20

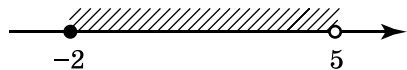


Мал. 21

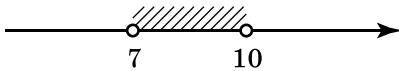
144. Запишіть проміжки, які зображено на малюнках 22–25.



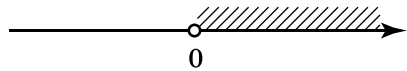
Мал. 22



Мал. 23



Мал. 24



Мал. 25



Середній рівень

145. Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задано нерівністю:

- 1) $x > 3$; 2) $x \leq -8$; 3) $x \geq -1$;
 4) $x < 2$; 5) $1,8 \leq x < 2$; 6) $2,5 \leq x \leq 3\frac{1}{8}$;
 7) $3,9 < x < 4$; 8) $7 < x \leq 7,01$.

146. Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задано нерівністю:

- 1) $x \geq 5$; 2) $x < 4,5$; 3) $1,8 \leq x < 5$; 4) $1,9 < x < 4$.

147. (Усно). Чи належить проміжку $[-1,01; 1,02]$ число:

- 1) $-1,1$; 2) $0,9$; 3) $1,03$;
 4) $-1,11$; 5) $1,015$; 6) $-1,009$?

148. Запишіть усі цілі числа, що належать проміжку:

- 1) $(-2; 1)$; 2) $[-1,8; 2]$;
 3) $(3; 4)$; 4) $(-2,6; 1,6)$.

149. Які натуральні числа належать проміжку:

- 1) $(-0,1; 4,9)$; 2) $[1; \sqrt{5})$;
 3) $(-3; 0,7]$; 4) $[2; 3,99)$?

150. Запишіть два додатних і два від'ємних числа, що належать проміжку:

- 1) $(-2; 7)$; 2) $[-1; 1]$.

151. Знайдіть найменше ціле число, що належить проміжку:

- 1) $(0; 8)$; 2) $(-5; 2)$;
 3) $[4; 7)$; 4) $(0,5; +\infty)$.

152. Знайдіть найбільше ціле число, що належить проміжку:

- 1) $(-2; 9)$; 2) $(-\infty; 4,5)$;
 3) $[0; 17,2]$; 4) $(-1; 0,99)$.

153. Знайдіть переріз і об'єднання множин C і D , якщо:

- 1) $C = \{1; 2; 7\}$, $D = \{1; 2; 3\}$; 2) $C = \{*\}$, $D = \{*; !\}$;
 3) $C = \emptyset$, $D = \{7; 8\}$; 4) $C = \{a; б\}$, $D = \{в; з\}$.

154. Знайдіть переріз і об'єднання множин A і B , якщо:

- 1) $A = \{7; 8; 9\}$, $B = \{6; 7; 8\}$; 2) $A = \{\Delta; \square\}$, $B = \{\square\}$;
 3) $A = \{a; в; д\}$, $B = \emptyset$; 4) $A = \{4; 7\}$, $B = \{1; 3\}$.



Достатній рівень

155. Чи належить проміжку $(1,6; 4,5]$ число:

- 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{21}$?

156. Чи належить проміжку $[2,5; 6,1)$ число:

- 1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{15}$; 4) $\sqrt{39}$?

157. Зобразіть проміжки на координатній прямій та запишіть їх переріз:

- 1) $[-2; 3]$ і $[0; 4]$; 2) $[-5; 4]$ і $(-2; 1)$;
 3) $(-\infty; 2)$ і $(-\infty; 3]$; 4) $(-\infty; 4)$ і $[0; +\infty)$;
 5) $[2; 3]$ і $(2; 8)$; 6) $(-2; 1)$ і $(2; 5)$.

158. Зобразіть проміжки на координатній прямій та запишіть їх переріз:

- 1) $(-1; 8)$ і $(0; 9)$; 2) $(-2; 4]$ і $[1; 2)$;
3) $(-\infty; 1)$ і $(-2; 3)$; 4) $[1; 5)$ і $[6; +\infty)$.

159. Зобразіть проміжки на координатній прямій та запишіть їх об'єднання:

- 1) $(-3; 1)$ і $(0; 4]$; 2) $[0; 1)$ і $[-2; 1]$;
3) $[3; 8)$ і $[4; 5]$; 4) $(-\infty; 3)$ і $[2,8; 4)$;
5) $[1; 3)$ і $[3; 5]$; 6) $(0; 1]$ і $(2; +\infty)$.

160. Зобразіть проміжки на координатній прямій та запишіть їх об'єднання:

- 1) $[-2; 3)$ і $(2; 5]$; 2) $(2; 4)$ і $[2; 10)$;
3) $(-\infty; 0)$ і $[0; 1]$; 4) $(-\infty; 4)$ і $(3; +\infty)$.

161. Знайдіть переріз і об'єднання множин A і B , де:

- 1) A – множина дільників числа 18,
 B – множина дільників числа 12;
2) A – множина коренів рівняння $x^2 + 2x - 3 = 0$,
 B – множина коренів рівняння $|x| = 1$;
3) A – множина простих чисел, менших за 15,
 B – множина натуральних парних чисел, менших за 10;
4) A – множина коренів рівняння $x^2 = 9$,
 B – множина коренів рівняння $\sqrt{x} = -3$.

162. Знайдіть переріз і об'єднання множин C і D , якщо:

- 1) C – множина двоцифрових натуральних чисел, кратних числу 15,
 D – множина двоцифрових натуральних чисел, кратних числу 30;
2) C – множина коренів рівняння $x^2 = 16$,
 D – множина коренів рівняння $x^2 + x - 20 = 0$;
3) C – множина непарних натуральних чисел, менших за 20,
 D – множина простих чисел, менших за 12;
4) C – множина коренів рівняння $|x| = -2$,
 D – множина коренів рівняння $3x + 6 = 0$.



4 Високий рівень

163. Знайдіть переріз і об'єднання множин:

- 1) натуральних чисел і цілих чисел;
2) цілих чисел і раціональних чисел.

164. Нехай A – множина парних натуральних чисел, B – множина непарних натуральних чисел, C – множина натуральних чисел, кратних числу 3. Запишіть за допомогою знаків операцій над цими множинами множину:

- 1) натуральних чисел;
- 2) чисел, кратних числу 6;
- 3) непарних чисел, кратних числу 3.

165. Нехай A – множина парних натуральних чисел, B – множина непарних натуральних чисел, C – множина натуральних чисел, кратних числу 5. Запишіть за допомогою знаків операцій над цими множинами множину:

- 1) натуральних чисел, кратних числу 2 або 5;
- 2) чисел, кратних числу 10;
- 3) непарних натуральних чисел, кратних числу 5.



Вправи для повторення

2 **166.** Скоротіть дріб:

$$1) \frac{m^2 - 5}{m + \sqrt{5}}; \quad 2) \frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{m - 2\sqrt{mn} + n}.$$

3 **167.** Доведіть нерівність $(x + 5)(x - 9) < (x - 2)^2$.

168. На перегоні завдовжки 120 км потяг рухався зі швидкістю на 10 км/год меншою, ніж зазвичай за розкладом, тому запізнився на 24 хв. З якою швидкістю мав рухатися потяг за розкладом?

4 **169.** Знайдіть значення виразу $x + \frac{1}{x}$, якщо $x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$.



Розв'яжіть і підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

170. Знайдіть корені лінійного рівняння:

- 1) $2x = 6$;
- 2) $6x = -12$;
- 3) $-4x = 160$;
- 4) $-5x = -20$;
- 5) $0x = 7$;
- 6) $0x = 0$.

171. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2x - 3 = 3x + 7$;
- 2) $2(x - 3) = 7(x + 2) - 1$;
- 3) $2(x - 3) - (x + 2) = 1 - 3x$;
- 4) $\frac{x + 1}{2} - \frac{x - 2}{3} = 2$.

172. Чи є рівносильними рівняння:

1) $-3x = 12$ і $x + 7 = 3$; 2) $2x = 18$ і $x + 1 = -8$?

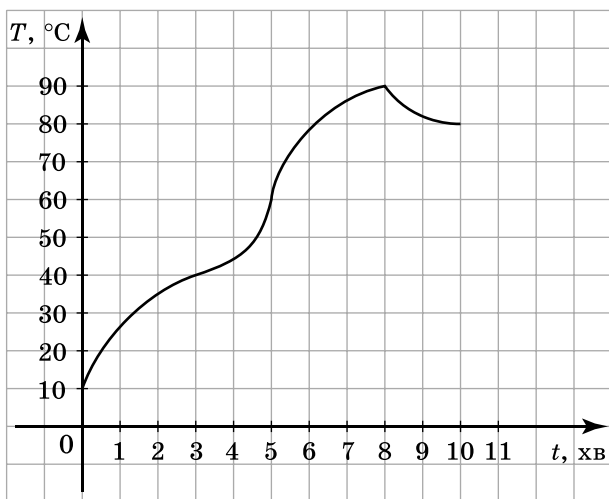


Життєва математика

173. На малюнку зображено графік процесу розігрівання двигуна легкового автомобіля. На осі абсцис відкладено час у хвилинах, що минув від запуску двигуна, на осі ординат – температуру двигуна у градусах Цельсія.

За графіком визначте:

- 1) на якій хвилині температура двигуна досягла значення $60\text{ }^{\circ}\text{C}$;
- 2) скільки хвилин двигун нагрівався від температури $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ до температури $90\text{ }^{\circ}\text{C}$;
- 3) скільки хвилин двигун охолоджувався від температури $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ до температури $80\text{ }^{\circ}\text{C}$;
- 4) на скільки градусів нагрівся двигун за перші три хвилини.



Цікаві задачі для учнів неледачих



174. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{x^2 + x + 2}{3x^2 + 5x - 14} = \frac{x^2 + x + 6}{3x^2 + 5x - 10}$$



6. ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ. РІВНОСИЛЬНІ НЕРІВНОСТІ



Нерівності вигляду $ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$, де x – змінна, а і b – деякі числа, називають *лінійними нерівностями з однією змінною*.

Якщо $a \neq 0$, то обидві частини нерівності можна поділити на a , врахувавши при цьому властивість числових нерівностей, тобто якщо $a > 0$, то знак нерівності залишаємо без змін; якщо ж $a < 0$, то знак нерівності змінюємо на протилежний.

Приклад 1. Розв'язати нерівність: 1) $2x \geq 18$; 2) $-3x > -15$.

Розв'язання. 1) Поділивши обидві частини нерівності на 2, отримуємо: $x \geq 9$. Отже, розв'язком нерівності є проміжок $[9; +\infty)$.

2) Поділивши обидві частини нерівності на -3 та змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, отримуємо: $x < 5$, тобто $x \in (-\infty; 5)$.

Відповідь. 1) $[9; +\infty)$; 2) $(-\infty; 5)$.

Зауважимо, що відповідь можна було записати й так:

1) $x \geq 9$; 2) $x < 5$.



Нерівності, що мають одні й ті самі розв'язки, називають *рівносильними*. Нерівності, що не мають розв'язків, також є *рівносильними*.

Для нерівностей зі змінними справджуються *властивості*, подібні до тих, що справджуються і для рівнянь:



1) якщо в будь-якій частині нерівності розкрити дужки або звести подібні доданки, то отримуємо нерівність, рівносильну даній;

2) якщо в нерівності перенести доданок з однієї її частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то отримуємо нерівність, рівносильну даній;

3) якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримуємо нерівність, рівносильну даній; якщо ж обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримуємо нерівність, рівносильну даній.

Щоб розв'язати рівняння, ми зводимо його до рівносильного йому простішого рівняння. Аналогічно, користуючись властивостями нерівностей, можна розв'язувати й нерівності, замінюючи їх простішими нерівностями, їм рівносильними.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{x+2}{2} - \frac{x+6}{3} \geq \frac{x}{6}$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини нерівності на найменший спільний знаменник дробів – число 6, далі спростимо її ліву частину та перенесемо доданки зі змінною в ліву частину нерівності, а без змінної – у праву.

$$\frac{6(x+2)}{2} - \frac{6(x+6)}{3} \geq \frac{6 \cdot x}{6};$$

$$3(x+2) - 2(x+6) \geq x;$$

$$3x + 6 - 2x - 12 \geq x;$$

$$3x - 2x - x \geq 12 - 6;$$

$$0x \geq 6.$$

Отримали нерівність, рівносильну початковій. Вона не має розв'язків, оскільки при будь-якому значенні x ліва частина нерівності дорівнюватиме нулю, а нерівність $0 \geq 6$ є неправильною.

Відповідь. Розв'язків немає.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $(x+3)^2 - x^2 < 6x + 10$.

Розв'язання. Розкривши дужки, маємо:

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 < 6x + 10;$$

$$6x - 6x < 10 - 9;$$

$$0x < 1.$$

Остання нерівність рівносильна початковій і є правильною для будь-якого значення x , оскільки при будь-якому значенні x її ліва частина дорівнюватиме нулю, а нерівність $0 < 1$ є правильною. Отже, розв'язком нерівності є будь-яке число, тобто множиною розв'язків є проміжок $(-\infty; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; +\infty)$.

З прикладів 2 і 3 можна дійти висновку, що



нерівності вигляду $0x > b$, $0x \geq b$, $0x < b$, $0x \leq b$ або не мають розв'язків, або їх розв'язком є будь-яке число.

Приклад 4. Для будь-якого значення m розв'язати нерівність $mx - m^2 < x - 1$, де x – змінна.

Розв'язання. Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину нерівності, інші – у праву частину, щоб звести нерівність до вигляду лінійної:

$$mx - x < m^2 - 1;$$

$$(m - 1)x < m^2 - 1.$$

Значення виразу $m - 1$ для різних значень m може бути додатним, від'ємним або нулем, тому розглянемо кожен з цих випадків окремо:

$$1) m - 1 > 0; \quad 2) m - 1 = 0; \quad 3) m - 1 < 0.$$

1) Якщо $m - 1 > 0$, тобто $m > 1$, то, поділивши ліву і праву частини нерівності на додатне число $m - 1$, матимемо:

$$x < \frac{m^2 - 1}{m - 1};$$

$$x < \frac{(m - 1)(m + 1)}{m - 1};$$

$$x < m + 1.$$

2) Якщо $m - 1 = 0$, тобто $m = 1$, отримаємо нерівність $0 \cdot x < 0$, яка розв'язків не має.

3) Якщо $m - 1 < 0$, тобто $m < 1$, то, поділивши ліву і праву частини нерівності на від'ємне число $m - 1$ і змінивши знак нерівності на протилежний, отримаємо:

$$x > \frac{m^2 - 1}{m - 1};$$

$$x > m + 1.$$

Відповідь. Якщо $m < 1$, то $x > m + 1$; якщо $m = 1$, то розв'язків немає; якщо $m > 1$, то $x < m + 1$.



1. Які нерівності називають лінійними нерівностями з однією змінною?
2. Наведіть приклади таких нерівностей.
3. Які нерівності називають рівносильними?
4. Сформулюйте властивості нерівностей, які використовують для розв'язування нерівностей.
5. Що можна сказати про розв'язки нерівностей вигляду $0x > b$; $0x \geq b$; $0x < b$; $0x \leq b$?



Початковий рівень

175. (Усно). Які з нерівностей є лінійними:

$$1) \frac{1}{3}x > -5; \quad 2) 2x^2 - 3 \geq 0; \quad 3) -3x \leq 6; \quad 4) \frac{1}{x} < 3?$$

176. (Усно). Чи рівносильні нерівності:

$$1) 2x - 7 > 4 \text{ і } 2x > 4 + 7; \quad 2) 3x > 9 \text{ і } x < 3?$$

177. Чи рівносильні нерівності:

1) $3x + 2 > 5$ і $3x > 5 + 2$;

2) $5x \leq 10$ і $x \leq 2$?



Середній рівень

178. Розв'яжіть нерівність і зобразіть множину її розв'язків на координатній прямій:

1) $x + 7 \geq 3$; 2) $x - 5 < 2$;

3) $x + 9 \leq -17$; 4) $x - 7 > -8$.

179. Розв'яжіть нерівність і зобразіть множину її розв'язків на координатній прямій:

1) $x - 5 \leq 6$; 2) $x + 7 > -9$;

3) $x - 7 \geq 12$; 4) $x + 7 < -5$.

180. Знайдіть розв'язки нерівності:

1) $4x > 8$; 2) $8x \leq 72$; 3) $-9x \geq -63$; 4) $-x < 5$;

5) $5x \geq 11$; 6) $6x < 1,2$; 7) $-18x > -27$; 8) $-3x \leq 0$.

181. Розв'яжіть нерівність:

1) $6x > 12$; 2) $7x < 42$; 3) $-x \geq -8$; 4) $-12x \leq 24$;

5) $7x \leq 13$; 6) $4x > 1,6$; 7) $12x < -18$; 8) $-9x \geq 0$.

182. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{3}x \geq -2$; 2) $\frac{2}{9}x < 10$;

3) $-\frac{1}{4}x \leq -6$; 4) $-\frac{3}{7}x > -21$.

183. Знайдіть розв'язки нерівності:

1) $\frac{1}{6}x < -3$; 2) $\frac{2}{3}x \geq 18$;

3) $-\frac{3}{8}x \leq -12$; 4) $-\frac{7}{6}x > 42$.

184. Розв'яжіть нерівність та вкажіть три будь-яких числа, що є її розв'язками:

1) $-3x < 12$; 2) $2x \geq 0$;

3) $-5x > -35$; 4) $4x \leq -13$.

185. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $0,2x \geq 8$; 2) $-0,7x < 1,4$;

3) $10x \leq -1$; 4) $-8x > 0$.

186. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $0,3x > 15$; 2) $-0,2x \leq 1,8$;
 3) $100x \geq -2$; 4) $-5x < 0$.

187. Чи рівносильні нерівності:

- 1) $2x \geq 8$ і $-x \leq -2$; 2) $3x < 6$ і $x + 1 < 3$?

188. Чи рівносильні нерівності:

- 1) $5x \leq 5$ і $-x \geq -1$; 2) $2x > 8$ і $x - 1 < 5$?

189. При яких значеннях x функція $y = -4x$ набуває значень, які:

- 1) більші за -8 ; 2) менші від 12 ?

190. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $1 + 2x > 7$; 2) $3 - 5x \leq 2$; 3) $3x + 8 < 0$;
 4) $9 - 12x \geq 0$; 5) $6 + x < 3 - 2x$; 6) $4x + 19 \leq 5x - 2$.

191. Знайдіть розв'язки нерівності:

- 1) $1 + 6x \leq 7$; 2) $6x + 1 > -3$; 3) $3 - 2x \geq 0$;
 4) $6 - 15x < 0$; 5) $4 + x > 1 - 2x$; 6) $4x + 7 \leq 6x + 1$.

192. При яких значеннях x функція $y = 2x - 3$ набуває від'ємних значень?

193. При яких значеннях x функція $y = 5 - 2x$ набуває додатних значень?

194. Знайдіть розв'язки нерівності:

- 1) $4 - x > 3(2 + x)$; 2) $3(1 - x) \geq 2(2x - 2)$;
 3) $2(3 + x) + (4 - x) \leq 0$; 4) $-(2 - 3x) + 4(x + 6) < 1$.

195. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $4(1 + x) < x - 2$; 2) $2 + x \geq 6(2x - 1)$;
 3) $-(2x + 1) > 3(x + 2)$; 4) $5(x + 8) + 4(1 - x) \leq 0$.

196. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \sqrt{x + 2}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x - 3}}$.

197. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \sqrt{x - 1}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x + 4}}$.

198. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{3x}{4} - x < 2$; 2) $\frac{5x}{3} + x \geq 16$.



Достатній рівень

199. При яких значеннях a нерівність $ax < 4$ має ту саму множину розв'язків, що й нерівність:

$$1) x < \frac{4}{a}; \quad 2) x > \frac{4}{a}?$$

200. При яких значеннях b нерівність $bx \geq 7$ має ту саму множину розв'язків, що й нерівність:

$$1) x \geq \frac{7}{b}; \quad 2) x \leq \frac{7}{b}?$$

201. Складіть таку нерівність вигляду $ax > b$, щоб множиною її розв'язків був проміжок:

$$1) (3; +\infty); \quad 2) (-\infty; 1).$$

202. Знайдіть усі натуральні розв'язки нерівності:

$$1) x(x+2) - x^2 > 4x - 7; \quad 2) (x+5)(x-5) \leq x^2 - 5x.$$

203. Знайдіть усі натуральні розв'язки нерівності:

$$1) (x+1)^2 - x^2 \geq 6x - 9; \\ 2) (x-1)(x+2) < x^2 - 3x + 11.$$

204. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

$$1) \frac{x+3}{4} - \frac{x}{3} \leq 0; \quad 2) \frac{x+1}{2} - \frac{1-5x}{5} > x.$$

205. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

$$1) \frac{x+2}{7} - \frac{x}{5} \geq 0; \quad 2) \frac{x-1}{3} - \frac{1-4x}{2} < x.$$

206. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) 2(3x+1) - 3x > 3x; \quad 2) x + \frac{x}{2} \geq \frac{3x}{2} + 2; \\ 3) 4(x+1) \geq 2(x+2) + 2x; \quad 4) 3(x-1) - 2x < x - 3.$$

207. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 3(2x+1) - 6x \geq 5; \quad 2) 4(x+1) - 3x > -(2-x); \\ 3) x - \frac{x}{3} < \frac{2x}{3} - 1; \quad 4) 6(x+1) - 3(x+2) \leq 3x.$$

208. Довжина однієї сторони прямокутника дорівнює 8 см. Якою має бути довжина другої сторони прямокутника, щоб його площа була меншою від 96 см^2 ?



Високий рівень

209. При яких значеннях a коренем рівняння:

- 1) $4x - 7 = a$ є число додатне;
- 2) $5 + 2x = 3 - a$ є число від'ємне?

210. Чи існує таке значення a , при якому:

- 1) нерівність $ax > 2$ не має розв'язків;
 - 2) розв'язком нерівності $(a - 3)x < 7$ є будь-яке число?
- У разі позитивної відповіді вкажіть це значення a .

211. При яких значеннях b рівняння:

- 1) $x^2 + 6x - 2b = 0$ не має коренів;
- 2) $bx^2 - 4x - 1 = 0$ має два різних корені?

212. При яких значеннях a рівняння:

- 1) $x^2 + 8x - 4a = 0$ має два різних корені;
- 2) $ax^2 - 6x + 1 = 0$ не має коренів?

213. Розв'яжіть нерівність для всіх значень a :

- 1) $ax > 3$;
- 2) $ax \geq 0$;
- 3) $ax < 0$;
- 4) $-ax < 5$.

214. Два натуральних числа відносяться як $2 : 5$, а їх сума менша за число 171. Якого найбільшого значення може набувати менше із цих чисел?

215. Два натуральних числа відносяться як $3 : 2$, а їх сума більша за 83. Якого найменшого значення може набувати більше із цих чисел?



Вправи для повторення

2 **216.** Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt{8})$;
- 2) $\sqrt{5^2 \cdot 2^4}$;
- 3) $(\sqrt{10} - \sqrt{7})(\sqrt{10} + \sqrt{7})$.

217. Розв'яжіть систему рівнянь:

- 1) $\begin{cases} x + y = 8, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 3y - x = 1, \\ 2x + 5y = 20. \end{cases}$

3 **218.** Турист проплив 5 км на моторному човні проти течії річки, а назад повернувся на плоту. Знайдіть швидкість течії, якщо на плоту турист плив на 2 год довше, ніж на човні, а власна швидкість човна дорівнює 12 км/год.

219. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{1}{a^2 - 4a + 4} + \frac{1}{a^2 - 4} \right) : \frac{2}{(a - 2)^2} - \frac{a}{a + 2}$$

не залежить від значення змінної.

4 220. Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} 8, & \text{якщо } x < 1, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 4, \\ x - 2, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$



Життєва математика

221. Родина із чотирьох осіб планує подорож з Києва до Львова або потягом, або на власному авто. Квиток на потяг на одну особу коштує 240 грн. Автомобіль витрачає 8 літрів пального на 100 кілометрів шляху, відстань по шосе між містами дорівнює 540 км, а ціна пального складає 22 грн за літр. Скільки коштуватиме родині найдешевший варіант такої подорожі?



Розв'яжіть і підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

222. Знайдіть переріз проміжків:

- 1) $(-\infty; 5]$ і $[3; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3]$ і $[5; +\infty)$;
 3) $(-\infty; 3)$ і $(-\infty; 5]$; 4) $[3; +\infty)$ і $(5; +\infty)$.

223. Укажіть три значення x , які одночасно є розв'язками кожної з двох нерівностей:

- 1) $x \leq 2$ і $x \geq -3$; 2) $x > -5$ і $x > 7$;
 3) $x < 0$ і $x \geq -7$; 4) $x \leq 2$ і $x \leq 4$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



224. У чемпіонаті з баскетболу взяли участь 6 команд, кожна з яких зіграла по 4 зустрічі з кожною командою-учасницею. Нічий у баскетболі не буває. Відомо, що п'ять команд мали відповідно 80 %, 60 %, 55 %, 40 % та 35 % перемог (від своєї загальної кількості ігор). Яке місце посіла шоста команда і який у неї відсоток перемог?



7. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ, ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Розглянемо задачу. Велосипедист за 2 год долає відстань, більшу ніж 24 км, а за 3 год – відстань, меншу ніж 39 км. Знайти швидкість велосипедиста.

Розв'яжемо її. Нехай швидкість велосипедиста дорівнює x км/год, тоді за 2 год він долає $2x$ км, а за 3 год – $3x$ км. За умовою задачі $2x > 24$ і $3x < 39$.

Маємо знайти такі значення x , для яких буде правильною як нерівність $2x > 24$, так і нерівність $3x < 39$, тобто знайдемо спільні розв'язки обох цих нерівностей. У такому випадку кажуть, що потрібно *розв'язати систему нерівностей*, і об'єднують нерівності в систему:

$$\begin{cases} 2x > 24, \\ 3x < 39. \end{cases}$$

Оскільки обидві нерівності є лінійними, то маємо *систему лінійних нерівностей з однією змінною*.

Розв'язавши кожную з нерівностей системи, отримаємо:

$$\begin{cases} x > 12, \\ x < 13. \end{cases}$$

Тобто значення x має задовольняти умову: $12 < x < 13$.

Отже, швидкість велосипедиста більша за 12 км/год, але менша від 13 км/год.

Число 12,6 задовольняє кожную з нерівностей системи

$$\begin{cases} 2x > 24, \\ 3x < 39. \end{cases}$$

Справді, кожна з нерівностей $2 \cdot 12,6 > 24$ та $3 \cdot 12,6 < 39$ є правильною числовою нерівністю. У такому випадку кажуть, що число 12,6 є розв'язком даної системи нерівностей.



Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, при якому правильною є кожна з нерівностей системи.



Розв'язати систему – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Щоб розв'язати систему нерівностей, доцільно дотримуватися такої послідовності дій:



- 1) розв'язати кожен з нерівностей системи;
- 2) зобразити множину розв'язків кожної з нерівностей на координатній прямій;
- 3) знайти переріз цих множин, який і буде множиною розв'язків системи;
- 4) записати відповідь.

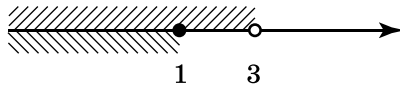
Приклад 1. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 3x + 2 < 11, \\ 4x - 5 \leq -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Поступово замінюючи кожен з нерівностей системи її рівносильною простішою, матимемо:

$$\begin{cases} 3x + 2 < 11, \\ 4x - 5 \leq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x < 9, \\ 4x \leq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Позначимо на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівність $x < 3$, і множину чисел, які задовольняють нерівність $x \leq 1$ (мал. 26). Множиною розв'язків системи є переріз цих множин, тобто проміжок $(-\infty; 1]$.



Мал. 26

Відповідь. $(-\infty; 1]$.

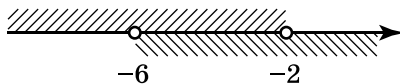
Відповідь до системи можна записати й так: $x \leq 1$.

Приклад 2. Знайти всі цілі розв'язки системи нерівностей:

$$\begin{cases} (x + 1)^2 - x(x + 4) > 5, \\ \frac{x}{2} + \frac{x}{3} > -5. \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо всі розв'язки системи:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 - x^2 - 4x > 5, \\ 3x + 2x > -30; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x > 4, \\ 5x > -30; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2, \\ x > -6. \end{cases}$$



Мал. 27

Маємо, що розв'язком системи є проміжок $(-6; -2)$.

Тепер знайдемо всі цілі числа, що належать цьому проміжку. Ними будуть $-5; -4; -3$. Отже, цілими розв'язками системи є числа $-5; -4; -3$.

Відповідь. $-5; -4; -3$.

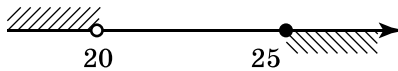
Приклад 3. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 0,2x - 5 \geq 0, \\ 0,3x - 6 < 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{cases} 0,2x - 5 \geq 0, & 0,2x \geq 5, & x \geq 25, \\ 0,3x - 6 < 0; & 0,3x < 6; & x < 20. \end{cases}$$

Зобразивши отримані розв'язки нерівностей системи на координатній прямій (мал. 28), бачимо, що спільних розв'язків вони не мають, тобто переріз проміжків є порожньою множиною. Отже, система розв'язків не має.



Мал. 28

Відповідь. Розв'язків немає.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $5 < 2x - 7 \leq 9$.

Розв'язання. Маємо подвійну нерівність. Перепишемо її у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} 2x - 7 > 5, \\ 2x - 7 \leq 9. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{cases} 2x > 12, & x > 6, \\ 2x \leq 16; & x \leq 8; \end{cases} \quad \text{отже, } 6 < x \leq 8, \text{ тобто } x \in (6; 8].$$

Відповідь. $(6; 8]$.

Розв'язання можна було подати і в іншому вигляді:

$$\begin{aligned} 5 < 2x - 7 \leq 9 & \quad | + 7 \\ 12 < 2x \leq 16 & \quad | : 2 \\ 6 < x \leq 8. & \end{aligned}$$

Відповідь можна було записати ще й так: $6 < x \leq 8$.



1. Наведіть приклад системи лінійних нерівностей з однією змінною.
2. Що називають розв'язком системи нерівностей з однією змінною?
3. Що означає розв'язати систему нерівностей з однією змінною?



Початковий рівень

225. (Усно). Чи є числа -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 розв'язками системи:

$$1) \begin{cases} x < 2, \\ x < 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < 3, \\ x \geq -1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \geq -2, \\ x > 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 7, \\ x > 8? \end{cases}$$

226. (Усно). Чи є число 2 розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} 2x > 3, \\ x < 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \geq 2, \\ 3x < 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x < 0, \\ 3x \geq 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x \geq -9, \\ 5x < 11? \end{cases}$$

227. Чи є число -1 розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} x > 0, \\ x < 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \leq 0, \\ x > -2; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 3; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < -1, \\ x > 3? \end{cases}$$



Середній рівень

228. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 4, \\ x > 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 4, \\ x < 8; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x < 4, \\ x < 8; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 4, \\ x > 8. \end{cases}$$

229. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 3, \\ x > 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 3, \\ x < 5; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x < 3, \\ x < 5; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 3, \\ x > 5. \end{cases}$$

230. Знайдіть розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} 3x > 6, \\ -4x > -12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x \leq 21, \\ -3x \geq -6; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 0,2x \geq 1, \\ 0,5x < 1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{1}{4}x < 2, \\ \frac{1}{3}x \leq 5. \end{cases}$$

231. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 5x < 15, \\ -4x < 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x < -5, \\ -7x > -28; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 0,1x > 3, \\ 0,2x \leq 5; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{1}{3}x \leq 2, \\ \frac{1}{8}x < 5. \end{cases}$$

232. Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} x - 3 > 1, \\ x - 6 < 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 7 < -2, \\ x - 2 > 8; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + 2 \leq -7, \\ -2x \geq -14. \end{cases}$$

233. Розв'яжіть систему нерівностей та вкажіть два числа, що є її розв'язками:

$$1) \begin{cases} 3x + 1 > 5x, \\ 5,2 - 2x < 0,6x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 1,5x + 1 > 3x - 2, \\ x - 2 < 4 - 2x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 9 - x < 6x + 2, \\ x + 8 < 11. \end{cases}$$

234. Розв'яжіть систему нерівностей та вкажіть два числа, що є її розв'язками:

$$1) \begin{cases} x + 4 > 3x, \\ 1,4 - 0,2x > 0,5x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 6x - 1 < 7x + 2, \\ x + 1,8 > 2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 1,5x - 1 > 6,5x - 2, \\ x + 6 > 2 - 3x. \end{cases}$$

235. Розв'яжіть подвійну нерівність:

$$1) 3 < 3x \leq 9; \quad 2) -1 \leq \frac{x}{2} \leq 4; \\ 3) 0 \leq x - 1 \leq 5; \quad 4) 11 < x + 7 < 13.$$

236. Розв'яжіть подвійну нерівність:

$$1) 2 \leq 2x < 10; \quad 2) -2 < \frac{x}{5} \leq 1; \\ 3) 10 < x - 5 < 12; \quad 4) 7 \leq x + 1 \leq 8.$$

237. Знайдіть усі цілі розв'язки подвійної нерівності:

$$1) -2 \leq 2x < 4; \\ 2) 1,3 < x - 2 \leq 2,7.$$



238. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2,6 + x > 5(x + 1) - 6, \\ 2(x - 0,4) - x < 3x - 0,5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 1,2(3 - x) - 6 > 0,8x, \\ -2(1 - 4x) - x < 5x. \end{cases}$$

239. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2(x + 3) - 4 < x - 8, \\ 6x + 1 > 3(x + 1); \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -(x - 2) - 3(x - 1) < 2x, \\ 12 - (x - 3) \leq 5x + 5. \end{cases}$$

240. При яких значеннях x кожна з функцій $y = 0,3x - 1,8$ і $y = 0,2x - 1,2$ набуває невід'ємних значень?

241. Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{5} > \frac{x + 1}{6}, \\ 2(x + 1) + 5 > 3(x - 5) + 14; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{5x + 3}{2} \leq 3x + 1, \\ (x + 1)x - 2 \leq x(x - 3) + 6. \end{cases}$$

242. Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{2} > \frac{x - 3}{3}, \\ 3(x + 1) - 5 < 2(x - 3) + 4; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{3x - 1}{4} \leq x - 2, \\ (x - 2)x - 5 \geq x(x + 1) - 29. \end{cases}$$

243. Знайдіть найменше ціле число, що є розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} 5(2x - 1) + 3 > 2(x - 1) + 7x, \\ 6(1 - x) + 2 \geq 3(x + 1) - 7x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{3x + 2}{2} \geq 2(2x + 1), \\ (x + 5)(x - 3) \geq x(x - 1) - 21. \end{cases}$$

244. Знайдіть найбільше ціле число, що є розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} 3(2x - 2) + 7 > 4(x - 1) - 13, \\ 5(1 - x) + 3 \geq 2(x + 1) - 2x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{5x+1}{3} \geq 4(2x+1), \\ (x+2)(x-5) \geq x(x+1) - 10. \end{cases}$$

245. Знайдіть область допустимих значень змінної у виразі:

$$1) \sqrt{2x+7} + \sqrt{1-5x};$$

$$2) \sqrt{0,3x-6} + \frac{1}{\sqrt{4x-8}}.$$

246. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{10-2x} + \sqrt{3x+18};$$

$$2) y = \frac{1}{\sqrt{2x-0,8}} + \sqrt{3x+0,06}.$$

247. Знайдіть множину розв'язків подвійної нерівності:

$$1) 0 < \frac{x}{3} - 1 \leq 2; \quad 2) -2 < -\frac{x}{2} + 3 < 4;$$

$$3) -5 < \frac{2x+1}{3} < -1; \quad 4) 0 \leq \frac{1-2x}{3} \leq 8.$$

248. Розв'яжіть подвійну нерівність:

$$1) -1 < \frac{x}{3} + 1 \leq 0; \quad 2) 3 < -\frac{x}{5} + 1 \leq 7;$$

$$3) 4 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 5; \quad 4) 2 < \frac{1-5x}{4} < 9.$$



4 Високий рівень

249. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2(x-1) - 3(x-2) + x < 0, \\ 1,3x(x-2) - 0,4 < x(1,3x-3); \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2,5x - 0,5(8-x) - 1,6 < x, \\ x + 2,1 > 1,5(2x-1) - 2x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2-x > 2x(x-3) - x(2x-5), \\ 5-10x < 3x(2x-4) - x(6x-2); \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 > \frac{5x}{6}, \\ x - \frac{7x}{8} < \frac{x}{8} + 4. \end{cases}$$

250. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 4(x - 3) - (x + 5) > 3(x - 2), \\ 2(x + 3) - 5(x - 6) > 4(x - 2); \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 6(x - 1) - 3 < 2(3x - 4), \\ x(x - 2) > (x + 3)(x - 3) - 11. \end{cases}$$

251. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{x - 3} + \frac{1}{\sqrt{7 - x}} + \frac{1}{x^2 - 25};$$

$$2) y = \sqrt{2x - 8} + \frac{x}{\sqrt{10 - x}} + \frac{7}{\sqrt{0,2x - 1}}.$$

252. Знайдіть область допустимих значень змінної у виразі:

$$1) \sqrt{x - 2} + \frac{1}{\sqrt{6 - x}} + \frac{1}{x^2 - 16};$$

$$2) \sqrt{3x - 6} + \frac{5}{\sqrt{8 - x}} + \frac{x}{\sqrt{0,5x - 1,5}}.$$

253. Одна сторона трикутника дорівнює 4 см, а друга – 5 см. Якою завдовжки може бути третя сторона трикутника за умови, що його периметр менший від 15 см?

254. При яких значеннях a обидва корені рівняння $x^2 - (a + 1)x - (a + 2a^2) = 0$ менші від числа 1?

255. При яких значеннях a обидва корені рівняння $x^2 - (2a + 1)x + (a^2 + a) = 0$ більші за число 3?



Вправи для повторення

2 **256.** Відомо, що $a > b$. Порівняйте:

$$1) a - 2 \text{ і } b - 2; \quad 2) 2,1a \text{ і } 2,1b; \quad 3) -a \text{ і } -b; \quad 4) -8a \text{ і } -8b.$$

257. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) -5x \geq 15; \quad 2) 7 - x < 11 - 3x.$$

3 **258.** Доведіть нерівність $x^2 - 8x + 19 > 0$.

259. Дано: $10 < x < 20$; $2 < y < 5$. Оцініть значення виразу:

$$1) 2x - y; \quad 2) \frac{x}{y}.$$

4 **260.** При яких значеннях t рівняння $tx^2 + 4x - 8 = 0$ не має розв'язків?



261. Даринка і Марічка разом можуть прополоти грядку за 24 хвилини, а Марічка самостійно – за 40 хвилин. За скільки хвилин самостійно може прополоти цю грядку Даринка?



Цікаві задачі для учнів неледачих



262. (Національна олімпіада США, 1979 р.). Розв'яжіть рівняння $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_{14}^4 = 1599$ у цілих числах.

Домашня самостійна робота № 1

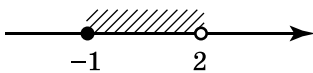
Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.



1. Яке із чисел є розв'язком нерівності $3x > 7$?

- А. -2; Б. 0; В. 5; Г. 2.

2. Укажіть проміжок, зображений на малюнку 29.



- А. $[-1; 2]$; Б. $[-1; 2)$;
В. $(-1; 2)$; Г. $(-1; 2]$.

Мал. 29

3. Яка з нерівностей є лінійною з однією змінною?

- А. $3x^2 > 7$; Б. $2 + 1 > 0$; В. $\frac{1}{2x + 7} < 3$; Г. $-3x > 8$.



4. Відомо, що $a > b$. Укажіть правильну нерівність.

- А. $\frac{a}{7} < \frac{b}{7}$; Б. $a + 3 < b + 3$; В. $-a > -b$; Г. $-2a < -2b$.

5. Розв'яжіть нерівність $-3x \leq -15$.

- А. $[5; +\infty)$; Б. $(-\infty; 5]$; В. $[-5; +\infty)$; Г. $(-\infty; -5)$.

6. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x - 2 < 7, \\ 2x \geq -4. \end{cases}$

- А. $[-2; 3]$; Б. $[-2; 9)$; В. $(-\infty; -2]$; Г. $(9; +\infty)$.



7. Укажіть вираз, що набуває додатних значень при будь-якому значенні x .

- А. $-x^2$; Б. x^2 ; В. $x^2 + 2$; Г. $(x + 2)^2$.

8. Відомо, що $2 < a < 5$ і $1 < b < 3$. Оцініть значення виразу $4a - b$.

А. $5 < 4a - b < 19$; Б. $7 < 4a - b < 17$;

В. $-1 < 4a - b < 4$; Г. $9 < 4a + b < 23$.

9. Укажіть число, що не належить проміжку $[2,5; 3,6)$.

А. $\sqrt{7}$; Б. $\sqrt{14}$; В. $2\frac{1}{2}$; Г. $\sqrt{11}$.

4 10. Відомо, що $1 < x < 2$. Оцініть значення виразу $\frac{30}{5 - 2x}$.

А. $3\frac{1}{3} < \frac{30}{5 - 2x} < 4\frac{2}{7}$; Б. $\frac{30}{5 - 2x} > 0$;

В. $15 < \frac{30}{5 - 2x} < 30$; Г. $10 < \frac{30}{5 - 2x} < 30$.

11. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{x - 2} + \frac{1}{\sqrt{8 - x}} + \frac{1}{x^2 - 9}$$

А. $[2; 8)$;

Б. $[2; 3) \cup (3; 8]$;

В. $[2; 3) \cup (3; 8)$;

Г. $(2; 3) \cup (3; 8)$.

12. При яких значеннях c рівняння $2x^2 + 4x - c = 0$ не має розв'язків?

А. таких значень c не існує;

Б. $c < -2$;

В. $c \leq -2$;

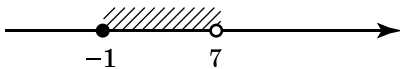
Г. $c > -2$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО § 1-7

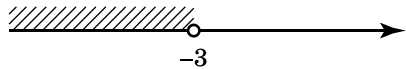
1 1. Чи є розв'язком нерівності $x + 2 > 7$ число:

1) 6; 2) -2; 3) 0; 4) 10?

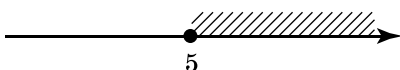
2. Запишіть проміжки, зображені на малюнках 30-33:



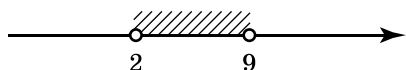
Мал. 30



Мал. 31



Мал. 32



Мал. 33

3. Які з нерівностей є лінійними з однією змінною:

1) $-2x^2 > 6$; 2) $-2x > 6$; 3) $2 + 3 < 6$; 4) $\frac{1}{-2x} > 6$?

4. Відомо, що $x > y$. Порівняйте:

1) $x + 2$ і $y + 2$; 2) $2x$ і $2y$; 3) $-x$ і $-y$; 4) $-4x$ і $-4y$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $-2x \geq 8$; 2) $3x - 4 > x + 8$.

6. Розв'яжіть систему нерівностей:
$$\begin{cases} x + 3 < 5, \\ 4x \geq -4. \end{cases}$$

7. Дано: $5 < a < 10$ і $2 < b < 4$. Оцініть значення виразу:

1) $3a - b$; 2) $\frac{a}{b}$.

8. Доведіть нерівність: $a^2 + 6a + 10 > 0$.

9. Знайдіть область визначення функції:

$$y = \sqrt{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{7 - x}} + \frac{1}{x^2 - 4}.$$

Додаткові завдання

10. Доведіть нерівність $(a + 1)(b + 4)(a + b) \geq 16ab$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$.

11. При яких значеннях a рівняння $ax^2 - 2x - 8 = 0$ не має коренів?

Вправи для повторення розділу 1

До § 1

263. Відомо, що $m < n$. Чи може різниця $m - n$ дорівнювати:

1) 2,7; 2) π ; 3) 0; 4) -3,8?

264. Доведіть нерівність:

1) $5(m - 3) > 5m - 16$; 2) $x(x + 10) + 2 > 10x$;
 3) $(a - 7)(a + 10) < (a + 4)(a - 1)$; 4) $p(p - 6) < (p - 3)^2$;
 5) $(m - 2)^2 > -4m$; 6) $p + 1 \leq \frac{(p + 2)^2}{4}$.

3 265. Які з нерівностей є правильними при будь-якому значенні a :

1) $(2a + 3)(2a - 3) < 4a^2 + 2a$;

2) $(3a - 2)(3a + 2) < 49a^2 + 0,6$;

3) $(3a - 1)^2 > 3a(3a - 2)$;

4) $7 > (3 - a)(3 + a)$?

266. Доведіть нерівність:

1) $(m + 1)^2 \geq 4m$;

2) $(4b - 1)^2 > -8b$;

3) $\frac{a^2 + 1}{2} \geq a$;

4) $\frac{m}{m^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$.

267. Порівняйте число m з нулем, якщо:

1) $2m < 3m$; 2) $m > 5m$; 3) $-m < -3m$; 4) $-4m > -5m$.

4 268. Доведіть нерівність:

1) $m^2 + n^2 - 2m - 4n + 5 \geq 0$;

2) $2x^2 - 10xy + 25y^2 \geq 0$.

269. Порівняйте вирази:

1) $a^3 - b^3$ і $ab(b - a)$, якщо $a \geq b$;

2) $m^2 + n^2$ і $\frac{1}{2}$, якщо $m + n = 1$.

270. Відстань від села до міста 20 км. Один з велосипедистів проїхав із села в місто й повернувся назад зі сталою швидкістю. Другий велосипедист їхав із села в місто зі швидкістю, на 1 км/год більшою за швидкість першого, а повертався назад зі швидкістю, на 1 км/год меншою від швидкості першого. Хто з велосипедистів витратив менше часу на дорогу?

271. Порівняйте площу квадрата, сторона якого дорівнює 6 см, із площею довільного прямокутника, що має такий самий периметр, як у квадрата.

До § 2

1 272. У яких нерівностях правильно перенесено доданок з однієї частини у другу:

1) $m + 2 > 5$, 2) $p - 7 \leq 2$, 3) $9 > t - 7$, 4) $10 \leq a + 5$,
 $m > 5 + 2$; $p \leq 2 + 7$; $9 + 7 > t$; $10 - 5 \leq a$?

2 273. Замініть зірочку знаком $>$ або $<$ так, щоб твердження було правильним:

1) якщо $p > -2$, то $-2 * p$; 2) якщо $2 < a$, $a < b$, то $2 * b$.

274. Порівняйте числа:

1) $x + 5$ і $y + 5$, якщо $x < y$; 2) $m - 2$ і $p - 2$, якщо $p > m$;

3) $-m$ і $-n$, якщо $m > n$; 4) $12a$ і $12b$, якщо $a \geq b$;

5) $-3k$ і $-3p$, якщо $p < k$; 6) $\frac{c}{5}$ і $\frac{d}{5}$, якщо $d \geq c$.

3 275. Відомо, що $a > b$. Розмістіть у порядку зростання числа $a + 3$; $b - 3$; $a + 1$; a ; $b - 1$; b .

276. Відомо, що $x > y > 0$. Порівняйте:

1) $8x$ і $5y$; 2) $3x$ і y ; 3) $-3x$ і $-y$; 4) $-5x$ і $-2y$.

277. Оцініть значення виразу, якщо $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$:

1) $-2\sqrt{3}$; 2) $3 + \sqrt{3}$; 3) $4 - 5\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$.

278. Відомо, що $a > 5$. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $2a - 10$; 2) $35 - 7a$.

4 279. Оцініть значення виразу $|x|$, якщо:

1) $-3 < x < -1$; 2) $-7 < x < 1$.

До § 3

1 280. Виконайте почленне додавання нерівностей:

1) $x < 3$ і $y < -3$; 2) $a > 5$ і $b > 7$.

281. Виконайте почленне множення нерівностей:

1) $m > 2$ і $n > 1$; 2) $0 < p < 3$ і $0 < q < 5$.

2 282. Оцініть значення виразу:

1) $ab + 2$, якщо $1 < a < 5$ і $2 < b < 7$;

2) $p^2 - 3$, якщо $2 < p < 4$.

3 283. Чи правильне твердження:

1) якщо $x > 2$, то $x^2 > 4$;

2) якщо $x < 2$, то $x^2 < 4$;

3) якщо $x > 2$, то $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$;

4) якщо $x < 2$, то $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$?

284. Оцініть площу квадрата з периметром P см, якщо $36 < P < 40$.

285. Порівняйте, якщо можливо:

- 1) $3m + 2n$ і 12 , коли $m > 3$, $n > 2$;
- 2) $b - 3a$ і 0 , коли $a > 8$, $b < 6$;
- 3) $x - 3y$ і 1 , коли $x < 8$, $y < 0$;
- 4) $p - 4q$ і 9 , коли $p < 8$, $q > 1$.

4 **286.** Оцініть значення виразу:

- 1) $a^2 + 2a + 5$, якщо $0 < a < 1$;
- 2) $x^2 - 4x$, якщо $1 < x < 2$;
- 3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, якщо $10 < a < 20$, $5 < b < 10$;
- 4) $\frac{1}{mn} - 7$, якщо $1 < m < 2$, $0,3 < n < 0,5$.

287. Порівняйте x і y , якщо $x > a^2 + b^2$, $y < 2ab$.

288. Оцініть площу прямокутника з периметром P см і стороною a см, якщо $20 < P < 30$, $5 < a < 6$.

289. Доведіть нерівність:

- 1) $(x + 2y)\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$, якщо $x > 0$, $y > 0$;
- 2) $\left(\frac{1}{m^2} + pn\right)\left(\frac{4}{p^2} + mn\right)\left(\frac{9}{n^2} + pm\right) \geq 48$, якщо $m > 0$,
 $n > 0$, $p > 0$.

До § 4

1 **290.** Які із чисел -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 є розв'язками нерівності:

- 1) $x < 1$;
- 2) $x \leq 1$;
- 3) $x > 1$;
- 4) $x \geq 1$?

2 **291.** Запишіть три числа, які є розв'язками як нерівності $x \leq 5$, так і нерівності $x > 3$.

292. Які із чисел -1 ; 0 ; 3 ; 5 ; 7 задовольняють нерівність:

- 1) $\frac{1}{x} + x > 2$;
- 2) $\sqrt{x + 2} < 3$?

3 **293.** Знайдіть усі натуральні розв'язки нерівності

$$1 < \frac{10}{x} \leq 5.$$

4 **294.** Які з розв'язків рівняння $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ є розв'язками нерівності $x^2 + 4x + 3 \leq 0$?

До § 5

1 295. Запишіть будь-які три числа, що належать проміжку:

- 1) $(-4; 5)$; 2) $[-2; 7)$; 3) $[3; +\infty)$;
 4) $(-\infty; 7)$; 5) $[1; 17]$; 6) $(-\infty; -1)$;
 7) $(4; 9]$; 8) $(5; +\infty)$; 9) $[-10; -9]$.

2 296. Знайдіть найменше і найбільше цілі числа, що належать проміжку:

- 1) $(-7; 8)$; 2) $[-2; 3,8)$; 3) $(-0,2; 4]$; 4) $(-2,99; 1,98)$.

3 297. Запишіть три числа проміжку $\left[-\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}\right]$.

298. Чи можна знайти найменше і найбільше числа, що належали б проміжку $[1,6; 1,8)$?

4 299. Знайдіть переріз і об'єднання множин:

- 1) раціональних і дійсних чисел;
 2) натуральних чисел, кратних числу 3, і натуральних чисел, кратних числу 9.

До § 6

1 300. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x - 3 \geq 0$; 2) $x + 5 < 0$; 3) $x + 2 > 0$; 4) $x - 6 < 0$.

2 301. Розв'яжіть нерівність і вкажіть два будь-яких цілих числа, що є її розв'язками:

- 1) $-4x > 12$; 2) $3x < 0$; 3) $-5x \leq -15$; 4) $2x \geq -7$.

302. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $1 + 8x < 9$; 2) $4x - 7 > 0$;
 3) $2 + 6x \leq 5 + 7x$; 4) $4x + 7 \geq 6x + 1$;
 5) $3x \geq 5x + 1$; 6) $4 + 11x < 5 + 12x$.

303. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{2x}{5} < 1$; 2) $\frac{x}{7} \geq 0$; 3) $\frac{4x}{3} > 2$;
 4) $\frac{5x}{8} \leq 0$; 5) $\frac{x+2}{20} \geq 1$; 6) $\frac{3-x}{2} \leq 1$.

304. При яких значеннях x значення виразу $2x + 3$ менше від відповідного значення виразу $4x - 7$?

305. При яких значеннях y сума дробів $\frac{y}{2}$ і $\frac{y}{3}$ більша за 10?

3 306. Розв'яжіть нерівність:

1) $6x^2 \geq 48 + 3x(2x + 4)$;

2) $(x + 6)(3x - 8) > 20 + 3(x^2 - 1)$;

3) $\frac{x - 2}{4} - \frac{x + 1}{3} \leq \frac{5x}{12}$;

4) $x - 1 < \frac{3x - 1}{3} + \frac{x + 1}{2}$.

307. Знайдіть найменше ціле значення x , при якому значення дробу $\frac{3x + 5}{2}$ менше від значення дробу $\frac{5x - 7}{3}$.

308. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\frac{2}{3}(x + 1) - 8}$; 2) $y = \frac{\sqrt{x - 5}}{x - 7}$.

309. Довжина однієї сторони прямокутника дорівнює 6 см. Якою має бути довжина другої сторони, щоб периметр прямокутника був більшим за 30 см?

4 310. При яких значеннях a рівняння:

1) $ax^2 + 2(a + 1)x + (a + 3) = 0$ не має коренів;

2) $ax^2 - (2a + 1)x + (a + 2) = 0$ має два різних корені?

311. Розв'яжіть нерівність для всіх значень a :

1) $5 + ax \geq a - 3x$; 2) $3(a - x) < 9 - ax$;

3) $(a + 1)x > a^2 - 1$; 4) $(a^2 - 4)x \leq a - 2$.

312. Спортсменка зробила 10 пострілів по мішені. За кожний влучний постріл їй нараховують 3 очки, а в разі промаху віднімають від результату 1 очко. Відомо, що спортсменка набрала більше 17 очок. Якою може бути кількість її влучних пострілів?

До § 7

1 313. Чи є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} 2x > 4, \\ 3x < 12 \end{cases}$

число: 1) 3; 2) 2,7; 3) 1,7; 4) -1,8; 5) 3,9; 6) 4?

2 314. Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ x + 5 \geq 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 7 < 0, \\ x + 8 > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x \geq -4, \\ 2x < 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{8}x > 1, \\ \frac{1}{7}x \leq 1. \end{cases}$

315. Розв'яжіть систему нерівностей та вкажіть три числа, що є її розв'язками:

$$1) \begin{cases} 3x + 2 > x + 4, \\ \frac{x}{3} < -1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + 2 \geq x - 1, \\ 3x - 1 < 1 - 2x; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \frac{2x - 1}{2} \leq 5, \\ \frac{x}{7} < 1. \end{cases}$$

316. Розв'яжіть подвійну нерівність:

$$1) 4 \leq 8x < 24; \quad 2) 1 \leq \frac{x}{10} < 2;$$

$$3) 0,1 < x + 1 < 1,1; \quad 4) 7,9 < x - 2 < 8,1.$$

3 317. Знайдіть натуральні розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} \frac{2x + 3}{5} > \frac{3x + 4}{8}, \\ 3 - 2x > 5(x - 5); \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x(x - 1) > (x + 1)^2, \\ \frac{x}{4} + \frac{x}{3} > -7. \end{cases}$$

318. При яких значеннях x :

- 1) значення двочлена $2x - 5$ належить проміжку $[-4; 2)$;
- 2) значення дробу $\frac{1 - 3x}{2}$ належить проміжку $[0; 4]$?

319. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 4x - 1 < 0, \\ -2 \leq 2x \leq 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -9 \leq -x \leq -5, \\ 5 \leq \frac{2x - 1}{3} \leq 10. \end{cases}$$

320. Сума натурального числа та подвоєного наступного за ним числа більша за 57. Сума цього самого числа і потроєного попереднього числа менша від 74. Знайдіть це натуральне число.

321. Знайдіть усі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 7, \\ x > 8, \\ x \leq 11; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x > 8, \\ 3x < 36, \\ -x < -5; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - 7 > 0, \\ -x > -8, \\ 2x - 15 \geq 0. \end{cases}$$

4 322. При яких значеннях a система нерівностей має розв'язки:

$$1) \begin{cases} 3x > 15, \\ x < a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + a \geq 0, \\ 3x \leq -6? \end{cases}$$

323. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 2, \\ x < a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 6, \\ x > a. \end{cases}$$

324. Знайдіть значення a , при яких один з коренів рівняння $x^2 + x + (a - a^2) = 0$ менший від нуля, а другий – більший за 0,5.

325. Знайдіть, при яких значеннях a обидва корені квадратного рівняння $6x^2 + (5a + 2)x + (a^2 + a) = 0$ належать проміжку $[-4; 0]$.

326. Кількість одиниць деякого двоцифрового числа на 1 більша за кількість його десятків. Знайдіть це число, якщо воно більше за 45, але менше від 66.

Фіскальна математика¹

Державний бюджет України – це план формування та використання фінансових ресурсів для забезпечення завдань і функцій держави, які вона здійснює через органи державної влади та місцевого самоврядування протягом бюджетного періоду. Основним джерелом формування держбюджету, зокрема наповнення його *дохідної частини*, є податки.

Податки – це обов'язкові платежі, які мають сплачувати фізичні та юридичні особи до державного бюджету. Розмір і терміни сплати податків установлюються законодавчо та періодично переглядаються. Розмір податкових нарахувань (*ставка податку*) може встановлюватися як у відсотках, так і в абсолютній сумі. Найбільш вагомими для дохідної частини бюджету є *податок на додану вартість* (ПДВ) та *єдиний соціальний внесок* (ЄСВ). ПДВ сплачує покупець за ставкою 20 % від вартості товару (послуги), але облік та перерахування ПДВ до державного бюджету здійснює продавець (податковий агент). ЄСВ стягується з роботодавців за ставкою 22 % від фонду заробітної плати². Дохідна частина державного бюджету також залежить і від інших видів податку, зокрема, податку на доходи фізичних осіб, акцизного податку, мита, податку на прибуток підприємств, транспортного та земельного податків тощо (знайдіть детальну інформацію про різні види податків в Україні самостійно).

¹ Та, що має стосунок до податкової політики держави.

² Ставки податків указано станом на 2017 рік.

Спробуйте самостійно розв'язати кілька задач, пов'язаних з оподаткуванням.

1. В Україні у 2015 році оподаткуванню підлягали 15 888 автомобілів, а у 2016 році – 138 249 автомобілів. Ставка транспортного податку на кожне авто складала 25 000 грн на рік. На скільки більше надходжень за рахунок транспортного податку отримав державний бюджет України у 2016 році в порівнянні з 2015 роком?

2. Ставка податку на землю складає 3,66 грн за 1 м², але в деяких населених пунктах цей податок може нараховуватися з певним коефіцієнтом, наприклад, у курортній місцевості Карпат, уздовж узбереж Чорного і Азовського морів, у густонаселених обласних центрах тощо. На скільки більшим буде розмір земельного податку в Києві, ніж в Одесі, за земельну ділянку площею 250 м², якщо в Києві і Одесі для ставки земельного податку діють коефіцієнти підвищення: коефіцієнт 3 – для Києва і коефіцієнт 2 – для Одеси?

3. За використаний у садовому будиночку газ родина Петренків сплатила суму, яку зазначено в договорі з підприємством, що надає послуги з газопостачання. Розмір ПДВ при цьому склав 134 грн. Яку суму (без ПДВ) зазначено в договорі на газопостачання для садового будиночка цієї родини?

4. Родина Ковальчуків за листопад 2016 року отримала від «Укртелекому» рахунок у розмірі 48 грн. Скільки коштів буде перераховано як ПДВ після сплати родинною цього рахунку?

5. Військовий збір у 2016 році склав 1,5 % від заробітної плати. Усі троє членів деякої родини працюють і отримують заробітну плату. Заробітна плата батька складає 5400 грн, матері – 4800 грн, а сина – 4200 грн. Яку загальну суму військового збору сплатять члени цієї родини за місяць? Яку загальну суму військового збору сплатить родина протягом усього 2016 року, якщо їх зарплата за цей період не змінювалася?

6. Сплативши 18 % податку на доходи фізичних осіб та 1,5 % військового збору від своєї заробітної плати, охоронець супермаркету отримав 4508 грн. Який розмір заробітної плати в охоронця? Скільки ЄСВ в місяць платить власник цього супермаркету до державного бюджету за охоронців, якщо в нього працює три охоронці та начальник охорони, заробітна плата якого в 1,2 раза більша за заробітну плату охоронця?

Розділ 2

Квадратична функція

У цьому розділі ви:

- **ознайомитесь** з квадратичною функцією;
- **дізнаєтеся**, що таке нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції; найбільше та найменше значення функції;
- **навчитеся** виконувати перетворення графіків функції; будувати графік квадратичної функції; розв'язувати квадратні нерівності та системи двох рівнянь другого степеня з двома змінними.

§ 8. ФУНКЦІЯ. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ, ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ І ГРАФІК ФУНКЦІЇ

У 7 класі ви почали вивчати одне з найважливіших математичних понять – поняття функції.

Нагадаємо, що



функцією (або **функціональною залежністю**) називають таку залежність, при якій кожному значенню незалежної змінної з деякої множини відповідає єдине значення залежної змінної.

Незалежну змінну ще називають **аргументом**, а про залежну змінну кажуть, що вона є **функцією** від цього аргументу (або просто функцією). Наприклад, якщо $y = x^2 + 2x - 3$, то y є функцією від аргументу x .

Залежність змінної y від змінної x записують так: $y = f(x)$ (читають: « y дорівнює f від x »). Символом $f(x)$ позначають значення функції для значення аргументу, що дорівнює x .

Приклад 1. Розглянемо функцію $y = 5x + 2$. Можна записати, що $f(x) = 5x + 2$. Знайдемо, наприклад, значення функції для $x = -3$, тобто знайдемо $f(-3)$. Маємо: $f(-3) = 5 \cdot (-3) + 2 = -13$. Знайдемо значення цієї функції в точках, що дорівнюють 0; a ; $b - 1$. Матимемо: $f(0) = 5 \cdot 0 + 2 = 2$;

$$f(a) = 5a + 2;$$

$$f(b - 1) = 5(b - 1) + 2 = 5b - 3.$$

Зауважимо, що в запису вигляду $y = f(x)$ замість f можна використовувати й інші букви: g , φ , ψ тощо.



Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють область визначення функції.

Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють область значень функції.

Найбільшим значенням функції називають найбільше число з області значень функції, а найменшим значенням функції – відповідно найменше таке число.

Область визначення функції $y = f(x)$ зазвичай позначають через $D(f)$, а область значень – через $E(f)$.

Якщо функцію задано формулою і не зазначено її область визначення, то вважатимемо, що ця область складається з усіх значень аргументу, при яких формула функції має зміст.

Приклад 2. Знайти область визначення функції:

$$1) f(x) = x^2 - 2x + 3; \quad 2) g(x) = \frac{1}{x - 8}.$$

Розв'язання. 1) Вираз $x^2 - 2x + 3$ має зміст при будь-якому значенні x , тому областю визначення функції $f(x) = x^2 - 2x + 3$ є множина всіх чисел, тобто проміжок $(-\infty; +\infty)$.

2) Вираз $\frac{1}{x - 8}$ має зміст при будь-якому значенні x , крім числа 8, тому областю визначення функції $g(x) = \frac{1}{x - 8}$ є проміжок $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

Відповідь. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

Відповідь можна було записати ще й так:

$$1) D(f) = (-\infty; +\infty); \quad 2) D(g) = (-\infty; 8) \cup (8; +\infty).$$

Приклад 3. Знайти область визначення і область значень функції: 1) $f(x) = 2 - x^2$; 2) $g(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x}$.

Розв'язання. 1) Областю визначення функції $f(x) = 2 - x^2$ є проміжок $(-\infty; +\infty)$. Щоб знайти область значень функції, оцінимо вираз $2 - x^2$ для всіх значень x . Маємо:

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 0 \quad | \cdot (-1) \\ -x^2 &\leq 0 \quad | + 2 \\ 2 - x^2 &\leq 2. \end{aligned}$$

Отже, $f(x) \leq 2$ при будь-якому значенні x , тобто областю значень функції $f(x) = 2 - x^2$ є проміжок $(-\infty; 2]$.

2) Область визначення функції $g(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x}$ складається з таких значень x , для яких вирази $x - 2$ і $2 - x$

одночасно набувають невід’ємних значень. Отже, щоб знайти ці значення, треба розв’язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ 2 - x \geq 0; \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Очевидно, що розв’язком системи є $x = 2$. Отже, область визначення функції $g(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x}$ містить лише число 2. Щоб знайти область значень цієї функції, достатньо обчислити $g(2)$. Маємо: $g(2) = \sqrt{2 - 2} + \sqrt{2 - 2} = 0$.

Відповідь. 1) Область визначення: $(-\infty; +\infty)$, область значень: $(-\infty; 2]$; 2) область визначення: число 2, область значень: число 0.

Відповідь можна записати й коротше, а саме:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; 2]$;

2) $D(g) = \{2\}$; $E(g) = \{0\}$.

Зауважимо, що найбільшим значенням функції $f(x) = 2 - x^2$ є число 2, а найменшого значення в цієї функції не існує.

Нагадаємо, що



графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

Приклад 4. Побудувати графік функції $f(x) = |x|$. За графіком знайти найбільше і найменше значення функції.

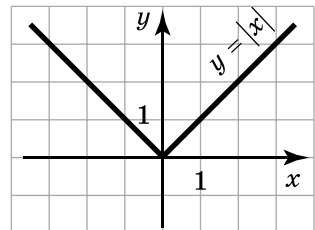
Розв’язання. Областю визначення функції $f(x) = |x|$ є множина всіх чисел. За означенням модуля числа маємо: $|x| = x$, якщо $x \geq 0$, і $|x| = -x$, якщо $x < 0$. Отже, функцію $f(x) = |x|$ можна записати так:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Графік цієї функції на проміжку $[0; +\infty)$ збігається із графіком функції $y = x$, а на проміжку $(-\infty; 0]$ – із графіком функції $y = -x$.

Графік функції $f(x) = |x|$ зображено на малюнку 34. Очевидно, що найменшим значенням цієї функції є число 0, а найбільшого значення не існує.

Відповідь. Найменше значення функції – 0, найбільшого не існує.



Мал. 34

А ще раніше...

Починаючи із XVII ст. функція є одним з основних математичних і загальнонаукових питань. Це поняття і донині відіграє значну роль у розумінні реального світу.

Ідея функціональної залежності прийшла з давнини. Її зміст можна знайти в перших математичних співвідношеннях між величинами, у перших правилах дій над числами, у перших формулах для знаходження площ і об'ємів. Так, вавилонські вчені ще 4–5 тисяч років тому експериментальним шляхом установили, що площа круга є функцією від його радіуса, і дізналися її наближену формулу: $S = 3r^2$.

Прикладами таблично заданих функцій є астрономічні таблиці вавилонян, античних греків і індійців, таблиці квадратів і кубів чисел, які також застосовували вавилоняни.

Починаючи лише з XVIII ст. у зв'язку із проникненням у математику ідеї змінних поняття функції стало застосовуватися цілком свідомо. У «Геометрії» Декарта і в роботах Ферма, Ньютона, Лейбніца поняття функції мало інтуїтивний характер і було пов'язане або з геометричним, або з механічним уявленням: ординати точок кривих – функції від абсцис, шлях і швидкість – функції від часу тощо.



Рене Декарт
(1596–1650)



П'єр Ферма
(1601–1665)



Ісаак Ньютон
(1643–1727)



Готфрід
Лейбніц
(1646–1716)

Чіткого уявлення поняття функції в XVII ст. ще не було, проте шлях до такого поняття проклав Рене Декарт. У своїй «Геометрії» в 1637 р. він систематично розглядав лише ті криві, які можна було задати за допомогою рівнянь, притому переважно алгебраїчних. Так з'явилася можливість записувати загальні формули.

Термін *функція* (від латинського *functio* – вчинення, виконання) у 1694 р. запровадив німецький математик Лейбніц. Функціями він назвав абсциси, ординати та інші відрізки, пов'язані з точкою, що рухається вздовж певної лінії. Термін «функція від x » стали вживати Лейбніц і Бернуллі; починаючи з 1698 р. Лейбніц увів також терміни *змінна* і *константа*. Для позначення довільної функції від x Йоганн Бернуллі застосовував знак φ_x , називаючи φ характеристикою функції. Лейбніц застосовував позначення x^1 , x^2 замість сучасних $f_1(x)$, $f_2(x)$, Ейлер позначав функцію як $f:(x)$ замість сучасного $f(x)$, а Д'Аламбер писав так: fx або $f(x)$, тобто прийшов до сучасного позначення функції.

Явне означення поняття функції вперше дав у 1718 р. один з учнів Лейбніца, видатний швейцарський математик Йоганн Бернуллі: «Функцією змінної величини називають кількість, утворену будь-яким способом із цієї змінної величини і констант».

Остаточне означення функції сформулював у своїй праці «Введення в аналіз нескінченних» (1748 р.) видатний учень Йоганна Бернуллі Леонард Ейлер, який дещо змінив означення свого вчителя. Означив Ейлер функцію так: «Функція змінної кількості є аналітичним виразом, який складено деяким чином із цієї кількості і чисел або сталих кількостей». Так розуміли функцію протягом майже всього XVIII ст.



Йоганн Бернуллі
(1667–1748)



Леонард Ейлер
(1707–1783)



Бернард
Больцано
(1781–1848)



П'єр Густав
Діріхле
(1805–1859)

У XIX ст. ідеї Ейлера набули подальшого розвитку. Поняття функції як залежності однієї змінної від іншої ввів чеський математик Больцано, а узагальнив – німецький математик Діріхле. У 1837 р. він так сформулював загальне означення поняття функції: « y є функцією змінної x (на відрізку $a \leq x \leq b$), якщо кожному значенню x (на цьому відрізку) відповідає цілком визначене значення y , причому неважливо, у який спосіб установлено цю відповідність – аналітичною формулою, графіком, таблицею або просто словами».

Скорочене й осучаснене саме таке означення функції трапляється в більшості шкільних підручників, у тому числі і в цьому.



1. Що називають функцією?
2. Яку змінну називають незалежною змінною (аргументом), а яку – залежною?
3. Що називають областю визначення функції?
4. Що називають областю значень функції?
5. Що називають графіком функції?



Початковий рівень

327. (Усно). Функцію задано формулою $y = 3x - 7$. Назвіть її незалежну змінну; залежну змінну.

328. Знайдіть:

1) $f(2)$, $f(0)$, $f(-1)$, якщо $f(x) = 2x - 3$;

2) $g(0)$, $g(2)$, якщо $g(x) = x^2 + x$;

3) $\varphi(-2)$, $\varphi(3)$, якщо $\varphi(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$.

329. Знайдіть:

1) $g(1)$, $g(0)$, $g(-3)$, якщо $g(x) = -x + 1$;

2) $f(0)$, $f(-1)$, якщо $f(x) = x^2 - x$;

3) $\psi(3)$, $\psi(-1)$, якщо $\psi(x) = \frac{x + 2}{x - 2}$.



Середній рівень

330. Нехай $t(x) = x^2 - x + 5$. Знайдіть $t(-1) + t(0) + t(1)$.

331. Нехай $g(x) = 2x^2 + 3$. Знайдіть $g(0) + g(1) + g(2)$.

332. Дано: $f(x) = \sqrt{x} + x$, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$. Порівняйте:

1) $f(0)$ і $g(1)$; 2) $f(4)$ і $g(3)$.

333. Дано: $f(x) = x - \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$. Обчисліть:

1) $f(1) + g(3)$; 2) $f(9) - g(1)$.

334. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = 5 - 3x$;

2) $g(x) = \frac{30}{x}$;

3) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$;

4) $g(x) = \sqrt{x} + 9$;

5) $f(x) = \frac{3}{x - 5}$;

6) $\psi(x) = \frac{7}{2x + 8}$.

335. Знайдіть область визначення функції:

1) $g(x) = 3x + 1$;

2) $f(x) = -\frac{60}{x}$;

3) $t(x) = 7 - \sqrt{x}$;

4) $f(x) = x^2 - 3x - 19$;

5) $g(x) = \frac{x}{x + 3}$;

6) $\varphi(x) = \frac{9}{3x - 9}$.

336. Знайдіть значення x , при якому значення функції

$y = \frac{1}{3}x - 5$ дорівнює:

1) 4;

2) -5;

3) 0;

4) -1.

337. При якому значенні x значення функції $y = 7 - 3x$ дорівнює:

- 1) 1; 2) 7; 3) 0; 4) -5?

338. Побудуйте графік функції:

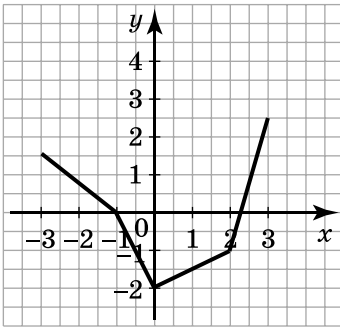
- 1) $y = 2x - 7$; 2) $y = 3$; 3) $y = -\frac{6}{x}$; 4) $y = \sqrt{x}$.

339. Побудуйте графік функції:

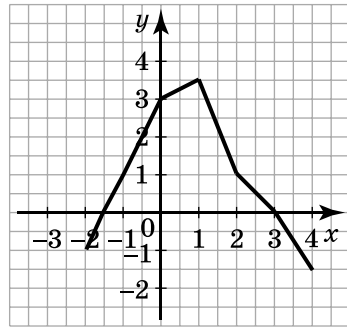
- 1) $y = 3x - 5$; 2) $y = \frac{4}{x}$; 3) $y = -2$; 4) $y = x^2$.

340. На малюнку 35 побудовано графік функції $y = f(x)$, областю визначення якої є проміжок $[-3; 3]$. Знайдіть:

- 1) $f(-3)$, $f(-1)$, $f(2)$;
- 2) значення x , якщо $f(x) = -1$, $f(x) = 2,5$;
- 3) найбільше і найменше значення функції;
- 4) область значень функції.



Мал. 35



Мал. 36

341. На малюнку 36 побудовано графік функції $y = g(x)$, областю визначення якої є проміжок $[-2; 4]$. Знайдіть:

- 1) $g(-2)$, $g(0)$, $g(3)$;
- 2) значення x , якщо $g(x) = 1$, $g(x) = -1,5$;
- 3) найбільше і найменше значення функції;
- 4) область значень функції.



Достатній рівень

342. Чи проходить графік функції $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{x - 1}$ через

- точку: 1) $A(0; 5)$; 2) $B(1; -2)$; 3) $C(2; 7)$; 4) $D(-1; -3)$?

343. Чи належить графіку функції $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x + 1}$ точка:

- 1) $A(2; 2)$; 2) $B(0; -5)$; 3) $C(-1; -7)$; 4) $D\left(1; \frac{1}{2}\right)$?

344. Знайдіть область визначення функції:

1) $g(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$;

2) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4}$;

3) $p(x) = \frac{5}{x^2 - 3x}$;

4) $t(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{2x - 7}$;

5) $g(x) = \frac{3}{x^2 + 2x - 3}$;

6) $f(x) = \frac{x}{|x| - 1}$;

7) $\varphi(x) = \frac{x}{|x| + 2}$;

8) $t(x) = \frac{5}{|x - 2| - 3}$;

9) $f(x) = \sqrt{3x - 6}$;

10) $f(x) = \frac{10}{\sqrt{4x + 10}}$.

345. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$;

2) $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$;

3) $\varphi(x) = \frac{4}{x^2 + 2x}$;

4) $\psi(x) = \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{3x + 6}$;

5) $p(x) = \frac{5}{x^2 - x - 2}$;

6) $f(x) = \frac{2x}{|x| - 4}$;

7) $g(x) = \frac{x}{|x| + 1}$;

8) $f(x) = \frac{4}{|x + 1| - 2}$;

9) $f(x) = \sqrt{2x + 6}$;

10) $f(x) = \frac{8}{\sqrt{2x - 7}}$.

346. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & \text{якщо } x < -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 \leq x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

Знайдіть $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.

347. Відомо, що $g(x) = kx + l$, причому $g(2) = -1$, $g(-4) = 17$.
Знайдіть k і l .

348. Відомо, що $f(x) = kx + l$, причому $f(1) = -4$, $f(-2) = -13$.
Знайдіть k і l .



Високий рівень

349. Знайдіть область значень функції:

- 1) $f(x) = \sqrt{x} - 5$; 2) $g(x) = 3 - \sqrt{x}$;
 3) $t(x) = |x| + 2$; 4) $g(x) = |x| - 3$;
 5) $f(x) = x^2 + 5$; 6) $\varphi(x) = 9 - x^4$.

350. Побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = \begin{cases} -x - 2, & \text{якщо } x < -3, \\ 1, & \text{якщо } -3 \leq x \leq 2, \\ x - 1, & \text{якщо } x > 2; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 1,5x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{6}{x}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

351. Побудуйте графік функції:

$$f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{якщо } x < -2, \\ 3, & \text{якщо } -2 \leq x < 3, \\ 6 - x, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$$

352. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

- 1) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$; 2) $g(x) = \frac{6x + 12}{x^2 + 2x}$;
 3) $\varphi(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$; 4) $\psi(x) = \frac{|x| - 2}{|x| - 2}$.

353. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

- 1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$; 2) $g(x) = \frac{16 - 8x}{x^2 - 2x}$.



Вправи для повторення




354. Обчисліть:

- 1) $6^8 : 6^5 : 36$; 2) $(7^5 \cdot 49^2) : 7^{10}$; 3) $10^{-6} : 100^{-2}$.



355. Число -3 є коренем рівняння $x^2 + 2x - c = 0$. Знайдіть c і другий корінь рівняння.

356. Спростіть вираз $\left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : \sqrt{\frac{b}{a}}$.

 357. Скільки коренів рівняння $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ є розв'язками нерівності $x^2 - 4 < 0$?



Життєва математика

358. У 2016 році податок на прибуток із заробітної плати складав 18 %, окрім того, із заробітної плати утримували 1,5 % військового збору. У деякій компанії зарплата менеджера складала 5200 грн. Яку суму коштів отримував менеджер після сплати податку на прибуток і військового збору?



Розв'яжіть і підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

359. Знайдіть нулі функції:

1) $y = 2x - 6$; 2) $y = 3x + 24$;

3) $y = \frac{x + 1}{7}$; 4) $y = \frac{7}{x + 1}$.

360. Яка фігура є графіком функції:

1) $y = 4x$; 2) $y = \frac{4}{x}$; 3) $y = 3x - 7$;

4) $y = x^2$; 5) $y = -3$; 6) $y = \sqrt{x}$?

361. Побудуйте графік функції:

1) $y = -3x$; 2) $y = \frac{6}{x}$; 3) $y = 2$;

4) $y = -\frac{8}{x}$; 5) $y = x^2$; 6) $y = \sqrt{x}$.



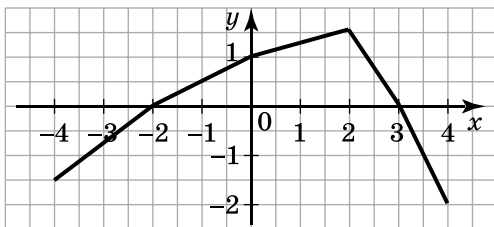
Цікаві задачі для учнів неледачих



362. Загадали деяке натуральне двоцифрове число. З правого боку до нього приписали таке саме число і від числа, що при цьому отримали, відняли квадрат числа, яке загадали. Потім цю різницю поділили на 4 % від квадрата числа, яке загадали, унаслідок чого неповна частка й остача виявилися рівними відповідно половині числа, яке загадали, та числу, яке загадали. Знайдіть, яке число загадали.

§ 9. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ

Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 37. Якщо $x = -2$ або $x = 3$, то значення функції дорівнює нулю, тобто $f(-2) = f(3) = 0$. Такі значення аргументу називають *нулями функції*.



Мал. 37



Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають нулем функції.

Зрозуміло, що нулі функції є абсцисами *точок перетину графіка функції з віссю абсцис*, а ординати цих точок дорівнюють нулю, адже точки належать осі абсцис.

Тому, щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, треба розв'язати рівняння $f(x) = 0$.

Приклад 1. Знайти нулі функції $h(x) = x^2 - 2x - 8$.

Розв'язання. Маємо рівняння: $x^2 - 2x - 8 = 0$, звідки $x_1 = -2$; $x_2 = 4$. Отже, -2 і 4 – нулі функції.

Відповідь. -2 ; 4 .

Графік, зображений на малюнку 37, перетинає вісь абсцис у точках $(-2; 0)$ і $(3; 0)$.

Цей графік перетинає також і вісь ординат у точці $(0; 1)$. Абсциса цієї точки дорівнює нулю, адже точка належить осі ординат. Отже, ордината *точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю ординат* дорівнює числу $f(0)$, тобто значенню функції для значення аргумента, яке дорівнює нулю.

Приклад 2. Знайти точки перетину графіка функції $h(x) = x^2 - 2x - 8$ з осями координат.

Розв'язання. Оскільки -2 і 4 – нулі функції $y = h(x)$, то її графік перетинає вісь абсцис у точках $(-2; 0)$ і $(4; 0)$.

Оскільки $h(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8$, то графік функції $y = h(x)$ перетинає вісь ординат у точці $(0; -8)$.

Нулі функції $y = f(x)$ (мал. 37) розбивають її область визначення – проміжок $[-4; 4]$ – на три проміжки: $[-4; -2)$, $(-2; 3)$ і $(3; 4]$. Для значень x з проміжку $(-2; 3)$ точки графіка лежать вище осі абсцис, а для значень x з проміжків $[-4; -2)$ і $(3; 4]$ – нижче осі абсцис. Отже, на проміжку $(-2; 3)$ функція набуває додатних значень, тобто $f(x) > 0$ при $x \in (-2; 3)$, а на кожному з проміжків $[-4; -2)$ і $(3; 4]$ – від’ємних значень, тобто $f(x) < 0$ при $x \in [-4; -2)$ або $x \in (3; 4]$.



Проміжок, на якому функція зберігає свій знак, називають проміжком знакосталості функції.

Проміжки $[-4; -2)$, $(-2; 3)$ і $(3; 4]$ є проміжками знакосталості функції $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 37.

Розглянемо, як змінюється (збільшується чи зменшується) значення даної функції зі зміною значення x від -4 до 4 .

За графіком бачимо, що зі збільшенням значень x від -4 до 2 значення y збільшується (графік «прямує» вгору), а зі збільшенням значень x від 2 до 4 значення y зменшується (графік «прямує» вниз). Кажуть, що на проміжку $[-4; 2]$ функція *зростає* (або є *зростаючою*), а на проміжку $[2; 4]$ функція *спадає* (або є *спадною*).

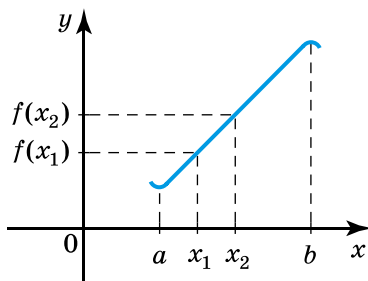


Функцію називають зростаючою на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Функцію називають спадною на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Отже, за означенням, функцію $y = f(x)$ називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2 із цього проміжку, таких, що $x_1 > x_2$, виконується нерівність: $f(x_1) > f(x_2)$.

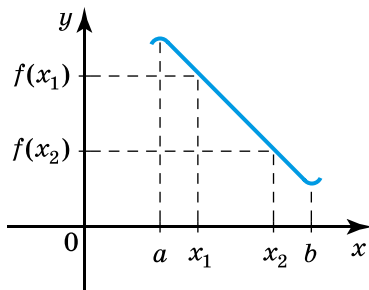
На малюнку 38 зображено графік функції $y = f(x)$, яка зростає на проміжку $[a; b]$. При цьому проміжок $[a; b]$ називають *проміжком зростання функції*.



Мал. 38

Так само, за означенням, функцію $y = f(x)$ називають спадною на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2 із цього проміжку, таких, що $x_1 > x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

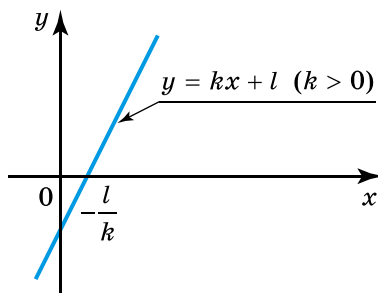
На малюнку 39 зображено графік функції $y = f(x)$, яка спадає на проміжку $[a; b]$. При цьому проміжок $[a; b]$ називають *проміжком спадання функції*.



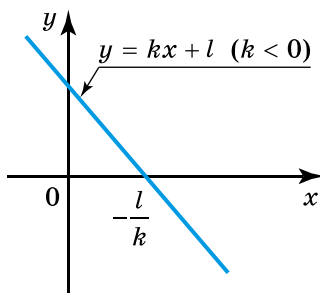
Мал. 39

З'ясуємо властивості деяких вивчених раніше функцій.

Приклад 3. Розглянемо властивості функції $y = kx + l$, де $k \neq 0$ та її графік (мал. 40 і 41).



Мал. 40



Мал. 41

1) Областю визначення і областю значень функції є множина всіх чисел.

2) Знайдемо нулі функції. Для цього розв'яжемо рівняння $kx + l = 0$, звідки $x = -\frac{l}{k}$ – єдиний нуль функції.

3) Знайдемо проміжки знакосталості функції.

Нехай $k > 0$. Розв'яжемо нерівність $kx + l > 0$, звідки $x > -\frac{l}{k}$. Отже, $y > 0$, коли $x > -\frac{l}{k}$.

Розв'яжемо нерівність $kx + l < 0$, звідки $x < -\frac{l}{k}$. Отже, $y < 0$, коли $x < -\frac{l}{k}$.

Нехай $k < 0$. Розв'яжемо нерівність $kx + l > 0$, звідки $x < -\frac{l}{k}$. Отже, $y > 0$, коли $x < -\frac{l}{k}$.

Розв'яжемо нерівність $kx + l < 0$, звідки $x > -\frac{l}{k}$. Отже, $y < 0$, коли $x > -\frac{l}{k}$.

4) Перевіримо функцію $f(x) = kx + l$ на зростання та спадання.

Нехай $k > 0$ і $x_2 > x_1$, тобто $x_2 - x_1 > 0$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + l) - (kx_1 + l) = k(x_2 - x_1) > 0$, адже $k > 0$ і $x_2 - x_1 > 0$.

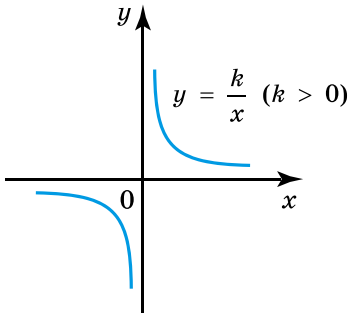
Отже, коли $k > 0$, функція $y = kx + l$ зростає на $(-\infty; +\infty)$.

Нехай $k < 0$ і $x_2 > x_1$, тобто $x_2 - x_1 > 0$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + l) - (kx_1 + l) = k(x_2 - x_1) < 0$, адже $k < 0$ і $x_2 - x_1 > 0$.

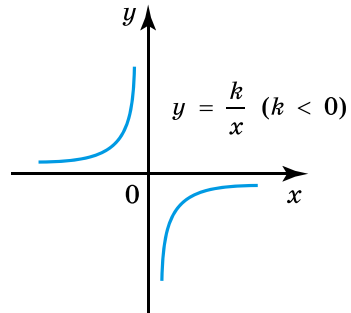
Отже, коли $k < 0$, функція $y = kx + l$ спадає на $(-\infty; +\infty)$.

5) Найбільшого і найменшого значень функція не має.

Приклад 4. Розглянемо властивості функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$ (мал. 42 і 43).



Мал. 42



Мал. 43

1) Областю визначення і областю значень функції є множина всіх чисел, крім нуля.

2) Оскільки рівняння $\frac{k}{x} = 0$, де $k \neq 0$, не має розв'язків, то функція $y = \frac{k}{x}$ нулів не має.

3) Нехай $k > 0$. Тоді $\frac{k}{x} > 0$, коли $x > 0$, і $\frac{k}{x} < 0$, коли $x < 0$.
Отже, $y > 0$, коли $x > 0$, і $y < 0$, коли $x < 0$.

Нехай $k < 0$. Тоді $\frac{k}{x} > 0$, коли $x < 0$, і $\frac{k}{x} < 0$, коли $x > 0$.
Отже, $y > 0$, коли $x < 0$, і $y < 0$, коли $x > 0$.

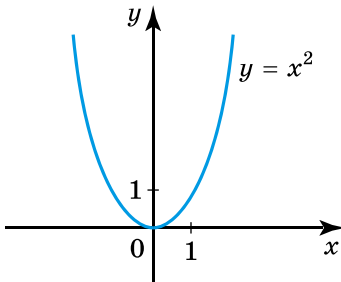
4) Якщо $k > 0$, то функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Якщо ж $k < 0$, то функція $y = \frac{k}{x}$ зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

5) Найбільшого і найменшого значень у функції не існує.

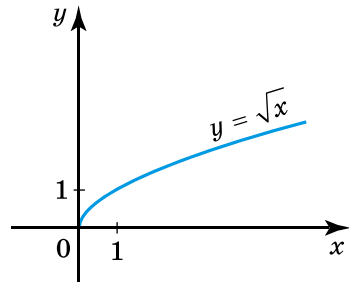
Приклад 5. Розглянемо властивості функції $y = x^2$ (мал. 44).

1) Область визначення функції – множина всіх чисел. Область значень – проміжок $[0; +\infty)$.

2) Рівняння $x^2 = 0$ має єдиний розв'язок: $x = 0$. Отже, число 0 – єдиний нуль функції.



Мал. 44



Мал. 45

3) $x^2 > 0$, коли $x \neq 0$, тобто $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$ або $x \in (0; +\infty)$. Зауважимо, що немає таких значень x , при яких $y < 0$, оскільки нерівність $x^2 < 0$ не має розв'язків.

4) Функція $y = x^2$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ і зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

5) Найменше значення функції дорівнює нулю, найбільшого – не існує.

Приклад 6. Розглянемо властивості функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 45).

1) Область визначення і область значень функції: $[0; +\infty)$.

2) Рівняння $\sqrt{x} = 0$ має єдиний розв'язок – число 0, яке є нулем функції.

3) $\sqrt{x} > 0$, коли $x > 0$, тобто $y > 0$, коли $x \in (0; +\infty)$. Немає таких значень x , щоб виконувалася нерівність $y < 0$, оскільки нерівність $\sqrt{x} < 0$ не має розв'язків.

4) Функція $y = \sqrt{x}$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

5) Найменше значення функції – число 0, найбільшого – не існує.

Систематизуємо властивості цих функцій у таблицю.

Властивості деяких елементарних функцій						
Функція	$y = kx + l$		$y = \frac{k}{x}$		$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$
	$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$		
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$		$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$		R	$[0; +\infty)$
Область значень	$(-\infty; +\infty)$		$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$		$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Нулі функції	$x = -\frac{l}{k}$		не існують		$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості, $y > 0$	$x > -\frac{l}{k}$	$x < -\frac{l}{k}$	$x > 0$	$x < 0$	$x < 0,$ $x > 0$	$x > 0$
Проміжки знакосталості, $y < 0$	$x < -\frac{l}{k}$	$x > -\frac{l}{k}$	$x < 0$	$x > 0$	-	-
Зростає на проміжку	R	-	-	$(-\infty; 0),$ $(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Спадає на проміжку	-	R	$(-\infty; 0),$ $(0; +\infty)$	-	$(-\infty; 0]$	-
Найбільше значення функції, y_{\max}	-		-		-	-
Найменше значення функції, y_{\min}	-		-		0	0



- Що називають нулями функції?
- Що називають проміжками знакосталості функції?
- Яку функцію називають зростаючою на проміжку, а яку – спадною?
- Використовуючи малюнок 37, поясніть, як за графіком функції знайти нулі функції, проміжки знакосталості та проміжки зростання і спадання функції.
- Сформулюйте властивості функцій $y = kx + l$ ($k \neq 0$), $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.



Початковий рівень

363. Знайдіть нулі функції:

1) $y = 2x$; 2) $y = 2 - 5x$; 3) $y = x(x - 2)$; 4) $y = \frac{x}{x + 1}$.

364. Знайдіть нулі функції:

1) $y = 3x$; 2) $y = 5x + 4$; 3) $y = x(x + 3)$; 4) $y = \frac{x - 1}{x}$.

365. (Усно). Зростаючою чи спадною на своїй області визначення є функція:

1) $y = 2x + 7$; 2) $y = -3x$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \frac{1}{3}x$?

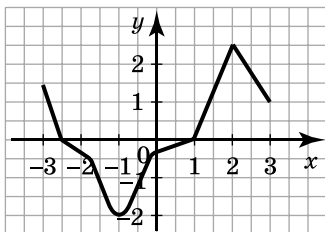
366. Зростаючою чи спадною на проміжку $(-\infty; +\infty)$ є функція:

1) $y = -2x - 5$; 2) $y = \frac{4}{5}x$;
 3) $y = -0,01x$; 4) $y = 5x + 13$?

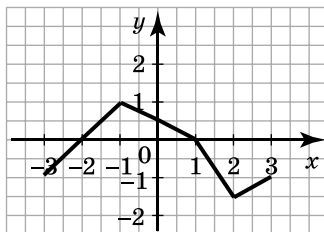


Середній рівень

367. Областю визначення функції $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 46, є проміжок $[-3; 3]$. За графіком знайдіть:



Мал. 46



Мал. 47

- 1) нулі функції;
- 2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і проміжки, на яких вона набуває від'ємних значень;
- 3) проміжки, на яких функція зростає, і проміжки, на яких вона спадає;
- 4) значення x , при якому функція набуває найбільшого значення, та найбільше значення функції; значення x , при якому функція набуває найменшого значення, та найменше значення функції.

368. Областю визначення функції $y = g(x)$, графік якої зображено на малюнку 47, є проміжок $[-3; 3]$. За графіком знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і проміжки, на яких вона набуває від'ємних значень;
- 3) проміжки, на яких функція зростає, і проміжки, на яких вона спадає;
- 4) значення x , при якому функція набуває найбільшого значення, та найбільше значення функції; значення x , при якому функція набуває найменшого значення, та найменше значення функції.

369. Знайдіть нулі функції (якщо вони існують):

- 1) $y = 5(x^2 + 1)$;
- 2) $y = \sqrt{x - 2}$;
- 3) $y = \sqrt{9 - x^2}$;
- 4) $y = \sqrt{x^2 + 5}$.

370. Знайдіть нулі функції (якщо вони існують):

- 1) $y = 4(x^2 + 9)$;
- 2) $y = \sqrt{3 + x}$;
- 3) $y = \sqrt{x^2 - 1}$;
- 4) $y = \sqrt{x^2 + 4}$.

371. Накресліть схематично графік функції $y = g(x)$, область визначення якої є проміжок $[-3; 5]$, так, щоб:

- 1) нулем функції було число 2;
- 2) нулями функції були числа -1 і 4 ;
- 3) функція зростала на проміжку $[-3; 2]$ і спадала на проміжку $[2; 5]$.

372. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

- 1) $y = 2x - 4$;
- 2) $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

373. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

- 1) $y = -3x + 6$;
- 2) $y = \frac{1}{3}x - 1$.



Достатній рівень

374. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину з осями координат графіка функції:

- 1) $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$;
- 2) $y = \sqrt{x + 2}$;
- 3) $y = \frac{|x| - 1}{x + 1}$;
- 4) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x}$.

375. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину з осями координат графіка функції:

$$1) y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1}; \quad 2) y = \sqrt{x + 9};$$

$$3) y = \frac{|x| - 2}{x - 2}; \quad 4) y = \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x}.$$

376. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

$$1) y = \frac{6}{x}; \quad 2) y = -\frac{8}{x}.$$

377. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

$$1) y = \frac{4}{x}; \quad 2) y = -\frac{10}{x}.$$



4 ВИСОКИЙ РІВЕНЬ

378. Скільки нулів має функція:

$$1) f(x) = x(x^2 - 1)\sqrt{|x| + 2}; \quad 2) g(x) = (x^2 - 4)\sqrt{|x| - 3}?$$

379. Скільки нулів має функція:

$$1) f(x) = x(x^2 - 9)\sqrt{|x| - 4}; \quad 2) g(x) = (x^2 - 9)\sqrt{|x| + 2}?$$

380. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 2x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } x > 2; \end{cases}$$

$$2) g(x) = x + |x|.$$

381. Побудуйте графік функції та сформулюйте її властивості:

$$1) g(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ -1,5x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x > 2; \end{cases}$$

$$2) f(x) = x - |x|.$$



Вправи для повторення

2 382. Порівняйте числа:

1) $2\sqrt{3}$ і $\sqrt{13}$; 2) $3\sqrt{2}$ і $2\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{7}$ і 8.

3 383. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{2-x}{10} + \frac{3-x}{5} < \frac{5x-3}{4}$; 2) $3 < \frac{1-2x}{3} \leq 7$.

384. Із Херсона до Житомира виїхали одночасно дві автівки. Одна з них рухалася зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж друга, а тому прибула в Житомир на 1 год раніше. Знайдіть швидкість кожної автівки, якщо відстань між містами 560 км.

4 385. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 5x + c = 0$ задовольняють умову $3x_1 = 2x_2$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт c .



Життєва математика

386. На рахунку мобільного телефона Богдана було 42 грн, а після розмови з Оленкою залишилося 38 грн 50 коп. Скільки хвилин тривала розмова, якщо вартість однієї хвилини розмови складає 25 коп.?



Розв'яжіть і підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 387.** 1) Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 2x$, $y = 2x - 3$ і $y = 2x + 4$.
- 2) Чи паралельні ці графіки?
- 3) Як з графіка функції $y = 2x$ отримати графік функції $y = 2x - 3$?
- 4) Як з графіка функції $y = 2x$ отримати графік функції $y = 2x + 4$?



Цікаві задачі для учнів неледачих



388. Порівняйте дроби $\frac{222}{333}$ і $\frac{221}{332}$ і $\frac{444}{666}$ і $\frac{443}{663}$.

§10. НАЙПРОСТІШІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Раніше ви будували лише графіки функцій вигляду $y = kx + l$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ і $y = |x|$.

Розглянемо деякі перетворення графіка функції $y = f(x)$, що значно збільшить перелік функцій, графіки яких ми зможемо будувати.

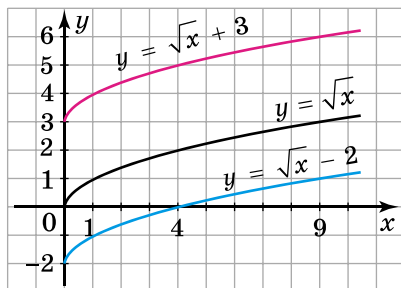
1. Побудова графіка функції $y = f(x) \pm n$, де $n > 0$.

Приклад 1. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} - 2$ та $y = \sqrt{x} + 3$.

Розв'язання. Спочатку складемо таблицю значень кожної з даних функцій для кількох значень аргументу:

$y \backslash x$	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$y = \sqrt{x} - 2$	-2	-1	0	1	2
$y = \sqrt{x} + 3$	3	4	5	6	7

З таблиці зрозуміло, що для одного й того самого значення x значення функції $y = \sqrt{x} - 2$ на 2 менше, а значення функції $y = \sqrt{x} + 3$ на 3 більше за відповідне значення функції $y = \sqrt{x}$. Тому графік функції $y = \sqrt{x} - 2$ можна побудувати шляхом перенесення кожної точки графіка функції $y = \sqrt{x}$ вздовж осі y на 2 одиниці вниз, а графік функції $y = \sqrt{x} + 3$ — шляхом перенесення кожної точки графіка функції $y = \sqrt{x}$ вздовж осі y на 3 одиниці вгору (мал. 48).



Мал. 48

Отже,



для побудови графіка функції $y = f(x) + n$, де $n > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі y на n одиниць угору;

для побудови графіка функції $y = f(x) - n$, де $n > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі y на n одиниць вниз.

Зауваження. Замість перенесення графіка функції вгору (униз), можна перенести вісь x на ту саму відстань в протилежному напрямку.

2. Побудова графіка функції $y = f(x \pm t)$, де $t > 0$.

Приклад 2. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ і $y = (x - 2)^2$.

Розв'язання. Спочатку складемо таблицю значень кожної з даних функцій для кількох значень аргументу:

$y \backslash x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9	16
$y = (x - 2)^2$	25	16	9	4	1	0	1	4

Для кожного $x = x_0$ значення функції $y = (x - 2)^2$ дорівнює значенню функції $y = x^2$ для $x = x_0 - 2$. У таблиці цю відповідність показано стрілками для значень функцій $y = (x - 2)^2$ при $x = -1; 0; 1; 2; 3; 4$ та $y = x^2$ відповідно при $x = -3; -2; -1; 0; 1; 2$.

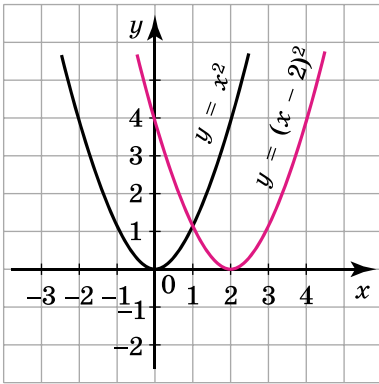
Отже, якщо всі точки графіка функції $y = x^2$ перенести вздовж осі x на 2 одиниці вправо, то отримаємо графік функції $y = (x - 2)^2$ (мал. 49).

Приклад 3. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ і $y = (x + 1)^2$.

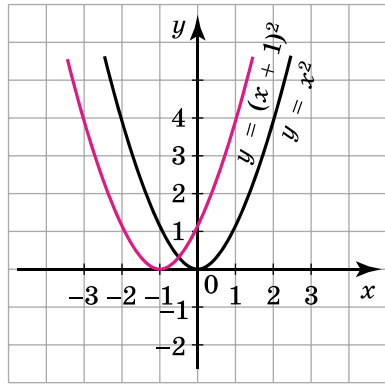
Розв'язання. Спочатку складемо таблицю значень кожної з даних функцій для кількох значень аргументу:

$y \backslash x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = (x + 1)^2$	4	1	0	1	4	9	16

Міркуючи, як у прикладі 2, дійдемо висновку, що графік функції $y = (x + 1)^2$ можна отримати, перенісши графік функції $y = x^2$ вздовж осі x на 1 одиницю вліво (мал. 50).



Мал. 49



Мал. 50

Отже,



для побудови графіка функції $y = f(x - t)$, де $t > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі x на t одиниць вправо;
 для побудови графіка функції $y = f(x + t)$, де $t > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі x на t одиниць вліво.

Зауваження. Замість перенесення графіка функції вліво (вправо) можна перенести вісь y на ту саму відстань у протилежному напрямку.

3. Побудова графіка функції $y = -f(x)$.

Приклад 4. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = -\sqrt{x}$.

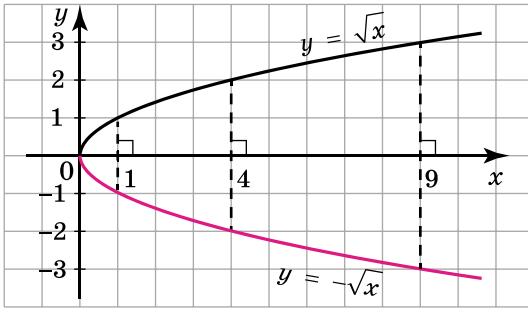
Розв'язання. Складемо таблицю значень даних функцій для кількох значень аргументу:

$y \backslash x$	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$y = -\sqrt{x}$	0	-1	-2	-3	-4

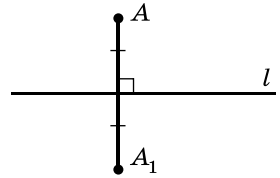
З таблиці бачимо, що значення функції $y = -\sqrt{x}$ для одних і тих самих значень x протилежні відповідним значенням функції $y = \sqrt{x}$. Графіки цих функцій зображено на малюнку 51.

Якщо провести відрізки, що сполучають точки графіків функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = -\sqrt{x}$ для одного і того самого значення x

(на мал. 51 їх показано пунктиром для $x = 1$, $x = 4$ і $x = 9$), то вісь x для цих відрізків буде серединним перпендикуляром. У такому випадку кажуть, що графіки *симетричні* відносно осі x .



Мал. 51



Мал. 52

Точки A і A_1 називають *симетричними* відносно прямої l , якщо пряма l є серединним перпендикуляром до відрізка AA_1 (мал. 52).

Отже,



графіки функцій $y = -f(x)$ і $y = f(x)$ симетричні відносно осі x .

4. Побудова графіка функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$.

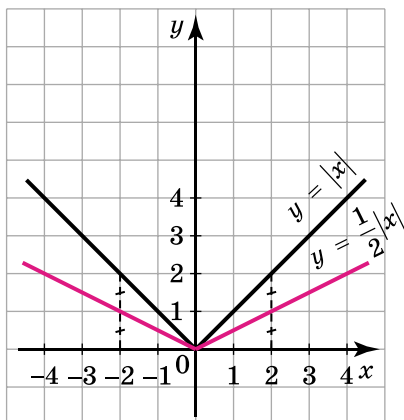
Приклад 5. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = |x|$, $y = \frac{1}{2}|x|$ і $y = 2|x|$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень кожної з даних функцій для кількох значень аргументу:

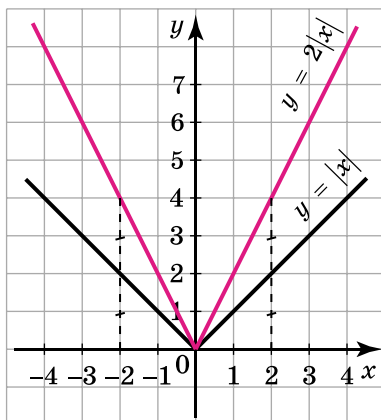
$y \backslash x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x $	3	2	1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2} x $	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$y = 2 x $	6	4	2	0	2	4	6

Для будь-якого значення x значення функції $y = \frac{1}{2}|x|$ удвічі менше від відповідного значення функції $y = |x|$, а значення

функції $y = 2|x|$ удвічі більше за відповідне значення функції $y = |x|$. Тому графік функції $y = \frac{1}{2}|x|$ можна отримати, стиснувши графік функції $y = |x|$ у 2 рази до осі x (мал. 53), а графік функції $y = 2|x|$ – розтягнувши графік функції $y = |x|$ у 2 рази від осі x (мал. 54).



Мал. 53



Мал. 54

Отже,



для побудови графіка функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$, достатньо графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його до осі x у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$.

Виконуючи послідовно два і більше перетворень, можна будувати графіки функцій $y = f(x + m) + n$, $y = -kf(x)$, де $k > 0$, та інших.

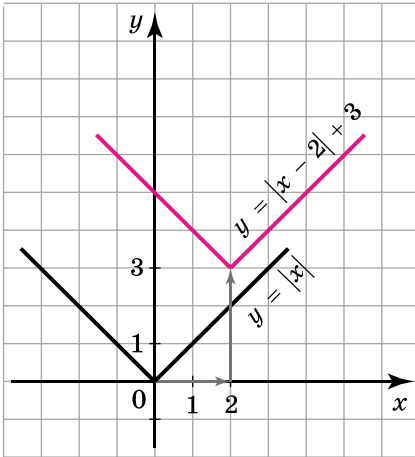
Приклад 6. Побудувати графік функції $y = |x - 2| + 3$.

Розв'язання. Графік функції $y = |x - 2| + 3$ можна отримати, перенісши графік функції $y = |x|$ уздовж осі x на 2 одиниці вправо, а потім уздовж осі y на 3 одиниці вгору. Графік зображено на малюнку 55.

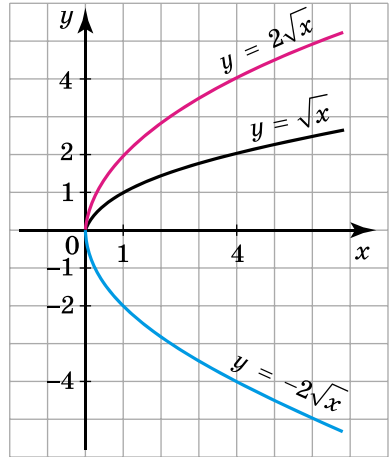
Приклад 7. Побудувати графік функції $y = -2\sqrt{x}$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$. Далі, розтягнувши його у 2 рази від осі x , отримаємо графік функ-

ції $y = 2\sqrt{x}$. Графік функції $y = -2\sqrt{x}$ є симетричним графіку функції $y = 2\sqrt{x}$ відносно осі x . Побудову зображено на малюнку 56.



Мал. 55



Мал. 56



5. Побудова графіка функції $y = |f(x)|$.

За означенням модуля числа маємо:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

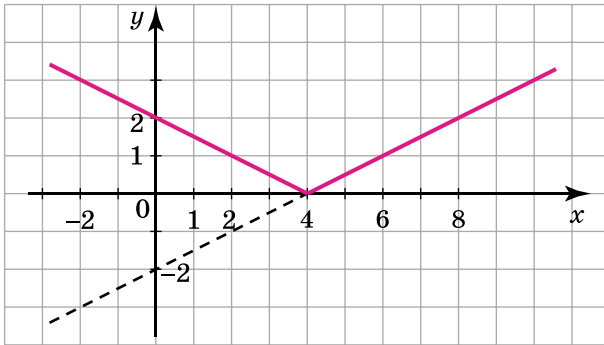
Отже, для тих значень x , при яких $f(x) \geq 0$, відповідні значення функцій $y = f(x)$ і $y = |f(x)|$ між собою рівні, а тому для таких значень x графіки цих функцій збігаються. Для тих значень x , при яких $f(x) < 0$, відповідні значення функцій $y = f(x)$ і $y = |f(x)|$ є протилежними числами, тому для таких значень x графіки цих функцій є симетричними відносно осі x .



Для побудови графіка функції $y = |f(x)|$ достатньо побудувати графік функції $y = f(x)$ і ту його частину, яка лежить нижче осі x , симетрично відобразити відносно цієї осі.

Приклад 8. Побудувати графік функції $y = |0,5x - 2|$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = 0,5x - 2$. Далі ту частину графіка, яка лежить нижче осі x , симетрично відображаємо відносно цієї осі. Графік зображено на малюнку 57.



Мал. 57



Як, користуючись графіком функції $y = f(x)$, побудувати графіки функцій $y = f(x) \pm n$, де $n > 0$; $y = f(x \pm m)$, де $m > 0$; $y = -f(x)$; $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$?



Початковий рівень

389. (Усно). Які перетворення графіка функції $y = x^2$ треба виконати, щоб отримати графік функції:

- 1) $y = x^2 + 2$; 2) $y = x^2 - 3$; 3) $y = (x - 2)^2$;
4) $y = (x + 1)^2$; 5) $y = -x^2$; 6) $y = 2x^2$?



Середній рівень

390. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

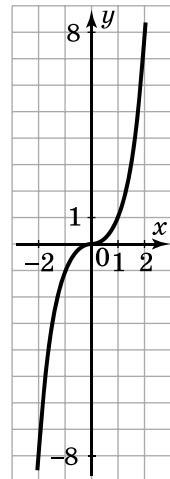
- 1) $y = -x$, $y = -x + 3$ і $y = -x - 2$;
2) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x - 2}$ і $y = \sqrt{x + 3}$.

391. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

- 1) $y = x$, $y = x + 2$ і $y = x - 3$;
2) $y = |x|$, $y = |x - 1|$ і $y = |x + 3|$.

392. На малюнку 58 зображено графік функції $y = x^3$. Перенесіть його в зошит і в тій самій системі координат побудуйте олівцями різного кольору графіки функцій:

- 1) $y = x^3 + 1$; 2) $y = x^3 - 2$;
3) $y = (x - 3)^3$; 4) $y = (x + 2)^3$.



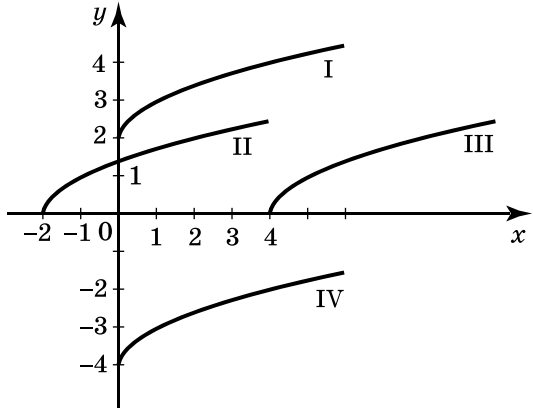
Мал. 58

393. На малюнку 58 зображено графік функції $y = x^3$. Перенесіть його в зошит і в тій самій системі координат побудуйте олівцями різного кольору графіки функцій:

- 1) $y = x^3 + 3$; 2) $y = x^3 - 1$;
 3) $y = (x - 2)^3$; 4) $y = (x + 1)^3$.

394. (Усно). Який із графіків на малюнку 59 відповідає функції:

- 1) $y = \sqrt{x - 4}$;
 2) $y = \sqrt{x + 2}$;
 3) $y = \sqrt{x} - 4$;
 4) $y = \sqrt{x} + 2$?



Мал. 59



Достатній рівень

395. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = (x - 1)^2 + 3$; 2) $y = 4 - x^2$;
 3) $y = (x + 2)^2 - 5$; 4) $y = (x + 3)^2 + 1$;
 5) $y = -3 + (x - 2)^2$; 6) $y = -x^2 - 1$.

396. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt{x - 2} + 1$; 2) $y = 2 - \sqrt{x}$;
 3) $y = -2 + \sqrt{x + 1}$; 4) $y = \sqrt{x + 4} + 2$;
 5) $y = \sqrt{x - 1} - 3$; 6) $y = -\sqrt{x} - 1$.

397. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 3|x|$; 2) $y = -4|x|$;
 3) $y = \frac{1}{3}|x|$; 4) $y = -0,5|x|$.

398. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 3x^2$; 2) $y = -2x^2$; 3) $y = 0,25x^2$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

399. (Усно). Який із графіків на малюнку 60 відповідає функції:

1) $y = -2x^2$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$;

3) $y = -\frac{1}{2}x^2$; 4) $y = 2x^2$?

400. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{6}{x} - 1$; 2) $y = \frac{6}{x - 1}$.

401. Побудуйте графік функції:

1) $y = 1 + \frac{8}{x}$; 2) $y = \frac{8}{x + 1}$.

402. Дано параболу $y = x^2$. Напишіть рівняння параболи, яку можна отримати з даної перенесенням:

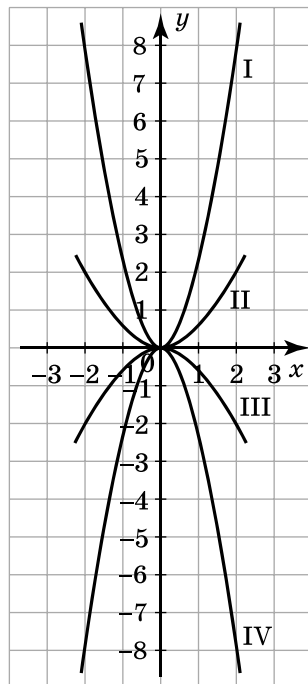
- 1) на 3 одиниці вгору;
- 2) на 4 одиниці вниз;
- 3) на 2 одиниці вліво;
- 4) на 5 одиниць вправо;
- 5) на 2 одиниці вправо і на 3 одиниці вгору;
- 6) на 1 одиницю вліво і на 4 одиниці вгору;
- 7) на 3 одиниці вправо і на 1 одиницю вниз;
- 8) на 5 одиниць вліво і на 5 одиниць униз.

403. Побудуйте графік функції $y = (x + 1)^2 - 4$. За графіком знайдіть:

- 1) нулі функції; 2) область значень функції;
- 3) значення x , при яких функція набуває від'ємних значень;
- 4) проміжок зростання функції.

404. Побудуйте графік функції $y = (x - 2)^2 - 1$. За графіком знайдіть:

- 1) нулі функції; 2) область значень функції;
- 3) значення x , при яких функція набуває додатних значень;
- 4) проміжок спадання функції.



Мал. 60

4 Високий рівень

405. Розв'яжіть графічно рівняння:


1) $1 + \frac{5}{x} = \sqrt{x - 1}$; 2) $|x - 1| = (x + 1)^2$.

406. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) \sqrt{x+1} = \frac{9}{x} - 1; \quad \text{2) } (x-2)^2 = |x+4|.$$

407. Побудуйте графік функції $y = \frac{x+4}{x-2}$.


408. Побудуйте графік функції $y = \frac{x+5}{x+1}$.

 409. 1) Побудуйте графік функції $y = |x^2 - 4|$.

2) Використовуючи графік, знайдіть усі значення a , при яких рівняння $|x^2 - 4| = a$ має рівно три корені.




Вправи для повторення


 410. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 3x - 4$; 2) $2x^2 - x - 10$;

3) $-x^2 - 2x + 8$; 4) $-3x^2 + x + 2$.

 411. Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} (x+4)(x-4) - (x-3)(x+1) < -3, \\ \frac{2x-5}{9} \geq -1. \end{cases}$$

 412. x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 - 6x + 3 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$.



Життєва математика

413. Автомобіль, рухаючись на момент початку відліку часу зі швидкістю $v_0 = 28$ м/с, почав гальмувати з постійним прискоренням $a = 7$ м/с². Через t секунд після початку гальмування він подолав відстань $s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Визначте час, за який від початку гальмування автомобіль подолав 42 м.



Розв'яжіть і підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

414. Виділіть квадрат двочлена із квадратного тричлена:

1) $x^2 - 4x + 3$; 2) $x^2 + 2x$;

3) $-x^2 - 2x - 1$; 4) $x^2 + 6x - 2$.

415. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 2x = 0$; 2) $4x^2 - 36 = 0$;
 3) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; 4) $3x^2 + 2x - 5 = 0$.

416. Для функції $f(x) = x^2 + 4x - 5$ знайдіть:

- 1) $f(-2)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(0)$; 4) $f(1)$.

417. Закінчіть речення:

- 1) «Графіком функції $y = x^2$ є...».
 2) «Гілки параболи $y = x^2$ напрямлені...».
 3) «Функція $y = x^2$ спадає на проміжку...».
 4) «Функція $y = x^2$ зростає на проміжку...».



Цікаві задачі для учнів неледачих



418. Відомо, що $x - \frac{1}{x} = 1$. Знайдіть значення виразу:

- 1) $x^3 - \frac{1}{x^3}$; 2) $x^4 + \frac{1}{x^4}$.



11. ФУНКЦІЯ $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

Однією з найважливіших функцій у курсі математики є *квадратична функція*.



Функцію вигляду $y = ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a , b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають *квадратичною функцією*.

Математичні моделі багатьох реальних процесів у різноманітних сферах діяльності людини є квадратичними функціями. Насамперед це стосується науки, зокрема фізики та економіки, а також техніки.

Задача 1. Тіло рухається з прискоренням a м/с² і до початку відліку часу t с пройшло шлях s_0 м, маючи в цей момент швидкість v_0 м/с. Тоді залежність відстані s (у метрах), яку пододало тіло, від часу t (у секундах) при рівноприскореному русі задають формулою:

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0t + s_0.$$

Наприклад, якщо $a = 6$, $v_0 = 2$, $s_0 = 10$, то $s = 3t^2 + 2t + 10$.

Задача 2. Залежність між площею використаних земель і валовим прибутком з розрахунку на 10 га сільськогосподарських угідь у деякому фермерському господарстві задається функцією $y \approx -1,5x^2 + 9x + 9$, де x – площа сільськогосподарських угідь (у га), y – валовий прибуток (у тис. грн) на 10 га сільськогосподарських угідь. З якої площі господарство матиме найбільший валовий прибуток на 10 га сільськогосподарських угідь? Яким буде цей прибуток?

Розв'язання.

У формулі функції виділимо повний квадрат:

$$\begin{aligned} -1,5x^2 + 9x + 9 &= -1,5(x^2 - 6x - 6) = -1,5(x^2 - 6x + 9 - 9 - 6) = \\ &= -1,5((x - 3)^2 - 15) = 22,5 - 1,5(x - 3)^2, \end{aligned}$$

тому $y \approx 22,5 - 1,5(x - 3)^2$.

Вираз, який ми отримали, набуватиме найбільшого значення при $x = 3$. Отже, господарство матиме найбільший прибуток з площі розміром 3 га.

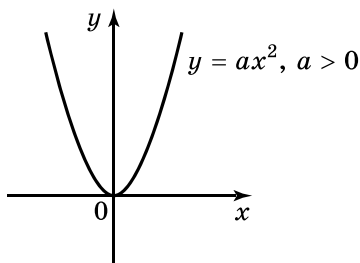
Цей прибуток є значенням функції $y = 22,5 - 1,5(x - 3)^2$ для $x = 3$, тобто $y = y(3) = 22,5 - 1,5(3 - 3)^2 = 22,5$ (тис. грн). Отже, найбільший прибуток складе 22,5 тис. грн.

Відповідь. 3 га; 22,5 тис. грн.

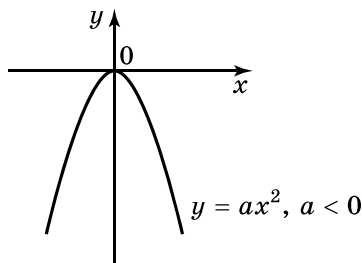
Розглянемо графік і властивості квадратичної функції. Почнемо з її часткового випадку.

Нехай у формулі квадратичної функції $b = c = 0$, тоді маємо функцію $y = ax^2$.

Графіком функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$, є парабола з вершиною в початку координат, гілки якої напрямлені вгору, якщо $a > 0$ (мал. 61), і вниз, якщо $a < 0$ (мал. 62). Значення $y = 0$ є для функції $y = ax^2$ найменшим, якщо $a > 0$, та найбільшим, якщо $a < 0$.



Мал. 61



Мал. 62

Систематизуємо властивості у вигляді таблиці.

Властивості функції $y = ax^2, a \neq 0$		
	$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Графік	парабола з вершиною $(0; 0)$	
Напрямок гілок	угору	униз
Нулі функції	$x = 0$	
Проміжки знакосталості, $y > 0$	$(-\infty; 0),$ $(0; +\infty)$	–
Проміжки знакосталості, $y < 0$	–	$(-\infty; 0),$ $(0; +\infty)$
Зростає на проміжку	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Спадає на проміжку	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$
Найбільше значення функції	–	0
Найменше значення функції	0	–

Тепер розглянемо квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$. Виділимо у тричлені $ax^2 + bx + c$ квадрат двочлена:

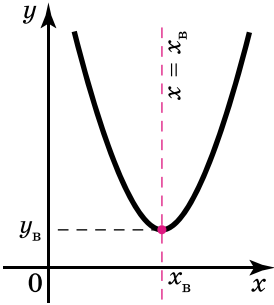
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$$\text{Позначимо } x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}; y_{\text{в}} = \frac{4ac - b^2}{4a}. \text{ Тоді } y = a(x - x_{\text{в}})^2 + y_{\text{в}}.$$

Отже, графік функції $y = ax^2 + bx + c$ можна отримати з графіка функції $y = ax^2$ за допомогою двох перетворень – перенесень уздовж координатних осей.

Графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола з вершиною в точці $(x_B; y_B)$, де $x_B = -\frac{b}{2a}$; $y_B = \frac{4ac - b^2}{4a}$ (мал. 63).



Мал. 63

Якщо $a > 0$, гілки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$ – униз. Гілки параболи симетричні відносно прямої $x = x_B$. У цьому випадку кажуть, що пряма $x = x_B$ є *віссю симетрії* параболи (мал. 63).

Зауважимо, що абсцису x_B вершини параболи зручно знаходити за формулою

$x_B = -\frac{b}{2a}$, а ординату y_B – підставивши

знайдене значення абсциси у формулу $y = ax^2 + bx + c$, тобто $y_B = y(x_B)$.

Будуючи графік функції $f(x) = ax^2 + bx + c$, слід дотримуватися такої послідовності дій:



- 1) знайти координати вершини параболи $x_B = -\frac{b}{2a}$, $y_B = f(x_B)$ і позначити її на координатній площині;
- 2) побудувати ще кілька точок параболи і стільки ж точок, симетричних їм відносно прямої $x = x_B$;
- 3) сполучити отримані точки плавною лінією.

Систематизуємо властивості у вигляді таблиці.

Властивості функції $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$		
	$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	
Область значень	$[y_B; +\infty)$	$(-\infty; y_B]$
Графік	парабола з вершиною $(x_B; y_B)$	
Напрямок гілок	угору	униз
Нулі функції	корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	
Зростає на проміжку	$[x_B; +\infty)$	$(-\infty; x_B]$
Спадає на проміжку	$(-\infty; x_B]$	$[x_B; +\infty)$
Найбільше значення функції	–	y_B
Найменше значення функції	y_B	–

Приклад 1. Побудувати графік функції $f(x) = x^2 - 4x - 5$ та описати її властивості.

Розв'язання. Графіком функції є парабола, гілки якої напрямлені вгору. Знайдемо координати її вершини:

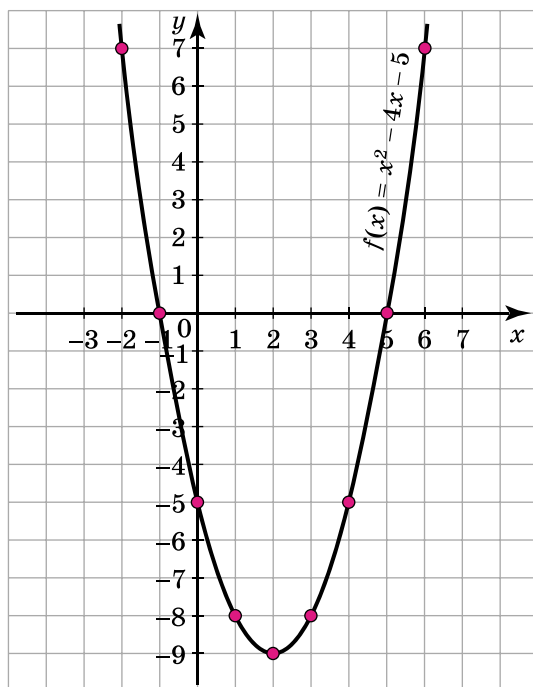
$$x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2, \quad y_{\text{в}} = f(x_{\text{в}}) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9.$$

Отже, точка $(2; -9)$ – вершина параболи, позначимо її на координатній площині. Тоді пряма $x = 2$ є віссю симетрії параболи.

Складемо таблицю значень функції для кількох точок параболи, симетричних відносно її осі симетрії (завдяки симетрії графіка ординати в кожній парі симетричних точок будуть однаковими).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7

Позначимо вершини параболи та точки з таблиці на координатній площині. Сполучимо їх плавною лінією і отримуємо графік функції $f(x) = x^2 - 4x - 5$ (мал. 64).



Мал. 64

Опишемо властивості цієї функції:

- 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- 2) $E(f) = [-9; +\infty)$;
- 3) нулі функції: $x = -1$ і $x = 5$;
- 4) $y > 0$, якщо $x < -1$ або $x > 5$; $y < 0$, якщо $-1 < x < 5$;
- 5) функція зростає на проміжку $[2; +\infty)$, спадає на проміжку $(-\infty; 2]$;
- 6) найменше значення функції: $y_{\min} = -9$.

Приклад 2. Вершиною параболи $y = ax^2 + 8x + c$ є точка $A(-2; 4)$. Знайти a і c .

Розв'язання. Оскільки $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$, а за умовою $x_{\text{в}} = -2$, то $-2 = -\frac{8}{2a}$, звідки $a = 2$. Оскільки графік функції проходить через точку $A(-2; 4)$, то, підставивши координати точки у формулу функції, одержимо правильну рівність:

$$4 = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + c, \text{ звідки } c = 12.$$

Відповідь. $a = 2$; $c = 12$.



1. Яку функцію називають квадратичною?
2. Сформулюйте властивості функції $y = ax^2$.
3. Що є графіком квадратичної функції? Як його будують?
4. Сформулюйте властивості функції $y = ax^2 + bx + c$.



Початковий рівень

419. (Усно). Яка з функцій є квадратичною:

- 1) $y = -2x^2$;
- 2) $y = -2x + 5$;
- 3) $y = 5x^2 - 3x$;
- 4) $y = \frac{1}{3x^2 - 2x + 5}$;
- 5) $y = 3x^3 - 2x^2 + 5$;
- 6) $y = 2x^2 + 3x - 9$?

420. Випишіть функції, що є квадратичними:

- 1) $y = 4x - 7$;
- 2) $y = 4x^2 - 7x + 5$;
- 3) $y = 3x^2$;
- 4) $y = 2x^3 - 3x + 5$;
- 5) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{7}$;
- 6) $y = 9x^2 - 7$.

421. Графіком якої з наведених функцій є парабола? Укажіть напрям її гілок.

- 1) $y = \frac{6}{x}$;
- 2) $y = 6x^2 - 7$;
- 3) $y = 6x - 7$;
- 4) $y = -6x^2 + 5x + 5$;
- 5) $y = 0,01x^2$;
- 6) $y = -0,2x^2 - 5x$.

422. Чи належить графіку функції $y = x^2 - 3x$ точка:
 1) $A(0; 0)$; 2) $B(1; 2)$; 3) $C(2; -3)$; 4) $D(-1; 4)$?

423. Чи належить графіку функції $y = x^2 + x$ точка:
 1) $A(0; 1)$; 2) $B(2; 6)$; 3) $C(1; 2)$; 4) $D(-1; 1)$?

424. Покажіть схематично, як розташовується в координатній площині графік функції:
 1) $y = 10x^2$; 2) $y = -15x^2$.

425. Покажіть схематично, як розташовується в координатній площині графік функції:
 1) $y = -7x^2$; 2) $y = 5x^2$.



Середній рівень

426. Дано функцію $f(x) = \frac{1}{5}x^2$. 1) Заповніть у зошиті таблицю:

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
$f(x)$						

- 2) побудуйте графік функції;
- 3) знайдіть за графіком $f(-1,5)$, $f(2,5)$, $f(4,5)$;
- 4) знайдіть за графіком такі значення x , що $f(x) = 1$, $f(x) = 3,5$;
- 5) знайдіть проміжок зростання і проміжок спадання функції.

427. Дано функцію $g(x) = \frac{1}{4}x^2$. 1) Заповніть у зошиті таблицю:

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$g(x)$					

- 2) побудуйте графік функції;
- 3) знайдіть за графіком $g(-2,5)$, $g(1,5)$, $g(3,5)$;
- 4) знайдіть за графіком такі значення x , що $g(x) = 1$, $g(x) = 2,5$;
- 5) знайдіть проміжок зростання і проміжок спадання функції.

428. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = -2x^2$ з прямою:

- 1) $y = -8$; 2) $y = 10$; 3) $y = 4x$; 4) $y = -6x$.

429. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = 5x^2$ з прямою:

- 1) $y = 20$; 2) $y = -5$; 3) $y = 10x$; 4) $y = -5x$.

430. Визначте напрям гілок, знайдіть координати вершини та побудуйте схематично графік квадратичної функції:

- 1) $y = x^2 - 8x + 7$; 2) $y = -x^2 + 2x - 3$;
 3) $y = 0,2x^2 - 0,4x + 2$; 4) $y = -2x^2 + 6x - 3$.

431. Визначте напрям гілок, знайдіть координати вершини та побудуйте схематично графік квадратичної функції:

- 1) $y = 3x^2 - 12x + 7$; 2) $y = -2x^2 + 8x - 3$.

432. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка квадратичної функції з осями координат:

- 1) $y = x^2 - 7x + 10$; 2) $y = 2x^2 - x - 3$;
 3) $y = -x^2 + 8x + 9$; 4) $y = -3x^2 - 5x + 2$.

433. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка квадратичної функції з осями координат:

- 1) $y = x^2 + 4x - 5$; 2) $y = -5x^2 - 6x - 1$.

434. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = -x^2 + 6x$;
 3) $y = x^2 + 4x + 5$; 4) $y = -x^2 + 2x + 3$.

435. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 + 4x$; 2) $y = -x^2 + 2x$;
 3) $y = x^2 + 2x + 3$; 4) $y = -x^2 + 4x - 3$.

3

Достатній рівень

436. Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 + 2x - 3$. За графіком знайдіть:

- 1) $f(1)$, $f(-2,5)$, $f(1,5)$;
- 2) значення x , при яких $f(x) = 5$, $f(x) = -4$, $f(x) = -2$;
- 3) нулі функції;
- 4) розв'язки нерівностей: $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$;
- 5) найбільше та найменше значення функції;
- 6) область значень функції;
- 7) проміжки зростання та проміжки спадання функції.

437. Побудуйте графік функції $g(x) = -x^2 + 6x - 5$. За графіком знайдіть:

- 1) $g(1)$, $g(2,5)$, $g(4,5)$;
- 2) значення x , при яких $g(x) = 4$, $g(x) = -5$, $g(x) = 2$;
- 3) нулі функції;
- 4) розв'язки нерівностей: $g(x) > 0$, $g(x) \leq 0$;
- 5) найбільше та найменше значення функції;
- 6) область значень функції;
- 7) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

438. Графіком квадратичної функції є парабола з вершиною в початку координат, яка проходить через точку $A\left(-2; \frac{1}{3}\right)$.
Задайте цю функцію формулою.
439. Побудуйте графік квадратичної функції та за графіком знайдіть область значень функції, нулі функції, проміжки знакосталості та проміжки зростання і спадання функції:
1) $y = -4x^2 + 8x$; 2) $y = 2x^2 - 8x + 6$;
3) $y = (x - 1)(x - 5)$; 4) $y = 2(x + 1)(x - 3)$.
440. Побудуйте графік квадратичної функції та за графіком знайдіть область значень функції, нулі функції, проміжки знакосталості та проміжки зростання і спадання функції:
1) $y = 2x^2 - 6x$; 2) $y = -3x^2 + 12x - 9$.
441. Графік функції $y = ax^2 + 2x + 3$ проходить через точку $B(1; -5)$. Знайдіть коефіцієнт a .
442. Графік функції $y = 2x^2 + bx + 5$ проходить через точку $A(1; 9)$. Знайдіть коефіцієнт b .
443. При яких значеннях b віссю симетрії параболи $y = x^2 + bx + c$ є пряма: 1) $x = -1$; 2) $x = 5$?
Чи впливає на відповідь значення коефіцієнта c ?
444. При якому значенні a віссю симетрії параболи $y = ax^2 - 6x + 7$ є пряма $x = -1$?
445. Знайдіть такі точки параболи:
1) $y = x^2 - 6x + 10$, у яких абсциса дорівнює ординаті;
2) $y = x^2 - 7x + 8$, у яких абсциса й ордината – протилежні числа.
446. Знайдіть такі точки параболи:
1) $y = x^2 - 5x$, у яких абсциса дорівнює ординаті;
2) $y = x^2 + 2x - 10$, у яких абсциса й ордината – протилежні числа.
447. Доведіть, що всі точки параболи:
1) $y = x^2 - 2x + 3$ лежать вище осі x ;
2) $y = -x^2 - 4x - 5$ лежать нижче осі x .
448. Знайдіть точки перетину параболи $y = 2x^2 - 7x + 13$ з прямою $y = 2x + 3$.
449. Знайдіть точки перетину параболи $y = 5x^2 - 7x - 3$ з прямою $y = -x - 4$.

450. Тіло, що падає на землю, за t с долає відстань s м, де $s = \frac{gt^2}{2}$, $g \approx 10$ м/с². Через який час тіло досягне верхні землі, якщо в початковий момент воно знаходиться на висоті 560 м?



4 Високий рівень

451. З лука випущено стрілу вертикально вгору з початковою швидкістю 50 м/с. Залежність відстані s (у метрах) від стріли до землі від часу польоту t (у секундах) задається формулою $s = 50t - 5t^2$. Побудуйте схематично графік цієї залежності та знайдіть за ним:
- 1) якої найбільшої висоти досягне стріла;
 - 2) проміжок часу, протягом якого вона летіла вгору, та проміжок часу, протягом якого вона падала вниз;
 - 3) через скільки секунд після пуску стріла впала на землю.
452. М'яч підкинуто вертикально вгору з початковою швидкістю 15 м/с. Залежність відстані h (у метрах) від м'яча до землі від часу польоту t (у секундах) задається формулою $h = 15t - 5t^2$. Побудуйте схематично графік цієї залежності та знайдіть за ним:
- 1) якої найбільшої висоти досягне м'яч;
 - 2) проміжок часу, протягом якого він рухався вгору, та проміжок часу, протягом якого він падав униз;
 - 3) через скільки секунд після підкидання м'яч упав на землю.
453. При яких значеннях b і c точка $N(5; 7)$ є вершиною параболи $y = x^2 + bx + c$?
454. При яких значеннях a і c точка $M(-3; -13)$ є вершиною параболи $y = ax^2 + 12x + c$?
455. Точка $M(3; -2)$ є вершиною параболи $y = ax^2 + bx + c$, яка перетинає вісь ординат у точці $N(0; 7)$. Знайдіть значення коефіцієнтів a , b і c .
456. При якому значенні c найбільше значення функції $y = -x^2 + 6x + c$ дорівнює 16?
457. При якому значенні c найменше значення функції $y = x^2 - 4x + c$ дорівнює 4?
458. При яких значеннях c функція $y = x^2 + 8x + c$ для всіх значень x набуває лише додатних значень?

459. При яких значеннях c функція $y = -x^2 + 2x + c$ для всіх значень x набуває лише від'ємних значень?



460. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 6|x| + 5$; 2) $y = |x^2 - 6x + 5|$.

461. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 4|x| + 3$; 2) $y = |x^2 - 4x + 3|$.



Вправи для повторення

2 462. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{x} + 2$.

3 463. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $f(x) = 3x^2$ і $g(x) = -6x$; 2) $\varphi(x) = x^2 + x$ і $\psi(x) = 2$.

464. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{3+x}{3x^2+2x-5}$; 2) $y = \sqrt{x-5}$.

465. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = \frac{6}{x}$ і $y = x + 1$. Накресліть графіки даних функцій і позначте на них знайдені точки.



4 466. Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x+3} = \frac{4}{x} - 2$.

467. Знайдіть нулі функції:

1) $f(x) = (x-1)(x+2)\sqrt{|x|-3}$; 2) $g(x) = x(x-3)\sqrt{|x|-2}$.



Життєва математика

468. У зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО) з математики, яке відбулося 12 червня 2015 року, взяло участь 121 716 осіб. Завдання № 30 правильно розв'язали лише 6,06 % від кількості учасників. Скільки учасників ЗНО правильно розв'язали завдання № 30?



Розв'яжіть і підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

469. Які із чисел $-2, -1, 0, 1, 2$ є розв'язками нерівності:

1) $x^2 + 2x - 3 > 0$; 2) $x^2 + x - 2 \leq 0$;
3) $x^2 + x \geq 0$; 4) $x^2 - 3x < 0$?

470. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 3x - 4 = 0$; 2) $-2x^2 + 3x + 5 = 0$;
 3) $x^2 + 18x = 0$; 4) $4x^2 - 9 = 0$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



471. На яке натуральне число слід поділити число 180, щоб остача від ділення складала 25 % від частки?

Домашня самостійна робота № 2

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. Дано $f(x) = x^2 - x$. Знайдіть $f(-1)$.

- А. -2; Б. 0; В. 2; Г. 1.

2. Щоб побудувати графік функції $y = x^2 + 2$, треба графік функції $y = x^2$ перенести на 2 одиниці...

- А. вліво; Б. вгору; В. вниз; Г. вправо.

3. Укажіть функцію, що є квадратичною:

- А. $y = -2x^2 + 3x + 7$; Б. $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$;
 В. $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$; Г. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

2 4. Знайдіть нулі функції $y = x^2 - 4x$.

- А. 0; Б. 4; В. 0; -4; Г. 0; 4.

5. Укажіть значення x , при якому значення функції $y = 2x + 5$ дорівнюватиме 7.

- А. 7; Б. -1; В. 1; Г. 0.

6. Не виконуючи побудови, знайдіть усі точки перетину графіків функцій $y = -3x^2$ і $y = 9x$.

- А. (0; 0); Б. (0; 0), (-3; -27);
 В. (0; 0), (-3; 0); Г. (0; 0), (3; 27).

3 7. Побудуйте схематично графік функції $y = -x^2 + 2x - 3$ та вкажіть область значень цієї функції.

- А. $(-\infty; -2)$; Б. $[-2; +\infty)$;
 В. $(-\infty; -2]$; Г. $(-\infty; 2]$.

8. Побудуйте схематично графік функції $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x$ та вкажіть проміжок зростання цієї функції.

- А. $(-\infty; 4]$; Б. $[-8; +\infty)$;
 В. $[-4; +\infty)$; Г. $[4; +\infty)$.

9. Укажіть область визначення функції $y = \frac{1}{\sqrt{18 - 2x}}$.

- А. $(-\infty; 9)$; Б. $(-\infty; +\infty)$;
 В. $(-\infty; 9]$; Г. $(-\infty; -9)$.

4 10. Укажіть область значень функції $y = 4 - \frac{1}{2}|x|$.

- А. $(-\infty; 4)$; Б. $[4; +\infty)$;
 В. $(-\infty; 4]$; Г. $(-\infty; +\infty)$.

11. При яких значеннях a і c точка $M(-1; 4)$ є вершиною параболи $y = ax^2 + 2x + c$?

- А. $a = 1, c = 3$;
 Б. $a = 1, c = 5$;
 В. $a = 1, c = -5$;
 Г. $a = -1, c = 7$.

12. Скільки нулів має функція $y = \frac{(x^2 - 9)\sqrt{|x| - 4}}{x}$?

- А. 1; Б. 2; В. 3; Г. 4.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО § 8–11

1 1. Для функції $f(x) = x^2 + x$ знайдіть:

- 1) $f(0)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(-3)$.

2. Як із графіка функції $y = x^2$ отримати графік функції:

- 1) $y = x^2 + 5$; 2) $y = (x + 5)^2$?

3. Які з функцій є квадратичними:

- 1) $y = x^2 - 4x$; 2) $y = \frac{1}{x^2 - 4x}$;
 3) $y = x^3 + x + 3$; 4) $y = x^2 + x + 3$?

2 4. Знайдіть нулі функції:

- 1) $y = -2x + 7$; 2) $y = x^2 - 5x + 6$.

5. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{x-3};$$

$$2) y = \sqrt{x} - 3.$$

6. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = -4x^2$ і $y = 2x$.

3 7. Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = \frac{15x}{2x^2 + 3x - 5};$$

$$2) g(x) = \frac{1}{\sqrt{8-2x}}.$$

8. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 2x - 3$. За графіком знайдіть:

1) область значень функції;

2) проміжок зростання і проміжок спадання функції.

4 9. При яких значеннях b і c точка $A(2; -1)$ є вершиною параболи $y = 2x^2 + bx + c$?

Додаткові завдання

4 10. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2} = \frac{6}{x} + 1$ графічно.

11. Скільки нулів має функція $f(x) = x(x^2 - 1)\sqrt{|x| - 2}$?

§ 12. КВАДРАТНА НЕРІВНІСТЬ

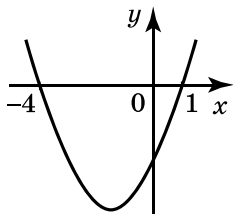
Нерівності вигляду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де x – змінна, a, b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратними нерівностями (або нерівностями другого степеня з однією змінною).

Наприклад, квадратними є нерівності: $2x^2 + 3x - 5 > 0$, $4x^2 - 8 \geq 0$, $7x^2 - 9x < 0$, $x^2 - 9x + 17 \leq 0$.

Розв'язки квадратних нерівностей можна розглядати як проміжки, на яких квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває додатних (для нерівності $ax^2 + bx + c > 0$), невід'ємних (для нерівності $ax^2 + bx + c \geq 0$), від'ємних (для нерівності $ax^2 + bx + c < 0$) і недодатних (для нерівності $ax^2 + bx + c \leq 0$) значень. Отже, щоб розв'язати квадратну нерівність, достатньо знайти відповідні проміжки знакосталості квадратичної функції.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $x^2 + 3x - 4 < 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = x^2 + 3x - 4$. Графіком її є парабола, гілки якої напрямлені вгору. З'ясуємо, чи перетинає парабола вісь x . Для цього розв'яжемо рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$, тобто знайдемо нулі функції. Маємо: $x_1 = 1$; $x_2 = -4$.



Мал. 65

Отже, парабола перетинає вісь x у точках з абсцисами 1 і -4 . Будуємо схематично графік функції $y = x^2 + 3x - 4$, знаючи її нулі та напрям гілок (мал. 65). За графіком з'ясуємо, що функція набуває від'ємних значень, коли $x \in (-4; 1)$. Отже, множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 < 0$ є проміжок $(-4; 1)$.

Відповідь. $(-4; 1)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність:

1) $x^2 + 3x - 4 \leq 0$; 2) $x^2 + 3x - 4 > 0$; 3) $x^2 + 3x - 4 \geq 0$.

Розв'язання. Розглянемо схематичне зображення графіка функції $y = x^2 + 3x - 4$ (мал. 65).

1) Нерівність $x^2 + 3x - 4 \leq 0$ задовольняють ті самі значення x , що й нерівність $x^2 + 3x - 4 < 0$, а також числа -4 і 1 — нулі функції, тобто ті значення аргументу, при яких значення функції $y = x^2 + 3x - 4$ дорівнює нулю. Отже, множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 \leq 0$ є проміжок $[-4; 1]$.

2) З малюнка 65 бачимо, що функція $y = x^2 + 3x - 4$ набуває додатних значень, якщо $x \in (-\infty; -4)$ або $x \in (1; +\infty)$. Множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 > 0$ є об'єднання цих проміжків, тобто $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

3) Нерівність $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ задовольняють ті самі значення x , що й нерівність $x^2 + 3x - 4 > 0$, включаючи нулі функції $y = x^2 + 3x - 4$, тобто числа -4 і 1 . Отже, множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ є $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

Відповідь. 1) $[-4; 1]$; 2) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$;
3) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

Зауважимо, що для запропонованого способу розв'язування ані положення вершини параболы, ані розташування параболы відносно осі y не мають значення. Важливо лише знати абсциси точок перетину параболы з віссю x (нулі функції) і напрям гілок параболы (угору чи вниз).

Отже, для розв'язування квадратних нерівностей слід дотримуватися такої послідовності дій:



- 1) знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (якщо вони існують);
- 2) якщо нерівність має строгий знак ($>$ або $<$), то корені квадратного тричлена позначаємо на осі x «виколотими» точками (вони виключатимуться з множини розв'язків нерівності); якщо знак нерівності нестрогий (\geq або \leq), то корені квадратного тричлена позначаємо зафарбованими точками (вони включатимуться до множини розв'язків нерівності);
- 3) схематично зображуємо графік функції $y = ax^2 + bx + c$, враховуючи напрям гілок параболи та точки її перетину з віссю x (якщо вони існують);
- 4) знаходимо на осі x проміжки, на яких функція $y = ax^2 + bx + c$ задовольняє дану нерівність;
- 5) записуємо відповідь.

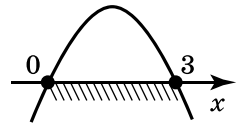
Приклад 3. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{3x - x^2}$.

Розв'язання. Областю визначення цієї функції є розв'язки нерівності $3x - x^2 \geq 0$.

1) Коренями квадратного тричлена $3x - x^2$ є числа 0 і 3.

2) Зображуємо корені на осі x зафарбованими точками, оскільки знак нерівності є нестрогим.

3) Схематично зображуємо графік функції $y = 3x - x^2$. Це парабола, що перетинає вісь x у точках 0 і 3, гілки якої прямують униз (мал. 66).



Мал. 66

4) Нерівність справджується при $x \in [0; 3]$.

Відповідь. $[0; 3]$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $x^2 - 6x + 9 > 0$.

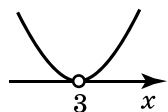
Розв'язання.

1) Коренем рівняння $x^2 - 6x + 9 = 0$ є число 3.

2) Позначаємо точку 3 на осі x «виколотою», бо знак нерівності – строгий.

3) Схематично зображуємо графік функції $y = x^2 - 6x + 9$ (мал. 67). Це парабола з вершиною на осі x , її гілки направлені вгору. З віссю x вона має лише одну спільну точку – точку 3 (кажуть, що парабола дотикається до осі x).

4) За малюнком 67 робимо висновок, що функція набуває додатних значень при будь-якому значенні x , крім числа 3. Отже, множиною розв'язків нерівності є $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

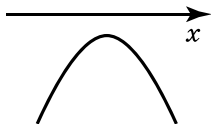


Мал. 67

Відповідь. $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $-x^2 + 2x - 7 < 0$.

Розв'язання. Рівняння $-x^2 + 2x - 7 = 0$ коренів не має, адже $D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) = -24 < 0$. Отже, парабола $y = -x^2 + 2x - 7$ вісь x не перетинає, а її гілки прямують униз (мал. 68).



Мал. 68

Оскільки всі точки параболи лежать нижче осі x , то множиною розв'язків нерівності $-x^2 + 2x - 7 < 0$ є множина всіх чисел, тобто $(-\infty; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; +\infty)$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $-x^2 + 2x - 7 \geq 0$.

Розв'язання. З малюнка 68 бачимо, що жодна з точок параболи не лежить вище осі x і не належить цій осі, тому нерівність $-x^2 + 2x - 7 \geq 0$ не має розв'язків.

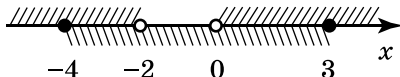
Відповідь. Немає розв'язків.

Приклад 7. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 + 2x > 0, \\ x^2 + x - 12 \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язком системи нерівностей є спільні розв'язки нерівностей системи. Отже, щоб знайти розв'язки системи, треба розв'язати кожену нерівність окремо і знайти їх спільні розв'язки. Множиною розв'язків нерівності $x^2 + 2x > 0$ є $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ (розв'яжіть цю нерівність самостійно). Множиною розв'язків нерівності $x^2 + x - 12 \leq 0$ є $[-4; 3]$ (розв'яжіть цю нерівність самостійно).

Зобразимо на координатній прямій отримані множини розв'язків нерівностей (мал. 69). Множиною розв'язків системи буде переріз множин розв'язків нерівностей, тобто $[-4; -2) \cup (0; 3]$.



Мал. 69

Відповідь. $[-4; -2) \cup (0; 3]$.



1. Які нерівності називають квадратними?
2. Як розв'язати квадратну нерівність?



Початковий рівень

472. (Усно). Які з нерівностей є квадратними:

- 1) $2x + 3 > 0$; 2) $3x^2 - 7x - 5 \geq 0$;
 3) $\frac{1}{x^2 - 5x} < 0$; 4) $9x^2 - 3x^3 \leq 0$;
 5) $x^2 + 7x < 0$; 6) $x^2 + 9 \geq 0$?

473. Які із чисел -3 ; 0 ; 2 є розв'язками квадратної нерівності:

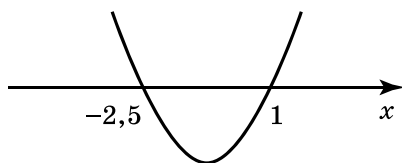
- 1) $x^2 - x > 0$; 2) $x^2 - x + 2 > 0$; 3) $4x^2 + 3x - 1 < 0$?

474. Які із чисел -2 ; 0 ; 1 є розв'язками квадратної нерівності:

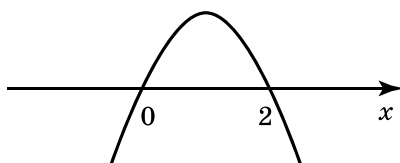
- 1) $x^2 + x > 0$; 2) $x^2 + 6x + 8 < 0$; 3) $3x^2 - x + 2 > 0$?

475. На малюнку 70 схематично зображено графік функції $y = 2x^2 + 3x - 5$. Використовуючи графік, запишіть розв'язки нерівності:

- 1) $2x^2 + 3x - 5 > 0$; 2) $2x^2 + 3x - 5 \geq 0$;
 3) $2x^2 + 3x - 5 < 0$; 4) $2x^2 + 3x - 5 \leq 0$.



Мал. 70



Мал. 71

476. На малюнку 71 схематично зображено графік функції $y = -x^2 + 2x$. Використовуючи графік, запишіть розв'язки нерівності:

- 1) $-x^2 + 2x < 0$; 2) $-x^2 + 2x \leq 0$;
 3) $-x^2 + 2x > 0$; 4) $-x^2 + 2x \geq 0$.



Середній рівень

477. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 - 3x \geq 0$; 2) $x^2 + 5x < 0$;
 3) $-x^2 + 8x \leq 0$; 4) $-x^2 - 7x > 0$.

478. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 - 6x < 0$; 2) $x^2 + 2x \geq 0$;
 3) $-x^2 + 7x > 0$; 4) $-x^2 - x \leq 0$.

479. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 - 16 \leq 0$; 2) $x^2 - 4 > 0$;
 3) $-x^2 + 1 \geq 0$; 4) $25 - x^2 < 0$.

480. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 - 36 > 0$; 2) $x^2 - 100 \leq 0$;
 3) $-x^2 + 64 < 0$; 4) $9 - x^2 \geq 0$.

481. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $x^2 - 3x - 40 \geq 0$; 2) $x^2 - 8x + 15 < 0$;
 3) $-x^2 + 6x + 7 \leq 0$; 4) $-x^2 - 5x - 4 > 0$.

482. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $x^2 - 7x + 12 \leq 0$; 2) $x^2 - 2x - 24 > 0$;
 3) $-x^2 - x + 6 \geq 0$; 4) $-x^2 + 3x + 10 < 0$.

483. Знайдіть, при яких значеннях x квадратний тричлен:

- 1) $x^2 - 5x - 6$ набуває додатних значень;
 2) $x^2 + x - 12$ набуває від'ємних значень.

484. Знайдіть, при яких значеннях x квадратний тричлен:

- 1) $x^2 - x - 2$ набуває від'ємних значень;
 2) $x^2 + 2x - 8$ набуває додатних значень.

485. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 < 4$; 2) $x^2 \geq 100$;
 3) $x^2 \leq 7x$; 4) $-x^2 > -3x$.

486. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 > 9$; 2) $x^2 \leq 1$; 3) $x^2 \geq 4x$; 4) $-x^2 < -5x$.



Достатній рівень

487. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 + 2x - 7 > 0$; 2) $x^2 - x - 3 \leq 0$.

488. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 - 4x - 3 < 0$; 2) $x^2 + x - 5 \geq 0$.

489. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{12 - x - x^2}}$.

490. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \sqrt{3 - x^2 + 2x}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$.

491. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| 1) $x^2 + 10x + 25 \geq 0$; | 2) $25 - 20x + 4x^2 < 0$; |
| 3) $9x^2 - 6x + 1 > 0$; | 4) $x^2 - 8x + 16 \leq 0$; |
| 5) $-x^2 - 2x - 1 < 0$; | 6) $10x - x^2 - 25 \geq 0$; |
| 7) $-25x^2 + 30x - 9 \leq 0$; | 8) $-49x^2 - 70x - 25 > 0$. |

492. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- | | |
|------------------------------|----------------------------------|
| 1) $x^2 + 8x + 16 < 0$; | 2) $25x^2 - 10x + 1 \geq 0$; |
| 3) $9 - 6x + x^2 \leq 0$; | 4) $100x^2 - 120x + 36 > 0$; |
| 5) $2x - x^2 - 1 \geq 0$; | 6) $-64x^2 - 112x - 49 \leq 0$; |
| 7) $-36x^2 + 60x - 25 > 0$; | 8) $-x^2 + 16x - 64 < 0$. |

493. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності:

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1) $2x^2 - 5x + 2 < 0$; | 2) $9x - 2x^2 - 4 \geq 0$. |
|--------------------------|-----------------------------|

494. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| 1) $2x^2 - 7x + 3 \leq 0$; | 2) $4 - 11x - 3x^2 > 0$. |
|-----------------------------|---------------------------|

495. Розв'яжіть нерівність:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| 1) $x^2 + x + 7 \geq 0$; | 2) $x^2 - 2x + 5 < 0$; |
| 3) $-x^2 - 2x - 9 \leq 0$; | 4) $-3x^2 + 4x - 5 > 0$. |

496. Розв'яжіть нерівність:

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1) $6x^2 + x + 1 > 0$; | 2) $x^2 - 3x + 7 \leq 0$; |
| 3) $-x^2 + 4x - 9 < 0$; | 4) $-x^2 - 2x - 5 \geq 0$. |

497. Доведіть, що при будь-якому значенні x справджується нерівність:

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| 1) $3x^2 - x + 1 > 0$; | 2) $6x < x^2 + 10$. |
|-------------------------|----------------------|

498. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1) $4x^2 + 11x - 20 < 0$; | 2) $-3x^2 + 11x + 34 \geq 0$. |
|----------------------------|--------------------------------|

499. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

- | | |
|--------------------------------|----------------------------|
| 1) $-3x^2 - 11x + 14 \geq 0$; | 2) $12x^2 + 16x - 3 < 0$. |
|--------------------------------|----------------------------|

500. Розв'яжіть нерівність:

- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| 1) $2x^2 - 3x \leq 2(x - 1)$; | 2) $4x(x + 2) > 5$; |
| 3) $x(x - 8) > (2x - 1)^2$; | 4) $3x(x - 2) + 1 > (x - 1)^2$. |

501. Розв'яжіть нерівність:

- | | |
|-------------------------|----------------------------------|
| 1) $4x(x - 1) \leq 3$; | 2) $(x + 2)^2 < 2x(x + 3) + 5$. |
|-------------------------|----------------------------------|

502. Знайдіть область визначення функції:

- | | |
|---|---|
| 1) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{x - 2}$; | 2) $y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x - 2}$. |
|---|---|

503. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x^2 + 7x - 8 < 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \geq 0, \\ 2x - 6 > 0. \end{cases}$$

504. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2x^2 + 5x - 18 \geq 0, \\ x < 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 - 10x - 24 < 0, \\ 2x - 16 \geq 0. \end{cases}$$



Високий рівень

505. Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ 0 \leq x < 7; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0, \\ x^2 + x - 6 \leq 0. \end{cases}$$

506. Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ -1 < x < 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x^2 + 7x - 9 \geq 0, \\ x^2 - 9 \leq 0. \end{cases}$$

507. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x^2 - 8x + 15}{(x - 4)^2} \leq 0; \quad 2) \frac{x^2 + x - 2}{|x - 2|} > 0.$$

508. Знайдіть область допустимих значень змінної у виразі

$$\sqrt{x^2 - 9} + \frac{1}{\sqrt{4 + 3x - x^2}}.$$

509. Знайдіть область визначення функції

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16}} + \sqrt{8x - x^2 - 15}.$$

510. При яких значеннях a рівняння не має коренів:

$$1) x^2 - (a - 2)x + 4 = 0; \quad 2) (a + 1)x^2 + 5ax + 3a = 0?$$

511. При яких значеннях a рівняння має два різних корені:

$$1) x^2 - ax + (2a - 3) = 0; \quad 2) ax^2 + (3a - 2)x + a = 0?$$

512. При яких значеннях a рівняння:

$$1) x^2 - (a + 1)x + 9 = 0 \text{ не має коренів;} \\ 2) ax^2 + (2a - 1)x + a = 0 \text{ має два різних корені?}$$

513. При яких значеннях m розв'язком нерівності є будь-яке число: 1) $x^2 - (m + 2)x + (8m + 1) > 0$;

$$2) mx^2 - 4x + m + 3 < 0?$$



Вправи для повторення

3 514. Побудуйте графік функції $y = -x^2 + 2x + 8$. За графіком знайдіть:

- 1) область значень функції;
- 2) проміжок зростання функції.

4 515. Доведіть, що $26x^2 - 10x + 2xy + y^2 + 2 > 0$ при будь-яких значеннях x і y .

516. Одним з коренів рівняння $x^3 - 2x^2 - x + a = 0$ є число -1 . Знайдіть решту коренів цього рівняння.



Життєва математика

517. Бабусі Мар'яні призначено ліки, діючу речовину яких треба вживати по 0,5 г 3 рази на добу протягом 14 днів. Одна упаковка ліків містить 10 пігулок по 0,25 г діючої речовини в кожній пігулці. Якої найменшої кількості упаковок цих ліків вистачить на весь курс лікування?



Розв'яжіть і підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

518. Чи є пара чисел $(-1; 2)$ розв'язком системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + 3y = 5, \\ 4x - 5y = -14; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3y - x = 7, \\ 4x + 5y = 5? \end{cases}$$

519. Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

$$1) \begin{cases} 2x + 7y = -3, \\ 3x - y = 7; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 5y = -16, \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$$

520. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

$$1) \begin{cases} x + 7y = -5, \\ 3x - 4y = 10; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 4y = -19, \\ 7x - y = -3. \end{cases}$$

521. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} 3x + 2y = 2, \\ 5x - 2y = -18; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7x + 5y = 11, \\ 3x + 5y = -1. \end{cases}$$



Цікаві задачі для учнів неледачих



522. Відомо, що числа a , b і $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ є раціональними. Чи можна стверджувати, що числа \sqrt{a} і \sqrt{b} теж раціональні?

§ 13. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

У 7 класі ви розв'язували системи двох лінійних рівнянь з двома змінними, тобто системи, у яких обидва рівняння мають вигляд $ax + by = c$, де a, b, c – числа, x і y – змінні. Наприклад, такою є система

$$\begin{cases} x + 3y = 2, \\ 2x - y = 11. \end{cases}$$

Нагадаємо, що *розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають таку пару значень змінних, при яких кожне з рівнянь системи перетворюється на правильну числову рівність*. Так, розв'язком вищенаведеної системи є пара чисел $(5; -1)$, тобто $x = 5; y = -1$. Справді: $5 + 3 \cdot (-1) = 2$ і $2 \cdot 5 - (-1) = 11$ – правильні числові рівності.

Рівняння $ax + by = c$ за умови, коли хоча б один з коефіцієнтів a чи b відмінний від нуля, називають *рівнянням першого степеня з двома змінними*. Це рівняння можна замінити рівносильним йому рівнянням $ax + by - c = 0$, ліва частина якого – многочлен стандартного вигляду першого степеня з двома змінними, а права – дорівнює нулю.

У такий спосіб можна визначити степінь будь-якого рівняння з двома змінними (та й взагалі з більшою кількістю змінних). Для цього достатньо замінити рівняння рівносильним йому рівнянням, ліва частина якого многочлен стандартного вигляду, а права – число нуль. Степінь многочлена і буде *степенем рівняння*.

Так, наприклад, $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ – рівняння другого степеня, рівняння $(x^2 + y)^2 = x^4 + 3y^2 + 7$ рівносильне рівнянню $2x^2y - 2y^2 - 7 = 0$ і, отже, є рівнянням третього степеня.

Розглянемо системи рівнянь, у яких одне або обидва рівняння є рівняннями другого степеня з двома змінними, та способи розв'язування таких систем.

1. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними графічно

Системи рівнянь другого степеня з двома змінними графічно розв'язують так само, як і системи двох лінійних рівнянь з двома змінними.

Нагадаємо послідовність кроків для розв'язування системи рівнянь графічно:



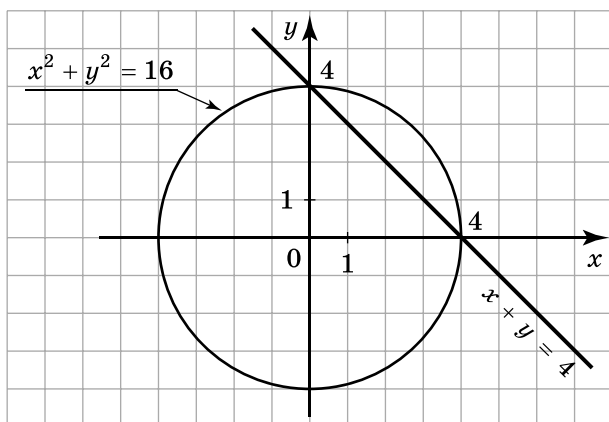
- 1) побудувати графіки рівнянь в одній координатній площині;
- 2) знайти координати їх точок перетину або впевнитися, що графіки рівнянь спільних точок не мають;
- 3) якщо координати точок перетину є цілими числами, то виконати перевірку; якщо ні, то розв'язки системи знайти наближено;
- 4) записати відповідь.

На відміну від лінійних рівнянь, графіком яких є пряма, графіки рівнянь другого степеня є досить різними. Так, наприклад, графіком рівняння $y = x^2$ (або рівносильного йому рівняння $y - x^2 = 0$) є парабола, графіком рівняння $y = \frac{6}{x}$ (або рівносильного йому рівняння $xy = 6$) є гіпербола, а графіком рівняння $x^2 + y^2 = 4$ є коло.

Приклад 1. Розв'язати графічно систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки рівнянь $x^2 + y^2 = 16$ та $x + y = 4$. Графіком рівняння $x^2 + y^2 = 16$ є коло із центром у початку координат і радіусом 4. Графіком рівняння $x + y = 4$ є пряма, що проходить через точки $(-1; 5)$ і $(3; 1)$. Графіки зображено на малюнку 72, вони мають дві спільні точки $(0; 4)$ і $(4; 0)$. Перевіркою впевнюємося, що ці пари чисел є розв'язками системи.



Мал. 72

Відповідь. $(0; 4), (4; 0)$.

2. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними способом підстановки

Якщо в системі рівнянь з двома змінними одне з рівнянь є рівнянням першого степеня, то таку систему завжди можна розв'язати *способом підстановки*. Нагадаємо послідовність кроків для розв'язування системи рівнянь цим способом:



- 1) виразити в рівнянні першого степеня одну змінну через іншу;
- 2) підставити отриманий вираз у друге рівняння системи замість відповідної змінної;
- 3) розв'язати отримане рівняння з однією змінною;
- 4) знайти відповідні значення другої змінної;
- 5) записати відповідь.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3y^2 - xy = -1, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Виразимо з другого рівняння змінну x через змінну y : $x = 5 - 3y$.

Підставимо в перше рівняння замість x вираз $5 - 3y$ та отримуємо рівняння зі змінною y :

$$3y^2 - (5 - 3y)y = -1.$$

Після спрощень матимемо рівняння $6y^2 - 5y + 1 = 0$, корені якого $y_1 = \frac{1}{2}$; $y_2 = \frac{1}{3}$.

За формулою $x = 5 - 3y$ знаходимо значення x , що відповідають знайденим значенням y :

$$x_1 = 5 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}; \quad x_2 = 5 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 4.$$

Отже, система має два розв'язки:

$$x_1 = 3\frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{2} \quad \text{та} \quad x_2 = 4, y_2 = \frac{1}{3}.$$

Оформити розв'язання в зошиті можна так:

$$\begin{cases} 3y^2 - xy = -1, \\ x + 3y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - 3y, \\ 3y^2 - xy = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - 3y, \\ 3y^2 - (5 - 3y)y = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 3y, \\ 6y^2 - 5y + 1 = 0; \end{cases} \left| \begin{array}{l} D = 1, \\ y_1 = 0,5; y_2 = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} y = 0,5, \\ x = 5 - 3 \cdot 0,5 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{3}, \\ x = 5 - 3 \cdot \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3,5, \\ y = 0,5 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Відповідь. $(3,5; 0,5), \left(4; \frac{1}{3}\right)$.

3. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними способом додавання

Як і для систем двох лінійних рівнянь з двома змінними, цей спосіб використовують, коли в результаті почленного додавання рівнянь системи отримуємо рівняння з однією змінною.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + xy = 20, \\ x - xy = -10. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо почленно обидва рівняння системи, матимемо: $2x = 10$, тобто $x = 5$.

Підставивши знайдене значення x , наприклад, у перше рівняння, отримаємо:

$$5 + 5y = 20, \text{ тобто } y = 3. \text{ Отже, } x = 5, y = 3.$$

Оформити розв'язання в зошиті можна так:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x + xy = 20, \\ x - xy = -10; \end{cases} \Big| + \\ \hline 2x = 10, \\ x = 5. \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ 5 + 5y = 20; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ 5y = 15; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = 3. \end{cases}$$

Відповідь. $(5; 3)$.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 21, \\ x + xy = 9. \end{cases}$$

Розв'язання. Помножимо друге рівняння на -2 . Маємо:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 21, \\ -2x - 2xy = -18. \end{cases}$$

Додамо почленно рівняння системи, отримаємо: $x^2 - 2x = 3$.
Маємо рівняння: $x^2 - 2x - 3 = 0$, корені якого: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.
Знайдемо значення y , підставивши ці значення x у друге рівняння початкової системи:

1) нехай $x = -1$, тоді $-1 - y = 9$, тобто $y = -10$;

2) нехай $x = 3$, тоді $3 + 3y = 9$, тобто $y = 2$.

Відповідь. $(-1; -10)$, $(3; 2)$.

4. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними за допомогою заміни змінних

Деякі системи рівнянь другого степеня (а також системи, що містять рівняння вищих степенів) зручно розв'язувати, використовуючи заміну змінних.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$$

Розв'язання. Уведемо заміну: $x + y = u$, $xy = v$. Матимемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} u + v = 11, \\ uv = 30. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему способом підстановки (зробіть це самостійно), отримаємо $u_1 = 5$, $v_1 = 6$ або $u_2 = 6$, $v_2 = 5$.

Повертаємося до змінних x і y :

1) якщо $\begin{cases} u = 5, \\ v = 6, \end{cases}$ то $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$

Розв'язавши цю систему, матимемо:

$$x_1 = 2, y_1 = 3; x_2 = 3, y_2 = 2;$$

2) якщо $\begin{cases} u = 6, \\ v = 5, \end{cases}$ то $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5. \end{cases}$

Отримаємо ще дві пари чисел: $x_3 = 5$, $y_3 = 1$; $x_4 = 1$, $y_4 = 5$.

Відповідь. $(2; 3)$, $(3; 2)$, $(5; 1)$, $(1; 5)$.



Ще в давньовавилонських текстах, які датуються III–II тисячоліттями до н. е., траплялося чимало задач, що зводилися до систем рівнянь другого степеня. Ось одна з них.

Задача. Площі двох своїх квадратів я склав і отримав $25\frac{5}{12}$. Сторона другого складає $\frac{2}{3}$ від сторони першого і ще 5. Знайти сторони цих квадратів.

Система рівнянь до задачі в сучасних записках матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\frac{5}{12}, \\ y = \frac{2}{3}x + 5. \end{cases}$$

Для її розв'язування автор підносить до квадрата ліву й праву частини другого рівняння:

$$y^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 25$$

та підставляє знайдене значення виразу y^2 у перше рівняння:

$$1\frac{4}{9}x^2 + 6\frac{2}{3}x = \frac{5}{12}.$$

Далі автор розв'язує це рівняння, знаходить x , а потім y .

Діофант, не маючи позначень для кількох невідомих, під час розв'язування задачі обирав невідому величину так, щоб звести розв'язування системи до розв'язування єдиного рівняння.

Задача. Записати два числа, коли відомо, що їх сума дорівнює 20, а сума їх квадратів – 208.

Сучасні математики звели б цю задачу до системи

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x^2 + y^2 = 208. \end{cases}$$

Проте Діофант обирав невідомою величиною половину різниці шуканих чисел та отримував (у сучасних позначеннях) систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = z, \\ \frac{1}{2}(x + y) = 10. \end{cases}$$

Спочатку додаючи ці рівняння, а потім віднімаючи перше від другого, Діофант отримував: $x = z + 10$, $y = 10 - z$ і підставляв знайдені вирази у друге рівняння початкової системи:

$$x^2 + y^2 = (z + 10)^2 + (10 - z)^2 = 2z^2 + 200,$$

щоб отримати рівняння з однією змінною: $2z^2 + 200 = 208$, звідки $z = 2$. (Діофант розглядав лише невід'ємні числа, тому корінь $z = -2$ не розглянув).

Тоді $x = 2 + 10 = 12$, $y = 10 - 2 = 8$.

У XVII–XVIII ст. прийоми розв'язування систем лінійних рівнянь у загальному вигляді за допомогою методу виключення невідомих розглядали математики Ферма, Ньютон, Лейбніц, Ейлер, Безу, Лагранж та інші.

Завдяки методу координат, який запропонували в XVII ст. Ферма і Декарт, стало можливим розв'язувати системи рівнянь графічно.



1. Поясніть на прикладах, що називають степенем рівняння з двома змінними.
2. Як розв'язати систему рівнянь з двома змінними графічно?
3. Як розв'язати систему рівнянь з двома змінними способом підстановки? Способом додавання?



Початковий рівень

523. Чи є пара чисел $x = 2$, $y = 1$ розв'язком системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x + y = 4? \end{cases}$$

524. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} 2x^2 + y = -1, \\ x + y = -2 \end{cases}$ пара чисел:

$$1) (1; -3); \quad 2) (0; -1)?$$



Середній рівень

525. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4$. За допомогою графіка розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = x + 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = 3x; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = x - 6. \end{cases}$$

526. Побудуйте графік функції $y = -x^2 + 1$. За допомогою графіка розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = -x^2 + 1, \\ y = x + 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = -x^2 + 1, \\ y = x + 2. \end{cases}$$

527. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy = 4, \\ y = 4x; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$$

528. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - x = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy = 6, \\ y = 6x; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

529. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x = 4y, \\ y^2 + x + 3 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y = 0, \\ y = 2x - 3. \end{cases}$$

530. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = -2x, \\ x^2 + y - 3 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 4y - 5, \\ y^2 + x = 0. \end{cases}$$

531. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y - x = 1, \\ xy = 12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} y + 2x = 3, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

532. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} y - x = 2, \\ xy = 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = 2, \\ y^2 - x^2 = 4; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} y - 3x = 1, \\ x^2 + y^2 = 53. \end{cases}$$

533. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y^2 = 3, \\ x - y^2 = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y = 1, \\ -x^2 + 4y = 19. \end{cases}$$

534. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y + x^2 = 10, \\ y - x^2 = -8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y^2 + x = 2, \\ -y^2 + 2x = 7. \end{cases}$$



535. Розв'яжіть графічно систему:

$$1) \begin{cases} x^2 + 4x - y = 0, \\ x + y + 4 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + 2. \end{cases}$$

536. Розв'яжіть графічно систему:

$$1) \begin{cases} x^2 + 6x - y = 0, \\ x + y + 6 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x^2 + 3. \end{cases}$$

537. Накресліть схематично графіки рівнянь системи і встановіть кількість її розв'язків:

$$1) \begin{cases} xy = -4, \\ y - x^2 = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = 1. \end{cases}$$

538. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 4y^2 + xy = 22, \\ x + 5y = 13; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + \frac{y}{2} = 5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 2y = 6, \\ x^2 + xy + y^2 = 12; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x - y = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12}. \end{cases}$$

539. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3y^2 - xy = 2, \\ x - 2y = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \frac{x}{3} + y = 3; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 - xy - y^2 = 11; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x + y = 5, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

540. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину: 1) прямої $x + y = 5$ і параболи $y = x^2 - 7$;

2) кола $x^2 + y^2 = 34$ і гіперболи $xy = 15$.

541. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + xy = 5, \\ x - xy = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ x^2 - y^2 = -21; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2y^2 + xy = 36, \\ y^2 + xy = 20; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 - xy = -4, \\ 3x^2 - 2xy = -7. \end{cases}$$

542. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y + xy = 3, \\ y - xy = -2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3y^2 + x^2 = 13, \\ 3y^2 - x^2 = 11; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x^2 - xy = 10, \\ x^2 - xy = 2; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} xy + 2y^2 = -1, \\ 3xy + y^2 = -8. \end{cases}$$



Високий рівень

543. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2xy - x = 10, \\ 2xy - y = 9; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x - xy - y = 13, \\ x + xy - 2y = 2. \end{cases}$$

544. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3xy + x = 8, \\ 3xy + y = 7; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + xy + 2y = -9, \\ 2x - xy - y = -2. \end{cases}$$

545. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y + xy = 5, \\ xy(x + y) = 6; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0, \\ (x - y)^2 + 3(x - y) - 4 = 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{x - 2y}{x + y} - \frac{x + y}{x - 2y} = \frac{15}{4}, \\ 4x + 5y = 3. \end{cases}$$

546. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x - y)^2 + 4(x - y) + 4 = 0, \\ (x + y)^2 - 2(x + y) - 3 = 0. \end{cases}$$

547. При якому значенні a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a \end{cases}$ має:

- 1) єдиний розв'язок;
- 2) рівно три розв'язки?



Вправи для повторення

3 548. Розв'яжіть нерівність $-3,4 \leq \frac{1-2x}{5} \leq 4,8$.

549. Теплохід проплив 24 км за течією річки на 2 год швидше, ніж 60 км проти течії. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість теплохода дорівнює 22 км/год.

4 550. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x}$.



Життєва математика

551. Приватне підприємство «Котигорошко» виробляє дитячі іграшки і продає їх за ціною $p = 50$ грн за одиницю. Змінні витрати на виробництво одиниці продукції складають $v = 30$ грн, а сталі витрати підприємства складають $f = 70\,000$ грн на місяць. Місячний операційний прибуток підприємства (у гривнях) обчислюється за формулою $\pi(q) = q(p - v) - f$. Визначте найменший місячний обсяг виробництва q (одиниць продукції), при якому місячний операційний прибуток підприємства становитиме не менш ніж 30 000 грн.



Розв'яжіть і підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

552. Розв'яжіть задачі за допомогою системи рівнянь.

1) Два зошити й один олівець коштують разом 24 грн, а один зошит і два олівці – 21 грн. Скільки коштує один зошит і скільки – один олівець?

2) Човен за 1,5 год руху за течією річки і 2 год руху проти течії долає 62 км, а за 3 год руху в стоячій воді й 1 год руху проти течії – 70 км. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії річки.



Цікаві задачі для учнів неледачих



553. (Київська математична олімпіада, 1989 р.) Нехай a , b , c – додатні числа. Доведіть, що

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

§ 14. СИСТЕМА ДВОХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕКСТОВИХ І ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Нагадаємо, що в 7 класі ви розв'язували текстові задачі за допомогою систем лінійних рівнянь у такій послідовності, яку можна застосовувати і для розв'язування більш складних задач, а саме:



- 1) позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x і y);
- 2) за умовою задачі скласти систему рівнянь;
- 3) розв'язати одержану систему;
- 4) проаналізувати знайдені значення змінних на відповідність умові задачі, дати відповідь на запитання задачі;
- 5) записати відповідь.

Розглянемо один з найпростіших прикладів, де система рівнянь з двома змінними є математичною моделлю текстової задачі.

Задача 1. Сума двох чисел дорівнює 8, а їх добуток 15. Знайти ці числа.

Розв'язання. Позначимо невідомі числа через x і y . Тоді $x + y = 8$; $xy = 15$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Розв'язавши систему (зробіть це самостійно), матимемо $x = 3$; $y = 5$ або $x = 5$; $y = 3$.

Отже, числа, які ми шукали, це 3 і 5.

Відповідь. 3 і 5.

Зауважимо, що цю задачу, як і деякі наступні в цьому параграфі, можна розв'язати і за допомогою рівняння з однією змінною.

Система рівнянь з двома змінними може бути математичною моделлю прикладної задачі. Нагадаємо, що прикладні задачі – це задачі, що містять нематематичні поняття, але можуть бути розв'язані методами математики.

Пригадаємо, що прикладну задачу доцільно розв'язувати в такій послідовності:



- 1) формулюємо задачу мовою математики, тобто складаємо математичну модель задачі;
- 2) розв'язуємо математичну задачу, що утворилася;
- 3) аналізуємо відповідь і формулюємо її мовою початкової задачі.

Задача 2. Площа земельної ділянки прямокутної форми дорівнює 60 м^2 . Якщо довжину цієї ділянки зменшити на 1 м , а ширину збільшити на 2 м , то отримаємо земельну ділянку з площею 72 м^2 . Знайти довжину огорожі початкової ділянки.

Розв'язання. Нехай довжина початкової ділянки дорівнює $x \text{ м}$, а ширина — $y \text{ м}$. Тоді за умовою $xy = 60$. Після зменшення довжини на 1 м вона буде дорівнювати $(x - 1) \text{ м}$, а після збільшення ширини на 2 м вона буде дорівнювати $(y + 2) \text{ м}$. За умовою $(x - 1)(y + 2) = 72$. Маємо систему:

$$\begin{cases} xy = 60, \\ (x - 1)(y + 2) = 72. \end{cases}$$

Покажемо один зі способів розв'язування цієї системи:

$$\begin{cases} xy = 60, \\ xy + 2x - y - 2 = 72. \end{cases}$$

Оскільки з першого рівняння системи відомо, що $xy = 60$, то у друге рівняння замість xy можна підставити число 60 . Матимемо:

$$\begin{cases} xy = 60, \\ 60 + 2x - y - 2 = 72; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 60, \\ y = 2x - 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x(2x - 14) = 60, \\ y = 2x - 14. \end{cases}$$

Після спрощення першого рівняння системи матимемо: $x^2 - 7x - 30 = 0$, звідки $x_1 = 10$; $x_2 = -3$. Число -3 не задовольняє умову задачі, оскільки довжина ділянки не може бути від'ємною. Отже, довжина початкової ділянки дорівнює 10 м , тоді можна знайти ширину: $2 \cdot 10 - 14 = 6 \text{ (м)}$. Знайдемо довжину огорожі: $P = 2(6 + 10) = 32 \text{ (м)}$.

Відповідь. 32 м .

Задача 3. З пункту A вийшов пішохід. Через 50 хв після цього звідти ж у тому самому напрямку виїхав велосипедист, який наздогнав пішохода на відстані 6 км від пункту A . Знайти швидкість пішохода і швидкість велосипедиста, якщо велосипедист за 1 год долає на 1 км більше, ніж пішохід за 2 год .

Розв'язання. Нехай x км/год – швидкість пішохода, y км/год – велосипедиста. Тоді пішохід подолав 6 км за $\frac{6}{x}$ год, а велосипедист – за $\frac{6}{y}$ год. За умовою пішохід був у дорозі на 50 хв = $\frac{5}{6}$ год більше, ніж велосипедист. Тому $\frac{6}{x} - \frac{6}{y} = \frac{5}{6}$.

Велосипедист за 1 год долає y км, а пішохід за 2 год – $2x$ км. За умовою $y - 2x = 1$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{6}{y} = \frac{5}{6}, \\ y - 2x = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши її (зробіть це самостійно) та врахувавши, що за змістом задачі $x > 0$ і $y > 0$, матимемо $x = 4$, $y = 9$.

Відповідь. Швидкість пішохода 4 км/год, велосипедиста – 9 км/год.



1. Сформулюйте послідовність дій для розв'язування текстових та прикладних задач за допомогою систем рівнянь.
2. Поясніть, як за допомогою системи рівнянь розв'язано задачі 1–3.



Початковий рівень

554. (Усно). Нехай x і y – деякі числа, різниця яких дорівнює числу 5, а добуток – числу 6. Яка система рівнянь відповідає умові задачі:

$$1) \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = 6, \\ xy = 5; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - y = 5, \\ xy = 6; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5? \end{cases}$$



Середній рівень

555. Сума двох чисел дорівнює -3 , а їх добуток дорівнює -28 . Знайдіть ці числа.

556. Добуток двох чисел дорівнює -12 , а їх сума дорівнює 1. Знайдіть ці числа.

557. Різниця двох чисел дорівнює 3, а різниця квадратів більшого і меншого чисел дорівнює -21 . Знайдіть ці числа.

- 558.** Різниця двох натуральних чисел дорівнює 2, а сума їх квадратів дорівнює 52. Знайдіть ці числа.
- 559.** Периметр земельної ділянки прямокутної форми дорівнює 100 м, а її площа – 600 м². Знайдіть сторони земельної ділянки.
- 560.** Сума двох сусідніх сторін прямокутника дорівнює 18 см. Знайдіть ці сторони, якщо площа прямокутника дорівнює 80 см².
- 561.** Сума катетів прямокутного трикутника дорівнює 17 см. Знайдіть катети, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 13 см.
- 562.** Периметр прямокутного трикутника дорівнює 24 см. Знайдіть катети цього трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 10 см.



Достатній рівень

- 563.** Сума двох чисел дорівнює 15, а різниця чисел, взаємно обернених з ними, дорівнює 0,1. Знайдіть ці числа.
- 564.** Різниця двох чисел дорівнює 3, а сума обернених до них чисел дорівнює 0,5. Знайдіть ці числа.
- 565.** Знайдіть двоцифрове число, яке в 4 рази більше за суму своїх цифр і у 3 рази більше за добуток своїх цифр.
- 566.** Знайдіть двоцифрове число, яке в 1,5 рази більше за добуток своїх цифр і в 4 рази більше за їх суму.
- 567.** Кожний з двох принтерів має надрукувати текстовий файл обсягом 120 сторінок. Перший принтер за одну хвилину друкує на 2 сторінки менше, ніж другий, і тому пропрацював на 3 хв довше. Скільки сторінок за хвилину друкує кожний принтер?
- 568.** Під час зимових канікул Яна та Оля мали розв'язати по 60 задач. Яна щодня розв'язувала на 1 задачу більше, ніж Оля, а тому впоралася із завданням на 2 дні раніше за Олю. Скільки задач щодня розв'язувала кожна з дівчат?
- 569.** Маємо два шматки кабелю різних видів. Маса першого шматка дорівнює 65 кг; другий, довжина якого на 3 м більша за перший і маса кожного метра якого на 2 кг більша за масу кожного метра першого шматка, має масу 120 кг. Знайдіть довжини цих шматків.

- 570.** У кінотеатрі було 320 місць, розташованих однаковими рядами. Після того як кількість місць у кожному ряду збільшили на 4 і додали ще один ряд, місць стало 420. Скільки стало рядів у кінотеатрі, якщо їх було більше, ніж 15?
- 571.** Два автомобілі виїхали одночасно з міст A і B назустріч один одному і зустрілися через годину. Після цього вони, не зупиняючись, продовжили рухатися з тією самою швидкістю. Один з них прибув у місто B на 35 хв пізніше, ніж другий у місто A . Знайдіть швидкість кожного з автомобілів, якщо відстань між містами 140 км.
- 572.** Два велосипедисти виїхали назустріч один одному з Києва і Боярки, перебуваючи на відстані 30 км. Через годину вони зустрілися і, не зупиняючись, продовжили рух з тією самою швидкістю. Один з них прибув у Боярку на 50 хв пізніше, ніж другий у Київ. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.
- 573.** Із села Яблунівка в село Грушівка, відстань між якими 9 км, вийшов пішохід. Через 30 хв із села Грушівка йому назустріч виїхав велосипедист, який зустрівся з пішоходом через 30 хв після свого виїзду. Знайдіть швидкість пішохода і швидкість велосипедиста, якщо пішохід долає відстань між селами на 2 год 15 хв повільніше, ніж велосипедист.
- 574.** Діагональ прямокутника дорівнює 10 см. Якщо одну з його сторін збільшити на 9 см, а другу залишити без змін, то діагональ збільшиться на 7 см. Знайдіть периметр початкового прямокутника.
- 575.** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см. Якщо один з його катетів збільшити на 4 см, а другий залишити без змін, то гіпотенуза нового трикутника дорівнюватиме 15 см. Знайдіть площу початкового трикутника.



4 Високий рівень

- 576.** Два крани, якщо їх відкрити одночасно, можуть наповнити басейн за 2 год. За скільки годин можна наповнити басейн через кожний кран окремо, якщо через один з них третина басейну наповнюється на 1,5 год повільніше, ніж шоста частина басейну через другий?

- 577.** Батько й син, працюючи разом, виконують певне завдання за 6 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожний з них, працюючи окремо, якщо сину для виконання $\frac{4}{5}$ завдання треба на 8 днів більше, ніж батькові для виконання $\frac{2}{5}$ завдання?
- 578.** З пунктів A і B , відстань між якими 10 км, одночасно назустріч один одному вийшли два пішоходи. Через 1 год їм залишилося пройти до зустрічі 1 км. Якби один з пішоходів вийшов на 15 хв раніше, то зустріч відбулася б на середині шляху. Знайдіть швидкість кожного пішохода.
- 579.** З двох міст, відстань між якими 72 км, назустріч один одному вирушили два велосипедисти і зустрілися на середині шляху, причому один з них виїхав на 1 год раніше за другого. Якби велосипедисти виїхали одночасно, то вони б зустрілися через 2 год 24 хв. Знайдіть швидкості велосипедистів.
- 580.** Моторний човен проплив 33 км за течією річки і повернув назад за 3 год 20 хв. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії річки, якщо відомо, що 11 км за течією і 6 км проти течії він долає за 50 хв.
- 581.** З двох пунктів A і B , відстань між якими 18 км, одночасно виїхали назустріч один одному два велосипедисти. Велосипедист, що виїхав з пункту A , прибув у пункт B через 24 хв після зустрічі, а другий велосипедист прибув у пункт A через 54 хв після зустрічі. Знайдіть швидкості велосипедистів.



Вправи для повторення

2 582. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + 5x \geq 0$; 2) $x^2 - 2x - 15 < 0$.

583. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 9, \\ x^2 - y^2 = 9. \end{cases}$

3 584. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 2}$.

4 585. Обчисліть: $(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^2$.



586. У будинку, де проживають першокласниця Наталка і старшокласник Сергій, 9 поверхів і кілька під'їздів. На кожному поверсі по 4 квартири. Наталка проживає у квартирі № 91, а Сергій – у квартирі № 170. У якому під'їзді та на якому поверсі проживає кожний з учнів?



Цікаві задачі для учнів неледачих



587. Спростіть вираз:

$$2016 \cdot (2017^9 + 2017^8 + 2017^7 + \dots + 2017^2 + 2018) + 1.$$

Домашня самостійна робота № 3

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Яка з нерівностей є квадратною:

А. $2x^2 - 3x^3 \geq 0$;

Б. $7x^2 - 9x + 12 \leq 0$;

В. $\frac{1}{3x^2 - 2x + 7} < 0$;

Г. $2x - 9 > 0$?

2. Укажіть число, що є розв'язком нерівності $x^2 - 2x - 3 < 0$.

А. -2 ;

Б. 2 ;

В. 4 ;

Г. -1 .

3. Укажіть розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - y^2 = 15. \end{cases}$

А. $(1; 4)$;

Б. $(5; 0)$;

В. $(-4; 1)$;

Г. $(4; 1)$.

4. Розв'яжіть нерівність $x^2 + 2x \leq 0$.

А. $[-2; 0]$;

Б. $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$;

В. $(-2; 0)$;

Г. $[0; 2]$.

5. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

А. $(-1; -3)$;

Б. $(3; 1)$;

В. $(3; 1), (-1; -3)$;

Г. $(1; 3), (-3; -1)$.

6. Сума катетів прямокутного трикутника дорівнює 21 см, а його площа – 54 см². Знайдіть менший катет трикутника.

А. 8 см;

Б. 12 см;

В. 10 см;

Г. 9 см.

3 7. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{\sqrt{6 - x - x^2}}{x + 1}$.

- А. $[-3; -1) \cup (-1; 2]$; Б. $(-\infty; +\infty)$;
 В. $(-3; -1) \cup (-1; 2)$; Г. $[-3; 2]$.

8. З двох пунктів, відстань між якими 6 км, одночасно назустріч один одному вирушили два пішоходи і зустрілися через 1 год 12 хв. Знайдіть швидкість того пішохода, який ішов швидше, якщо на весь шлях він витратив на 1 год менше, ніж другий.

- А. 2 км/год; Б. 2,5 км/год; В. 3 км/год; Г. 4 км/год.

9. Не виконуючи побудови, знайдіть усі точки перетину прямої $x + y = 3$ і параболи $y = x^2 + 1$.

- А. (1; 2); Б. (1; 2), (-2; 5);
 В. (-1; 4), (2; 1); Г. (2; 1), (5; -2).

4 10. Укажіть усі розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} x - 2xy = 6, \\ y - 2xy = 3. \end{cases}$

- А. (2; -1), (1,5; -1,5); Б. (-1; 2), (-1,5; 1,5);
 В. система не має розв'язків; Г. (2; -1).

11. Знайдіть усі значення a , при яких рівняння $x^2 + (2 - a)x + 9 = 0$ має два різних корені.

- А. (-4; 8); Б. $(-\infty; -4] \cup [8; +\infty)$;
 В. $(-\infty; -8) \cup (4; +\infty)$; Г. $(-\infty; -4) \cup (8; +\infty)$.

12. Майстер і учень, працюючи разом, виконують деяку роботу за 6 годин. Працюючи самостійно, майстер виконає $\frac{1}{5}$ частини роботи на 3 год швидше, ніж учень $\frac{1}{3}$ частину роботи. За скільки годин виконає роботу учень, якщо працюватиме самостійно?

- А. 9 год; Б. 10 год; В. 12 год; Г. 15 год.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО § 12–14

1 1. Які з нерівностей є квадратними:

- 1) $x^2 + x^3 - 3 \geq 0$; 2) $x^2 + 3x - 3 \geq 0$;
 3) $4x - x^2 < 0$; 4) $\frac{1}{4x - x^2} < 0$?

2. Які із чисел -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 є розв'язками нерівності $x^2 - x - 2 \geq 0$?

3. Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ пара чисел:

1) $(4; 0)$; 2) $(1; 3)$?

2 4. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 - 3x < 0$; 2) $x^2 - 7x - 30 \geq 0$.

5. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

6. Периметр прямокутника дорівнює 24 см, а його площа -35 см². Знайдіть сторони прямокутника.

3 7. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{\sqrt{8 - x^2 + 2x}}{x - 1}$.

8. З двох пунктів, відстань між якими 24 км, вирушили одночасно назустріч один одному велосипедист і пішоход та зустрілися через 2 год. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо велосипедист витратив на весь шлях на 3 год менше, ніж пішоход.

4 9. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3xy - x = 5, \\ 3xy - y = 4. \end{cases}$

Додаткові завдання

4 10. Знайдіть, при яких значеннях a не має коренів рівняння $x^2 + (a - 3)x + 4 = 0$.

11. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати завдання за 12 год. За скільки годин може виконати завдання кожний робітник, працюючи окремо, якщо одному з них для виконання чверті завдання необхідно на 5 год менше, ніж другому для виконання третини завдання?

Вправи для повторення розділу 2

До § 8

1 588. Знайдіть:

1) $f(1)$, $f(2)$, $f(-4)$, якщо $f(x) = x^2 - 1$;
2) $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$, якщо $g(x) = x^3 + 8$.

2 589. Укажіть таке значення x (якщо воно існує), при якому значення функції $g(x) = \frac{6}{x}$ дорівнює:

- 1) 6; 2) 1; 3) 0; 4) -100.

590. Чи належить графіку функції $y = 5x - 7$ точка:

- 1) $A(5; -18)$; 2) $B(0; -7)$; 3) $C(-1; -12)$; 4) $D(1; 2)$?

591. Побудуйте графік функції $y = \frac{10}{x^2 + 1}$, де $-3 \leq x \leq 3$, попередньо заповнивши в зошиті таблицю значень:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

3 592. Наведіть приклад функції, областю визначення якої є:

- 1) множина всіх чисел;
- 2) множина всіх чисел, крім числа 3;
- 3) множина всіх чисел, крім чисел 2 і 9;
- 4) множина всіх чисел, не менших за число 5.

593. Тіло рухалося прямолінійно. Залежність відстані s (у км), яку воно пододало, від часу t (у год) задано так:

$$s(t) = \begin{cases} 4t, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 2; \\ 8, & \text{якщо } 2 < t < 3; \\ 3t - 1, & \text{якщо } 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Знайдіть $s(1)$, $s(2)$, $s(2,5)$, $s(3)$, $s(4)$.

594. Чи належить області значень функції $y = x^2 + 2x$ число:

- 1) 0; 2) -3; 3) -1; 4) 8?

4 595. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{3}{2|x| + x^2}$; 2) $g(x) = \frac{7x}{2 - \frac{1}{x}}$; 3) $\varphi(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$;

4) $g(x) = \frac{7}{1 - \frac{1}{|x|}}$; 5) $\psi(x) = \frac{3}{1 + \frac{1}{|x|}}$;

6) $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{x-5}$; 7) $\varphi(x) = \sqrt{-x^2}$;

8) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x - 1}$; 9) $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$.

596. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$;

2) $g(x) = \sqrt{-(x-1)^2}$;

3) $\varphi(x) = \sqrt{4-x^2}$;

4) $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$;

5) $t(x) = \sqrt{x^2+9} - 5$;

6) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+5}$.

597. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2x^2 - 2}$;

2) $g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}$.

До § 9

1 **598.** Зростаючою чи спадною на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є функція:

1) $y = \frac{8}{x}$;

2) $y = -\frac{6}{x}$;

3) $y = -\frac{0,01}{x}$;

4) $y = \frac{7,51}{x}$?

2 **599.** Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину графіка функції з осями координат:

1) $f(x) = 2x - 4$;

2) $g(x) = \frac{1}{3}x - 6$;

3) $\varphi(x) = x^2 - 2x - 3$;

4) $\psi(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

3 **600.** Знайдіть нулі функції (якщо вони існують):

1) $y = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$;

2) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$;

3) $y = x\sqrt{x-10}$.

601. Знайдіть проміжок, на якому функція $f(x) = 3x + 6$ набуває: 1) додатних значень; 2) від'ємних значень.

4 **602.** Побудуйте графік функції та вкажіть її властивості:

1) $g(x) = \frac{8}{|x|}$;

2) $f(x) = 2|x| - 6$.

До § 10

1 **603.** Як з графіка функції $y = |x|$ отримати графік функції:

1) $y = |x| + 4$;

2) $y = |x| - 3$;

3) $y = |x + 2|$;

4) $y = |x - 3|$;

5) $y = -|x|$;

6) $y = 3|x|$?

2 604. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

- 1) $y = 2x$, $y = 2x - 3$, $y = 2x + 3$;
 2) $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$, $y = (x + 2)^2$.

3 605. Побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = |x - 1| + 2$; 2) $y = 3 - |x|$; 3) $y = |x + 2| - 1$;
 4) $y = -|x| - 1$; 5) $y = -4 + |x - 2|$; 6) $y = |x + 1| + 3$.

606. Побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = 3\sqrt{x}$; 2) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$; 3) $y = -3\sqrt{x}$; 4) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

4 607. Побудуйте графік функції $y = \frac{12}{x + 3} - 4$. За графіком знайдіть:

- 1) область значень функції;
 2) нулі функції;
 3) проміжки зростання функції;
 4) проміжки спадання функції;
 5) значення x , при яких функція набуває додатних значень;
 6) значення x , при яких функція набуває від'ємних значень.



608. 1) Побудуйте графік функції $y = ||x - 1| - 2|$.

2) Використовуючи графік, знайдіть такі значення a , при яких рівняння $||x - 1| - 2| = a$ має рівно три корені.

До § 11

1 609. Вгору чи вниз напрямлені гілки параболи:

- 1) $y = 3x^2 - 2x + 7$; 2) $y = -x^2 + 5x + 9$;
 3) $y = -5x^2$; 4) $y = 0,01x^2 + 5$?

2 610. Чи належить графіку функції $y = 20x^2$ точка:

- 1) $A(\sqrt{2}; 40)$; 2) $B(-0,1; 2)$;
 3) $C(-\sqrt{5}; -100)$; 4) $D\left(\frac{1}{2}; 5\right)$?

611. Знайдіть координати вершини параболи:

- 1) $y = x^2 + 2x - 7$; 2) $y = -3x^2 + 9x + 4$.

612. Знайдіть нулі квадратичної функції:

- 1) $y = x^2 + 4x + 3$; 2) $y = -2x^2 - 3x - 1$;
 3) $y = x^2 + 2x - 8$; 4) $y = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

613. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 - 4x$; 2) $y = 2x - x^2$;
 3) $y = x^2 - 2x + 3$; 4) $y = -x^2 + 6x - 8$.

3 614. Побудуйте графік функції $f(x) = 2x^2 + 4x$. За графіком знайдіть:

- 1) $f(1)$, $f(-0,5)$, $f(-2,5)$;
 2) значення x , при яких $f(x) = 6$; $f(x) = -2$; $f(x) = 2$;
 3) нулі функції;
 4) розв'язки нерівностей $f(x) < 0$ і $f(x) > 0$;
 5) найбільше і найменше значення функції;
 6) область значень функції;
 7) проміжок зростання і проміжок спадання функції.

615. Графіку функції $y = -2x^2 + 3x + c$ належить точка $A(-1; 4)$. Знайдіть коефіцієнт c .

616. При якому значенні a вісь симетрії параболи $y = ax^2 + 8x + 1$ проходить через точку $A(2; -3)$?

617. Знайдіть область значень функції:

- 1) $y = \frac{1}{2}x^2$, якщо $x \in [-2; 4]$;
 2) $y = -\frac{1}{3}x^2$, якщо $x \in [-9; 3]$.

618. На параболі $y = x^2 - 3x$ знайдіть такі точки, у яких різниця ординати й абсциси дорівнює 5.

619. При яких p і q графік функції $y = x^2 + px + q$ проходить через точки $A(-2; 22)$ і $B(1; 4)$?

4 620. Побудуйте графік функції:

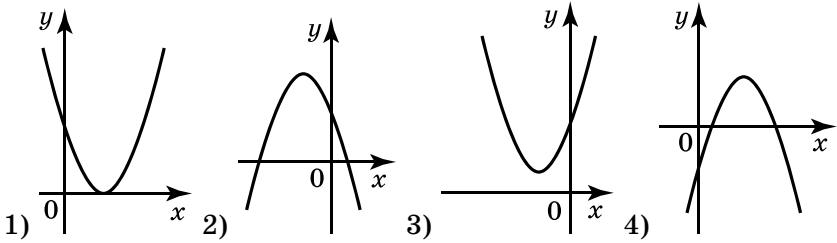
- 1) $y = \begin{cases} -x^2, & \text{якщо } x < -2, \\ 2x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ x^2, & \text{якщо } x > 2; \end{cases}$
 2) $y = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x}{x}$.

621. Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 - 4x + 3 = \frac{12}{x}$.

622. Знайдіть найбільше значення функції $y = -2x^2 + 6x - 5$, областю визначення якої є проміжок:

- 1) $[0; 2]$; 2) $[2; 4]$.

623. На малюнку 73 зображено графік функції $y = ax^2 + bx + c$. Використовуючи малюнок, для кожного з випадків (1–4) укажіть знаки коефіцієнтів a , b , c та дискримінанта D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.



Мал. 73

624. D – дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Зобразіть схематично графік функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:

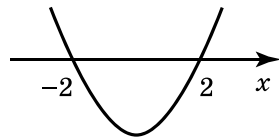
- 1) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $D > 0$;
- 2) $a < 0$, $c = 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$, $D > 0$;
- 3) $a < 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$, $D = 0$;
- 4) $a > 0$, $b < 0$, $D < 0$.

625. При яких значеннях a функція $y = (a - 1)x^2 + 2x + 7$ набуває додатних значень для будь-якого значення x ?

До § 12

626. На малюнку 74 схематично зображено графік функції $y = x^2 - 4$. Використовуючи малюнок, запишіть розв'язки нерівності:

- 1) $x^2 - 4 > 0$;
- 2) $x^2 - 4 \geq 0$;
- 3) $x^2 - 4 < 0$;
- 4) $x^2 - 4 \leq 0$.



Мал. 74

627. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 + 7x > 0$;
- 2) $-x^2 - 5x \leq 0$;
- 3) $x^2 - 1 < 0$;
- 4) $-x^2 + 16 \geq 0$.

628. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $2x^2 + 3x - 5 > 0$;
- 2) $3x^2 - 7x - 10 \leq 0$.

629. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 > 0,04$; 2) $-x^2 \leq -\frac{9}{25}$; 3) $3x^2 \geq x$; 4) $-5x^2 < 2x$.

3 630. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 - 2x - 9 \geq 0$; 2) $x^2 - 11 + 4x < 0$;
 3) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 > 0$; 4) $6x + x^2 + 9 \geq 0$;
 5) $-x^2 - 8x - 16 < 0$; 6) $x^2 + x + 9 \geq 0$.

631. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x^2 - 1}{4} > 5 + x$; 2) $(x - 4)(x - 5) \leq 2$;
 3) $6x^2 - 14x + 12 \geq (x - 3)^2$; 4) $\frac{x^2 - 4}{3} < \frac{x - 2}{2}$.

632. Одна сторона прямокутника на 2 см менша за другу. Якої довжини може бути ця сторона, якщо площа прямокутника менша від 35 см^2 ?

633. При яких додатних значеннях x справджується нерівність $x^2 \leq 4x + 21$?

634. Знайдіть розв'язки нерівності $0,8x^2 + x - 0,3 \leq 0$, що належать проміжку $\left[-2; -\frac{4}{3}\right]$.

4 635. При яких значеннях c множиною розв'язків нерівності $x^2 - 10x + c < 0$ є проміжок:

1) (2; 8); 2) (1; 9)?

636. Запишіть подвійну нерівність у вигляді системи нерівностей і розв'яжіть її:

1) $1 < x^2 \leq 4$; 2) $0 < x^2 + x \leq 6$.

637. При яких значеннях a розв'язком нерівності $x^2 - (a^2 - 2a - 3)x + a^2 + 2 < 0$ є проміжок (2; 3)?

638. При яких значеннях m графіки функцій $y = mx^2 - x$ і $y = mx + 1 - 2m$ не мають спільних точок?

639. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 2(a - 1)x - (9a + 5) = 0$ відносно змінної x .

640. Для кожного значення a розв'яжіть нерівність (де x – змінна):

- 1) $x^2 + x(2 + a) + 2a < 0$;
 2) $x^2 - x(a - 3) - (2a^2 + 6a) \geq 0$.

641. Для кожного значення m розв'яжіть систему нерівностей, де x – змінна:

- 1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ x < m; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 < 0, \\ x \geq m. \end{cases}$

До § 13

1 642. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$ пара чисел:

- 1) (3; 0); 2) (4; 1); 3) (-4; -1); 4) (-1; -4)?

2 643. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

- 1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 3x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x^2, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x = 3. \end{cases}$

644. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

- 1) $\begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 + y - 2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - 2x = 5, \\ xy = 18. \end{cases}$

3 645. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

- 1) $\begin{cases} y = 2(x - 1)^2 + 3, \\ xy = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 4, \\ y = -x^2 + 6x - 8. \end{cases}$

646. Розв'яжіть систему рівнянь:

- 1) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$

647. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:

- 1) $\begin{cases} 5y^2 + x^2 = 29, \\ 2y^2 + x^2 = 17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2y = 5, \\ 5x^2 + 3y = 39; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 3x^2 + xy = 10, \\ 2x^2 + 5xy = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 1, \\ \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 0. \end{cases}$

4 648. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = |x - 3|, \\ \frac{1}{4}xy - 1 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = |x| - 1, \\ y - x^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

649. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} xy - x - 2y = 7, \\ 3xy - x - 3y = 13; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 - xy = 6, \\ y^2 - xy = -2. \end{cases}$$

650. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 11, \\ \frac{x}{y}(x + y) = 24; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x + 3y}{x - y} - \frac{x - y}{x + 3y} = \frac{24}{5}, \\ 5x + 8y = 18. \end{cases}$$

До § 14

2 651. Різниця двох чисел дорівнює 3, а їх добуток дорівнює 10. Знайдіть ці числа.

652. Сума двох чисел дорівнює 12, а різниця їх квадратів – 24. Знайдіть ці числа.

653. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо їх сума дорівнює 12 см, а площа трикутника дорівнює 16 см².

3 654. Добуток двох чисел дорівнює 20, а сума першого числа і потроєного другого дорівнює 19. Знайдіть ці числа.

655. Діагональ прямокутника дорівнює 15 см, а його площа – 108 см². Знайдіть сторони прямокутника.

656. Сума площ квадратів, побудованих на катетах прямокутного трикутника, дорівнює 41 см², а площа трикутника – 10 см². Знайдіть катети трикутника.

657. Сума квадратів цифр двоцифрового числа дорівнює 34. Якщо до цього числа додати 18, то отримаємо число, що записано тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайдіть це число.

658. Площа прямокутника дорівнює 40 см². Якщо одну з його сторін збільшити на 2 см, а другу – на 1 см, то матимемо прямокутник з площею 60 см². Знайдіть периметр початкового прямокутника.

- 659.** З міста A до міста B , відстань між якими 240 км, одночасно виїхали дві автівки. Через 2 год виявилось, що перша проїхала на 20 км більше, ніж друга. Знайдіть швидкість кожної автівки, якщо на весь шлях перша витрачає на 20 хв менше, ніж друга.
- 660.** У кілька однакових кошиків розклали порівну 24 кг малини. Якби в кожен кошик поклали на 1 кг малини більше, то 2 кошики виявилися б зайвими. Скільки було кошиків?
- 661.** (*Задача Маклорена*). Кілька осіб пообідали разом і мали заплатити за обід 175 шилінгів. З'ясувалося, що у двох не було із собою коштів, тому інші заплатили на 10 шилінгів більше, ніж мали заплатити. Скільки осіб пообідало разом?
- 4 662.** Яке двоцифрове число на 4 менше від суми квадратів його цифр і на 5 більше за їх подвоєний добуток?
- 663.** Периметр ділянки прямокутної форми дорівнює 360 м. Якщо довжину ділянки зменшити на 20 м, а ширину – на 30 м, то площа ділянки зменшиться вдвічі. Знайдіть розміри ділянки, якщо її довжина більша за ширину.
- 664.** Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати певне завдання за 12 год. Якщо спочатку половину роботи виконає перша бригада, а потім друга її завершить, то всю роботу буде виконано за 25 год. За скільки годин може виконати завдання кожна бригада, працюючи самостійно?
- 665.** Робітник мав виготовити 200 деталей. Перші два дні він виконував денну норму, а потім щодня виготовляв на 4 деталі більше, ніж передбачено нормою. Тому вже за день до кінця терміну було виготовлено 208 деталей. Скільки деталей щодня мав виготовляти робітник за нормою?

Розділ 3

Числові послідовності

У цьому розділі ви:

- **ознайомитесь** із числовою послідовністю, арифметичною та геометричною прогресіями; формулами n -го члена арифметичної та геометричної прогресій, суми n перших членів цих прогресій, суми нескінченної прогресії;
- **навчитесь** розв'язувати вправи та прикладні задачі, пов'язані з арифметичною та геометричною прогресіями; записувати періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного.

§ 15. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Приклад 1. Запишемо в порядку зростання натуральні парні числа:

2; 4; 6; 8; 10;

Маємо *послідовність* парних натуральних чисел. На першому місці в ній записано число 2, на другому – число 4, на п'ятому – 10. Якщо продовжити записувати парні натуральні числа далі, то, наприклад, на десятому місці буде число 20, на сотому – число 200. Узагалі, для будь-якого натурального числа n можна вказати натуральне парне число, що стоїть на n -му місці. Таким числом буде число $2n$.

Числа, які утворюють послідовність, називають відповідно першим, другим, третім, четвертим тощо *членами послідовності*. Члени послідовності прийнято позначати буквами з індексами, які відповідають порядковому номеру члена послідовності. Наприклад: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ (читають « a перше, a друге, a третє, a четверте» тощо). У нашому прикладі $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8, \dots$. Член послідовності з номером n , або, як кажуть, *n -й член послідовності*, позначають a_n . Саму послідовність прийнято позначати (a_n) .

Розглянемо два сусідніх члени послідовності з номерами k і $k + 1$, а саме a_k і a_{k+1} . Член a_{k+1} називають *наступним* за a_k , а член a_k – *попереднім* до a_{k+1} .

Оскільки в послідовності парних натуральних чисел на n -му місці стоїть число $2n$, то можна записати, що $a_n = 2n$.

Отримали формулу n -го члена послідовності парних натуральних чисел.

Ця послідовність містить нескінченну кількість членів, тому таку послідовність називають *нескінченною*. Записуючи нескінченну послідовність, після кількох її перших членів ставлять трикрапку. Якщо ж послідовність містить скінченну кількість членів, то її називають *скінченною*.

Приклад 2. Послідовність двоцифрових натуральних чисел 10; 11; 12; ...; 98; 99 є скінченною. Вона містить 90 членів і може бути задана формулою n -го члена: $a_n = n + 9$.

Якщо ми знаємо формулу n -го члена послідовності, то можемо знайти будь-який її член.

Приклад 3. Послідовність задано формулою $b_n = n^2 - n$. Знайдемо кілька її членів: $b_1 = 1^2 - 1 = 0$ - перший, $b_7 = 7^2 - 7 = 42$ - сьомий, $b_{20} = 20^2 - 20 = 380$ - двадцятий, $b_{100} = 100^2 - 100 = 9900$ - сотий.

Формула n -го члена є досить зручним, але не єдиним способом задання послідовності.

Приклад 4. Скінченну послідовність можна задати *переліком її членів*. Наприклад, (c_n) : 1; 8; 17; 9.

Приклад 5. Послідовність можна задати *описом її членів*. Наприклад, послідовність натуральних чисел, які є дільниками числа 18 і які записано в порядку зростання: 1; 2; 3; 6; 9; 18, можна назвати послідовністю натуральних дільників числа 18.

Приклад 6. Скінченну послідовність можна задати у *виді таблиці*. Наприклад,

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	4	3	1	0	-2	-5	-10

Послідовність можна задавати, указавши перший або кілька перших членів послідовності, а потім – формулу, за якою можна знаходити інші члени послідовності через попередні. Таку формулу називають *рекурентною*, а спосіб задання послідовності – *рекурентним*.

Приклад 7. Нехай перший член послідовності (x_n) дорівнює 2, а кожний наступний дорівнює квадрату попереднього, тобто $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n^2$. Тоді за відомим першим членом можна знайти другий: $x_2 = x_1^2 = 2^2 = 4$, за відомим другим можна знайти третій: $x_3 = x_2^2 = 4^2 = 16$ і так само далі.

Матимемо послідовність: 2; 4; 16; 256; 65 536;

Приклад 8. Знайдемо третій, четвертий та п'ятий члени послідовності (y_n) , заданої рекурентно: $y_1 = 2$, $y_2 = -3$, $y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n$.

Матимемо:

$$y_3 = 2y_2 + y_1 = 2 \cdot (-3) + 2 = -4;$$

$$y_4 = 2y_3 + y_2 = 2 \cdot (-4) + (-3) = -11;$$

$$y_5 = 2y_4 + y_3 = 2 \cdot (-11) + (-4) = -26.$$

Послідовності, які ми розглянули вище, є *числовими послідовностями*, оскільки складаються з чисел. Іноді розглядають послідовності, членами яких є вирази, функції тощо. Надалі будемо розглядати лише числові послідовності.



Математики досить давно почали вивчати числові послідовності.

Поняття числової послідовності виникло і закріпилося набагато раніше, ніж вчення про функції. Ось такі нескінченні числові послідовності прийшли до нас із давнини:

- 1) 1, 2, 3, 4, 5, ... – послідовність натуральних чисел;
- 2) 2, 4, 6, 8, 10, ... – послідовність парних натуральних чисел;
- 3) 1, 3, 5, 7, 9, ... – послідовність непарних натуральних чисел;
- 4) 1, 4, 9, 16, 25, ... – послідовність квадратів натуральних чисел;
- 5) 2, 3, 5, 7, 11, ... – послідовність простих чисел;
- 6) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ – послідовність чисел, обернених до натуральних.

Для всіх цих послідовностей, крім п'ятої, можна записати формулу n -го члена. Для послідовності простих чисел формула n -го члена була невідомою давнім математикам... Невідома вона і донині!

Однією з найвідоміших є числова послідовність, яку називають *послідовністю Фібоначчі*, на честь італійця *Л. Пізанського (Фібоначчі)* (бл. 1170 – після 1228). Він першим розглянув послідовність чисел, перші два члени якої – одиниці і кожний член якої, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх:

$$1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144 \dots$$

Лише через кілька століть було знайдено формулу n -го члена послідовності Фібоначчі:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$



1. Наведіть приклад числової послідовності.
2. Назвіть три перших члени цієї послідовності.
3. Наведіть приклад числової послідовності, заданої формулою n -го члена.
4. Як ще можна задавати числову послідовність?
5. Яку послідовність називають нескінченною, а яку – скінченною?



Початковий рівень

666. (Усно). Дано послідовність: 2; 4; 7; 10; 15.

- 1) Скільки членів має ця послідовність?
- 2) Назвіть перший та останній члени цієї послідовності.
- 3) Який номер члена послідовності, що дорівнює 10?
- 4) Який член послідовності є наступним за членом послідовності, що дорівнює 4?
- 5) Який член послідовності попередній до члена послідовності, що дорівнює 15?

667. Послідовність задано формулою $a_n = 5n - 1$. Знайдіть перший, п'ятий та сьомий члени цієї послідовності.

668. Послідовність задано формулою $b_n = 4n + 3$. Знайдіть перший, четвертий та восьмий члени цієї послідовності.

669. Запишіть чотири перших члени послідовності:

- 1) непарних натуральних чисел, узятих у порядку зростання;
- 2) кубів натуральних чисел, узятих у порядку зростання;
- 3) одноцифрових натуральних чисел, узятих у порядку спадання.

670. Випишіть п'ять перших членів послідовності:

- 1) квадратів натуральних чисел, узятих у порядку зростання;
- 2) двоцифрових натуральних чисел, узятих у порядку спадання.



Середній рівень

671. Знайдіть чотири перших члени послідовності (x_n) , яку задано формулою:

- 1) $x_n = 4n^2 - 17$;
- 2) $x_n = \frac{n^2}{n + 1}$;
- 3) $x_n = \frac{2n - 17}{n + 3}$;
- 4) $x_n = \frac{n^3}{2n}$.

672. Знайдіть три перших члени послідовності (y_n) , яку задано формулою:

$$1) y_n = 2n^2 + 3; \quad 2) y_n = \frac{n^2 - 1}{n};$$

$$3) y_n = \frac{4n - 5}{n + 1}; \quad 4) y_n = \frac{3^n}{n^2}.$$

673. Послідовність задано формулою $b_n = 4n + 17$. Знайдіть номер члена послідовності, що дорівнює 65.

674. Послідовність задано формулою $a_n = 5 - 3n$. Знайдіть номер члена послідовності, що дорівнює -46.

675. 1) Задайте таблицю п'ять перших членів послідовності натуральних чисел, які кратні числу 3.

2) Знайдіть номер члена цієї послідовності, що дорівнює 12.



Достатній рівень

676. Послідовність задано формулою $y_n = 2n^2 - 18n + 7$. Які із чисел є членами цієї послідовності:

$$1) 7; \quad 2) -29; \quad 3) 50; \quad 4) 79?$$

Для чисел, що є членами послідовності, укажіть їх номери.

677. Послідовність задано формулою $x_n = n^2 - 4n + 9$. Які із чисел є членами цієї послідовності:

$$1) 69; \quad 2) 68; \quad 3) 5; \quad 4) 6?$$

Для чисел, що є членами послідовності, укажіть їх номери.

678. Знайдіть п'ять перших членів послідовності (c_n) , яку задано рекурентно:

$$1) c_1 = 8, c_{n+1} = c_n - 5;$$

$$2) c_1 = -3, c_{n+1} = 2 \cdot c_n + 3;$$

$$3) c_1 = -2, c_2 = 3, c_{n+2} = c_{n+1} + c_n;$$

$$4) c_1 = 0, c_2 = -5, c_{n+2} = \frac{c_{n+1}}{c_n + 1}.$$

679. Знайдіть п'ять перших членів послідовності (y_n) , яку задано рекурентно:

$$1) y_1 = 5, y_{n+1} = 2y_n - 7; \quad 2) y_1 = 16, y_2 = 1, y_{n+2} = \frac{y_n}{2y_{n+1}}.$$



Високий рівень

680. Знайдіть найбільший член послідовності, заданої формулою n -го члена:

1) $a_n = 26 - n^2$;

2) $b_n = -2n^2 + 16n$;

3) $c_n = (-1)^n$;

4) $y_n = -n^2 + 5n$.

681. Знайдіть найменший член послідовності, заданої формулою n -го члена:

1) $x_n = 2n^2 - 3$;

2) $a_n = n^2 - 8n - 5$.

682. Доведіть, що послідовність (p_n) , де $p_n = 2n^2 + 6n - 5$, не містить найбільшого члена, а послідовність $t_n = -n^2 - 4n$ не містить найменшого члена.



Вправи для повторення



683. Товар коштував 150 грн. Через деякий час він подорожчав до 165 грн. На скільки відсотків підвищилася ціна товару?



684. Обчисліть: $\frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{5} - 3} + \frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{5} + 3}$.



685. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ xy + y^2 = 4. \end{cases}$$



Життєва математика

686. До встановлення лічильників деяка родина за користування водою щомісяця сплачувала 560 грн. Після встановлення двох лічильників (на холодну і на гарячу воду) щомісячна сплата за воду зменшилася до 350 грн. Один лічильник води коштує 370 грн, а його встановлення – 120 грн. Через яку найменшу кількість місяців економія на сплаті за воду перевищить витрати на придбання та встановлення лічильників, якщо тарифи на воду не змінюватимуться?



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

687. 1) Запишіть числову послідовність, що містить десять членів, у якій перший член дорівнює 2, а кожний наступний – на 3 більший за попередній.

2) Запишіть формулу n -го члена цієї послідовності.

688. Знайдіть закономірність і продовжте ряд чисел, записавши чотири наступних числа ряду:

- 1) 42, 45, 48, 51, ...; 2) 6, 1, -4, -9, ...;
 3) 15, 0, -15, -30, ...; 4) -13, -9, -5, -1,



Цікаві задачі для учнів неледачих



689. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$$



16. АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ. ФОРМУЛА n -ГО ЧЛЕНА АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Розглянемо числову послідовність, перший член якої дорівнює 4, а кожний наступний, починаючи з другого, дорівнює попередньому, доданому до числа 3:

$$\overbrace{4}^{+3}; \overbrace{7}^{+3}; \overbrace{10}^{+3}; \overbrace{13}^{+3}; \overbrace{16}^{+3}; \overbrace{19}^{+3}; \dots$$

Таку послідовність називають *арифметичною прогресією*.



Послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, доданому до одного й того самого числа, називають *арифметичною прогресією*.

Це число називають *різницею арифметичної прогресії* і позначають буквою d (від початкової літери латинського слова *differentia* – різниця). Тому якщо (a_n) – арифметична прогресія, то справджуються рівності:

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d, \quad a_4 = a_3 + d, \quad \dots$$

Отже, для будь-якого натурального n справджується рівність:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Тоді

$$d = a_{n+1} - a_n,$$

тобто



різницю арифметичної прогресії можна знайти, якщо від будь-якого члена прогресії, починаючи з другого, відняти попередній.

Нехай перший член арифметичної прогресії дорівнює a_1 , а її різниця дорівнює d . Тоді

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d;$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d.$$

Помічаємо, що в кожній з отриманих формул коефіцієнт біля різниці d на 1 менший від порядкового номера члена прогресії, для якого записано цю формулу. Справді, адже щоб знайти a_n , маючи a_1 і d , треба $n - 1$ разів додати до a_1 число d , тобто до a_1 додати $(n - 1)d$. Маємо:



$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Отримали формулу n -го члена арифметичної прогресії.

Розглянемо кілька вправ на застосування цієї формули.

Приклад 1. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія, $a_1 = 32,8$, $d = -0,4$. Знайти двадцятий член цієї послідовності.

Розв'язання.

$$a_{20} = a_1 + d(20 - 1) = a_1 + 19d = 32,8 + 19(-0,4) = 25,2.$$

Відповідь. 25,2.

Приклад 2. Чи належить арифметичній прогресії 7; 10; 13; ... число: 1) 82; 2) 102?

Розв'язання. У даній прогресії $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, тоді $d = a_2 - a_1 = 3$. Складемо формулу n -го члена цієї прогресії:

$$a_n = 7 + 3(n - 1) = 3n + 4, \text{ тобто } a_n = 3n + 4.$$

1) Припустимо, що число 82 є членом прогресії (a_n) . Тоді існує таке натуральне число n , що $a_n = 82$, тобто $3n + 4 = 82$. Маємо рівняння: $3n + 4 = 82$,

$$3n = 78,$$

$$n = 26.$$

Отже, число 82 є двадцять шостим членом арифметичної прогресії, тобто $a_{26} = 82$.

2) Міркуючи в той самий спосіб, маємо: $3n + 4 = 102$,

$$3n = 98,$$

$$n = 32\frac{2}{3}.$$

Число $32\frac{2}{3}$ не є натуральним, тому арифметична прогресія числа 102 не містить.

Відповідь. 1) Так; 2) ні.

Приклад 3. Кубики складено рядами так, що у верхньому ряду 4 кубики, а в кожному ряду, що нижче, – на одну й ту саму кількість кубиків більше, ніж у попередньому. Відомо, що в шостому ряду 14 кубиків. Скільки кубиків у третьому ряду?

Розв'язання. Оскільки в кожному нижньому ряду на одну й ту саму кількість кубиків більше, ніж у попередньому, то числа, що дорівнюють кількості кубиків у рядах, утворюють арифметичну прогресію.

У цій прогресії $a_1 = 4$, $a_6 = 14$, отже, нам треба знайти a_3 .

Знайдемо спочатку різницю d цієї прогресії. Оскільки за формулою n -го члена $a_6 = a_1 + 5d$, маємо рівняння:

$$14 = 4 + 5d,$$

$$5d = 10,$$

$$d = 2.$$

Тепер, знаючи значення d , знайдемо a_3 :

$$a_3 = a_1 + 2d = 4 + 2 \cdot 2 = 8.$$

Отже, у третьому ряду 8 кубиків.

Зауважимо, що знайти d можна було і не використовуючи рівняння, наприклад виразивши d з формули 6-го члена прогресії. Дійсно, оскільки $a_6 = a_1 + 5d$, то

$$d = \frac{a_6 - a_1}{5} = \frac{14 - 4}{5} = 2.$$

Відповідь. 8 кубиків.

Доведемо деякі важливі властивості арифметичної прогресії.



1. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів, тобто

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ де } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Доведення. Для доведення використаємо формулу n -го члена арифметичної прогресії, тоді

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} &= \frac{a_1 + d((n-1)-1) + a_1 + d((n+1)-1)}{2} = \\ &= \frac{2a_1 + d(n-1-1+n)}{2} = \frac{2a_1 + 2d(n-1)}{2} = \\ &= \frac{2a_1}{2} + \frac{2d(n-1)}{2} = a_1 + d(n-1) = a_n. \end{aligned}$$

За однією з версій саме із цією властивістю арифметичної прогресії і пов'язано її назву.



2. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох рівновіддалених від нього членів, тобто

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \text{ де } n \in N, k \in N, k < n, n \geq 2.$$

Властивість доводиться аналогічно до попередньої властивості.



3. Якщо k, l, p і s – натуральні числа і $k + l = p + s$, то $a_k + a_l = a_p + a_s$.

Доведення. Використаємо формулу n -го члена, тоді:

$$a_k + a_l = a_1 + d(k-1) + a_1 + d(l-1) = 2a_1 + d(k+l-2);$$

$$a_p + a_s = a_1 + d(p-1) + a_1 + d(s-1) = 2a_1 + d(p+s-2).$$

Але $k + l = p + s$, тому $2a_1 + d(k+l-2) = 2a_1 + d(p+s-2)$, тобто $a_k + a_l = a_p + a_s$.



4. Будь-яку арифметичну прогресію можна задати формулою $a_n = dn + b$, де b і d – деякі числа.

Доведення. За формулою n -го члена маємо:

$$a_n = a_1 + d(n-1) = dn + (a_1 - d).$$

Позначивши $a_1 - d = b$, матимемо: $a_n = dn + b$.



5. Послідовність a_n , яку задано формулою вигляду $a_n = dn + b$, де b і d – деякі числа, є арифметичною прогресією.

Доведення. Знайдемо різницю $(n+1)$ -го і n -го членів цієї послідовності:

$$a_{n+1} - a_n = d(n+1) + b - (dn + b) = dn + d + b - dn - b = d.$$

Отримали, що для будь-якого n справджується рівність $a_{n+1} = a_n + d$. Отже, послідовність (a_n) є арифметичною прогресією, різниця якої дорівнює d .

А ще раніше...

Перші уявлення про арифметичну прогресію з'явилися ще до нашої ери. У давньо-египетському папірусі Ахмеса (II тис. до н. е.) є така задача: «Нехай тобі сказано: поділи 10 мір ячменю між десятима людьми так, щоб кожен отримав на $\frac{1}{8}$ міри більше, ніж сусід».

Розв'язання задачі зводиться до знаходження десяти членів арифметичної прогресії: $a + \frac{1}{8}$, $a + \frac{2}{8}$, ..., $a + \frac{9}{8}$, сума яких дорівнює 10.

Задачі на арифметичні прогресії є і в давньоєгипетському трактаті «Математика в дев'яти книгах».

Перші задачі про арифметичні прогресії, що дійшли до нас, пов'язані з діяльністю людини (розподіл продуктів, спадщини тощо).

Давні греки теорію арифметичної прогресії асоціювали з так званою арифметичною пропорцією:

$$a - b = b - c.$$

Якщо числа a , b і c поєднані між собою такою властивістю, то вони утворюють арифметичну прогресію, різниця якої дорівнює $\frac{c - a}{2}$.

Таким чином, прогресію розглядали як продовження арифметичної пропорції, а тому назву *арифметична* було перенесено з пропорції на прогресію. Це одна з версій, чому ця прогресія отримала саме таку назву.



1. Яку послідовність називають арифметичною прогресією?
2. Яке число називають різницею арифметичної прогресії?
3. Як можна знайти різницю арифметичної прогресії?
4. Запишіть формулу n -го члена арифметичної прогресії.
5. Сформулюйте і доведіть властивості арифметичної прогресії.



Початковий рівень

690. Які з послідовностей є арифметичними прогресіями? Укажіть для них перший член і різницю.

- 1) 2; 5; 8; 11; 2) 4; 4; 4; 4; 3) 0; 1; 5; 10;
4) 4; -4; 4; -4; 5) -5; -4; -3; -2; 6) 0; 1; 0; 2.

691. Чи є арифметичною прогресією послідовність:

- 1) натуральних чисел: 1; 2; 3; 4; 5; ...;
- 2) квадратів натуральних чисел: 1; 4; 9; 16; 25; ...;
- 3) непарних натуральних чисел: 1; 3; 5; 7; 9; ...;
- 4) правильних дробів із чисельником 1: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; ...?



Середній рівень

- 692.** Запишіть п'ять перших членів арифметичної прогресії (a_n) , різниця якої дорівнює d :
- 1) $a_1 = 5, d = 4$; 2) $a_1 = 4,7, d = -0,7$.
- 693.** Запишіть чотири перших члени арифметичної прогресії (a_n) , різниця якої дорівнює d :
- 1) $a_1 = 4, d = -2$; 2) $a_1 = 3,8, d = 0,2$.
- 694.** Знайдіть три наступних члени арифметичної прогресії 4,2; 3,8; 3,4;
- 695.** Знайдіть чотири наступних члени арифметичної прогресії 5,7; 6,1; 6,5;
- 696.** Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:
- 1) a_7 , якщо $a_1 = 3, d = -8$; 2) a_{12} , якщо $a_1 = 2,7, d = 0,4$.
- 697.** В арифметичній прогресії (a_n) $a_1 = -15, d = 3,7$. Знайдіть:
- 1) a_2 ; 2) a_5 ; 3) a_{10} ; 4) a_{101} .
- 698.** Знайдіть різницю, десятий і вісімнадцятий члени арифметичної прогресії:
- 1) $1; \frac{1}{2}; 0; \dots$; 2) $0; 1,5; 3; \dots$.
- 699.** Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n) , якщо:
- 1) $a_2 = 8, d = -5$; 2) $a_{10} = 7, d = 4$.
- 700.** Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n) , якщо:
- 1) $a_2 = -7, d = 4$; 2) $a_8 = 5, d = -2$.
- 701.** Знайдіть різницю арифметичної прогресії, у якої перший член дорівнює 8, а одинадцятий – 33.
- 702.** Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = -5, a_9 = 7$.
- 703.** Тіло за першу секунду пододало 5 м, а за кожен наступну – на 2 м більше, ніж за попередню. Скільки метрів пододало тіло за шосту секунду; за десятю секунду?
- 704.** Учень прочитав книжку за 10 днів. У перший день він прочитав 40 сторінок, а кожного наступного дня читав на 3 сторінки менше, ніж попереднього. Скільки сторінок учень прочитав за третій день; за останній день?



Достатній рівень

705. Між числами 3 і 7 вставте:

- 1) одне число; 2) два числа; 3) три числа
таких, щоб вони разом з даними утворювали арифметичну прогресію.

706. Між числами 15 і 30 вставте чотири таких числа, щоб вони разом з даними утворювали арифметичну прогресію.

707. Знайдіть формулу n -го члена арифметичної прогресії:

- 1) $2x, 5x, 8x, \dots$; 2) $\frac{m-1}{m}, 1, \frac{m+1}{m}, \dots$

708. Знайдіть перший член та різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

- 1) $a_{18} = 5, a_{19} = 3$;
2) $a_4 = 11, a_{20} = 43$.

709. Знайдіть перший член та різницю арифметичної прогресії (c_n) , якщо:

- 1) $c_{17} = 3, c_{18} = 6$;
2) $c_8 = -22, c_{14} = -40$.

710. Чи містить арифметична прогресія 5; 8; 11; ... число:

- 1) 92; 2) 112?

711. В арифметичній прогресії (x_n) $x_1 = 12, d = -2,5$. Чи є членом цієї прогресії число:

- 1) -7; 2) -23?

712. Знайдіть номер першого від'ємного члена арифметичної прогресії (y_n) , у якої $y_1 = 12; d = -0,4$.

713. Знайдіть номер першого додатного члена арифметичної прогресії -5; -4,8; -4,6; ...

714. Арифметичну прогресію задано формулою $a_n = 5n - 7$. Знайдіть:

- 1) різницю прогресії;
2) суму $a_5 + a_6 + a_7$.

715. При яких значеннях x числа $x^2 + 2, 4x - 2, x$ є послідовними членами арифметичної прогресії?

716. При яких значеннях y числа $y + 3, 2y + 3, y^2 - 1$ є послідовними членами арифметичної прогресії?



Високий рівень

717. При якому значенні m числа $m^2 - 4$, m , $2m + 3$ і $4m^2 + 5$ є послідовними членами арифметичної прогресії?

718. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:

1) $a_5 + a_{19}$, якщо $a_1 + a_{23} = -37$;

2) a_{17} , якщо $a_{10} + a_{24} = 5$.

719. Послідовність (b_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:

1) $b_9 + b_{11}$, якщо $b_1 + b_{19} = -25$;

2) $b_7 + b_{13}$, якщо $b_{10} = 2,7$.

720. Доведіть, що коли числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ і $\frac{1}{a+b}$ утворюють арифметичну прогресію, то числа a^2 , b^2 і c^2 також утворюють арифметичну прогресію.

721. Доведіть, що коли числа a^2 , b^2 і c^2 утворюють арифметичну прогресію, то числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ і $\frac{1}{a+b}$ також утворюють арифметичну прогресію.



Життєва математика

722. Для транспортування 40 тонн вантажу на відстань 1200 км можна скористатися послугами однієї з трьох компаній-перевізників. Вартість перевезення і вантажопідйомність автомобілів у кожного перевізника подано в таблиці. Скільки доведеться заплатити за найдешевше перевезення вказаного вантажу?

Перевізник	Вартість перевезення одним автомобілем (грн на 100 км)	Вантажопідйомність автомобілів (тонн)
А	800	3,5
Б	1000	5
В	2300	12



Вправи для повторення



723. Спростіть вираз:

1) $-4p^2t \cdot (-0,5p^3t^4)$;

2) $\frac{39p^3}{5a} : 13p^7a^5$.

3 724. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0;$$

$$2) (x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) - 3 = 0.$$

725. Чи кратне значення виразу $8^6 - 4^7$ числу 6?

4 726. Знайдіть область визначення функції:

$$y = \sqrt{10 - 9x - x^2} + \frac{x + 1}{x^2 - 3x}.$$



Цікаві задачі для учнів неледачих



727. Доведіть нерівність $(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6) + 1 \geq 0$.

§ 17. СУМА n ПЕРШИХ ЧЛЕНІВ АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Розглянемо n перших членів арифметичної прогресії (a_n) : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$. Позначимо через S_n їх суму:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Знайдемо формулу для обчислення цієї суми. Запишемо цю суму двічі, розмістивши в першому випадку доданки в порядку зростання їх номерів, а у другому – у порядку спадання:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n;$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Тепер ці рівності додамо почленно, матимемо:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1). (*)$$

Але за властивістю 3 з попереднього параграфа: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{n-1} + a_2$, тобто кожна сума в дужках у рівності (*) дорівнює $a_1 + a_n$, оскільки $1 + n = 2 + n - 1 = 3 + n - 2 = \dots = n - 1 + 2$. Тоді у правій частині рівності (*) маємо n доданків, кожний з яких дорівнює $a_1 + a_n$. Отже,

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n).$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на 2, отримаємо формулу суми n перших членів арифметичної прогресії:



$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \quad (1)$$

Якщо у формулі (1) за формулою n -го члена a_n замінити виразом $a_1 + d(n - 1)$, матимемо:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n,$$

тобто



$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n. \quad (2)$$

Маємо ще одну формулу для обчислення суми n перших членів арифметичної прогресії, якою зручно користуватися, коли відомо перший член і різницю прогресії.

Застосуємо формули (1) і (2) для розв'язування вправ.

Приклад 1. Знайти суму тридцяти перших членів арифметичної прогресії 4; 7; 10;

Розв'язання.

1-й спосіб. Оскільки $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, то $d = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$ і $a_{30} = a_1 + 29d = 4 + 29 \cdot 3 = 91$.

Тоді за формулою (1): $S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{4 + 91}{2} \cdot 30 = 1425$.

2-й спосіб. Оскільки $a_1 = 4$ і легко знайти, що $d = 3$, можемо використати формулу (2):

$$S_{30} = \frac{2a_1 + 29d}{2} \cdot 30 = \frac{2 \cdot 4 + 3(30 - 1)}{2} \cdot 30 = 1425.$$

Відповідь. 1425.

Приклад 2. Знайти суму вісімнадцяти перших членів послідовності (a_n) , заданої формулою $a_n = -2n + 7$.

Розв'язання. Оскільки послідовність задано формулою $a_n = dn + b$, де $d = -2$; $b = 7$, то вона є арифметичною прогресією (за властивістю 5 попереднього параграфа).

Маємо:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \cdot 1 + 7 = 5, \\ a_{18} &= -2 \cdot 18 + 7 = -29. \end{aligned}$$

Знайдемо S_{18} :

$$S_{18} = \frac{a_1 + a_{18}}{2} \cdot 18 = \frac{5 + (-29)}{2} \cdot 18 = -216.$$

Відповідь. -216.

Приклад 3. Знайти суму всіх натуральних чисел, які кратні числу 7 та не перевищують 999.

Розв'язання. Натуральні числа, що кратні числу 7, утворюють арифметичну прогресію: 7; 14; 21; 28; ... , яку можна задати формулою $a_n = 7n$.

Знайдемо, скільки членів цієї прогресії не перевищують числа 999. Для цього розв'яжемо нерівність $7n \leq 999$ і отримаємо, що $n \leq 142\frac{5}{7}$.

Отже, 142 члени прогресії не перевищують числа 999. Знайдемо їх суму, тобто S_{142} .

Маємо: $a_1 = 7$, $a_{142} = 7 \cdot 142 = 994$. Тоді

$$S_{142} = \frac{7 + 994}{2} \cdot 142 = 71\,071.$$

Відповідь. 71 071.

Приклад 4. З двох точок, відстань між якими 100 м, одночасно назустріч один одному починають рухатися два об'єкти. Перший рухається рівномірно зі швидкістю 9 м/с, а другий за першу секунду проходить 7 м, а за кожну наступну – на 2 м більше, ніж за попередню. Через скільки секунд вони зустрінуться?

Розв'язання. Нехай об'єкти зустрінуться через n секунд. Перший за цей час подолає $9n$ м. Відстані, що подолає другий об'єкт за першу, другу, третю і наступні секунди, утворюють арифметичну прогресію, у якій $a_1 = 7$, $d = 2$. Тоді за n секунд другий об'єкт подолає відстань S_n , яку можна обчислити за формулою:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 7 + 2(n-1)}{2} \cdot n =$$

$$= (7 + (n-1)) \cdot n = (n+6)n = n^2 + 6n.$$

За умовою $9n + (n^2 + 6n) = 100$, тоді $n^2 + 15n - 100 = 0$, звідки $n_1 = 5$, $n_2 = -20$. Другий корінь не відповідає змісту задачі. Отже, $n = 5$, тобто зустріч відбудеться через 5 секунд.

Відповідь. 5 секунд.



Уже в V ст. до н. е. греки знали кілька прогресій та їх суми, зокрема:

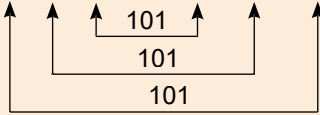
$$1) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$2) 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1);$$

$$3) 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \text{ та інші.}$$

З обчисленням суми арифметичної прогресії пов'язана цікава історія, що трапилася з видатним німецьким математиком *Карлом Гауссом* (1777–1855), який, ще навчаючись у школі, виявив надзвичайні математичні здібності. Одного разу вчитель запропонував учням знайти суму ста перших натуральних чисел. Маленький Гаусс розв'язав цю задачу за мить. Він помітив, що значення сум $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, ... однакові, а кількість таких сум дорівнює 50:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = 101 \cdot 50 = 5050.$$



Запишіть формули, за якими обчислюють суму n перших членів арифметичної прогресії.



Початковий рівень

- 728.** Знайдіть S_8 – суму восьми перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 5$, $a_8 = 10$.
- 729.** Знайдіть S_{10} – суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 7$, $a_{10} = 15$.



Середній рівень

- 730.** Знайдіть суму вісімнадцяти перших членів арифметичної прогресії (c_n) , якщо $c_1 = 17$, $d = -2$.
- 731.** Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 15$, $d = -3$.
- 732.** Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії:
1) 2; -1; -4; ...; 2) 5; 6,5; 8;
- 733.** Знайдіть суму тридцяти перших членів арифметичної прогресії:
1) 5; 8; 11; ...; 2) 0; -2,5; -5;
- 734.** Знайдіть суму шістдесяти перших членів арифметичної прогресії (x_n) , якщо $x_n = -5n + 17$.
- 735.** Знайдіть суму вісімдесяти перших членів арифметичної прогресії (y_n) , якщо $y_n = 3n - 19$.

736. Знайдіть суму:

- 1) сорока перших натуральних чисел;
- 2) натуральних чисел від 1 до 70.

737. Знайдіть суму дев'ятнадцяти перших натуральних чисел.

738. Дрова складено так, що в нижньому ряду лежить 15 колод, а в кожному наступному на одну колоду менше, ніж у попередньому. Скільки всього колод у дванадцяти рядах?

739. В одному із секторів цирку 14 рядів, причому в першому ряду 5 місць, а в кожному наступному на одне місце більше, ніж у попередньому. Скільки всього місць у цьому секторі?



Достатній рівень

740. Знайдіть суму:

- 1) усіх натуральних чисел від 125 до 317 включно;
- 2) усіх натуральних чисел, які кратні числу 5 і не більші за число 350;
- 3) усіх натуральних чисел, які кратні числу 9 і не перевищують числа 470;
- 4) усіх двоцифрових натуральних чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 2.

741. Знайдіть суму:

- 1) усіх натуральних чисел, які кратні числу 7 і не перевищують числа 420;
- 2) усіх трицифрових натуральних чисел, які при діленні на 4 дають в остачі 1.

742. Знайдіть суму восьми перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

- 1) $a_1 = 5$, $a_5 = -7$;
- 2) $a_5 = 13$, $a_9 = 19$.

743. Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (x_n) , якщо:

- 1) $x_1 = 4$, $x_6 = -31$;
- 2) $x_3 = 13$, $x_7 = 23$.

744. Знайдіть перший член арифметичної прогресії, якщо сума перших п'ятнадцяти членів цієї прогресії дорівнює 375, а різниця прогресії дорівнює 3.

745. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 7$, а сума восьми її перших членів дорівнює 168.

746. Знайдіть суму додатних членів арифметичної прогресії 19; 17; 15;
747. Знайдіть суму від'ємних членів арифметичної прогресії -23; -20; -17;
748. Скільки треба взяти перших членів арифметичної прогресії 4; 6; 8; ..., щоб їх сума дорівнювала 270?



Високий рівень

749. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії з двадцятого по сороковий включно, якщо перший член прогресії дорівнює 8, а різниця прогресії дорівнює -0,6.
750. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії 2; 5; 8; ... з десятого по двадцятий включно.
751. Розв'яжіть рівняння:
 1) $6 + 10 + 14 + \dots + (4x - 2) = 448$;
 2) $33 + 30 + 27 + \dots + x = 195$.
752. Розв'яжіть рівняння:
 1) $7 + 11 + 15 + \dots + (4x - 1) = 297$;
 2) $11 + 8 + 5 + \dots + x = -221$.
753. Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 + a_5 = 16$, $a_3 a_4 = 88$.
754. З пункту A виїхала вантажівка, яка рухалася зі швидкістю 40 км/год. Одночасно в тому самому напрямку з пункту B вирушив легковик, який за першу годину проїхав 50 км, а кожної наступної години долав на 5 км більше, ніж за попередню. Через скільки годин легковик наздожене вантажівку, якщо відстань між пунктами A і B дорівнює 135 км?



Вправи для повторення

- 2 755. Між якими двома послідовними цілими числами міститься число:
 1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $-\sqrt{5}$; 4) $-\sqrt{17}$?
- 3 756. Розв'яжіть нерівність: $6x - 40 > (3x - 8)(3x + 8)$.
757. Розв'яжіть рівняння: $(2x^2 - 1)(x^2 + 3) = x^2(x^2 + 7)$.

4 758. Побудуйте графік функції

$$y = \frac{x^3 + 3x^2}{x + 3} + \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}.$$



Життєва математика

759. До електромережі підключено прилади, загальний опір яких становить $R_1 = 90$ Ом. Паралельно з ними передбачено підключити ще й електрообігрівач. Визначте найменш можливий опір R_2 цього електрообігрівача, коли відомо, що при паралельному з'єднанні двох провідників з опорами R_1 Ом і R_2 Ом їх загальний опір обчислюють за формулою $R_{\text{заг}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функціонування електромережі її загальний опір має бути не менше ніж 9 Ом.



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

760. Запишіть скінченну послідовність, що складається із шести членів, у якої перший член дорівнює 1, а кожний наступний утричі більший за попередній.

761. Знайдіть закономірність і продовжте ряд чисел, записавши чотири наступних числа:

- 1) 3; 6; 12; 24; ...; 2) 64; 32; 16; 8; ...;
3) 1; -3; 9; -27; ...; 4) 25 000; -2500; 250; -25;



Цікаві задачі для учнів неледачих



762. (Задача Стенфордського університету). Знайдіть усі значення m , при яких рівняння $x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$ має чотири корені, які є послідовними членами арифметичної прогресії.



18. ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ. ФОРМУЛА n -ГО ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Розглянемо числову послідовність, перший член якої дорівнює 3, а кожний наступний, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на 2:

$$\frac{\cdot 2}{3}; \frac{\cdot 2}{6}; \frac{\cdot 2}{12}; \frac{\cdot 2}{24}; \frac{\cdot 2}{48}; \frac{\cdot 2}{96}; \dots$$

Таку послідовність називають *геометричною прогресією*.



Геометричною прогресією називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожне з яких, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число.

Це число називають знаменником геометричної прогресії і позначають буквою q (від першої літери французького слова *quotient* – частка). Тому якщо (b_n) – геометрична прогресія, справджуються рівності:

$$b_2 = b_1q; \quad b_3 = b_2q; \quad b_4 = b_3q; \quad \dots$$

Отже, для будь-якого натурального n матимемо:

$$b_{n+1} = b_nq.$$

Тоді

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

тобто



знаменник геометричної прогресії можна знайти, якщо будь-який член прогресії, починаючи з другого, поділити на попередній.

Зауважимо, що оскільки члени геометричної прогресії відмінні від нуля, то і знаменник q не може дорівнювати нулю, тобто $q \neq 0$.

Якщо $q = 1$, то геометрична прогресія складатиметься з однакових чисел. Наприклад, якщо $b_1 = -5$ і $q = 1$, то матимемо геометричну прогресію:

$$-5; -5; -5; -5; -5; \dots$$

Зауважимо, що отриману послідовність можна також вважати і арифметичною прогресією, перший член якої дорівнює -5 , а різниця дорівнює 0 .

Нехай перший член геометричної прогресії дорівнює b_1 , а знаменник дорівнює q . Тоді

$$b_2 = b_1q;$$

$$b_3 = b_2q = (b_1q)q = b_1q^2;$$

$$b_4 = b_3q = (b_1q^2)q = b_1q^3;$$

$$b_5 = b_4q = (b_1q^3)q = b_1q^4 \text{ і т. д.}$$

Помічаємо, що в кожній з отриманих формул показник степеня числа q на 1 менший від порядкового номера члена прогресії, для якого записано цю формулу. Справді, адже щоб знайти b_n , маючи b_1 і q , треба $n - 1$ разів помножити b_1 на q , тобто b_1 помножити на q^{n-1} . Маємо:



$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Отримали формулу n -го члена геометричної прогресії.

Розглянемо кілька вправ на застосування цієї формули.

Приклад 1. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія,

$$b_1 = -27, q = \frac{1}{3}. \text{ Знайти } b_6.$$

$$\text{Розв'язання. } b_6 = b_1 q^{6-1} = b_1 q^5 = -27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = -\frac{1}{9}.$$

$$\text{Відповідь. } b_6 = -\frac{1}{9}.$$

Приклад 2. Знайти знаменник q геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_5 = 4$, $b_7 = 36$.

Розв'язання.

$$1\text{-й спосіб. Маємо } b_5 = b_1 q^4, b_7 = b_1 q^6. \text{ Тоді } \frac{b_7}{b_5} = \frac{b_1 q^6}{b_1 q^4} = q^2.$$

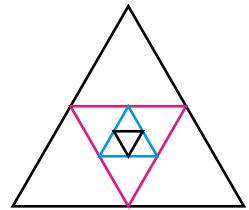
$$\text{Але } \frac{b_7}{b_5} = \frac{36}{4} = 9, \text{ тобто } q^2 = 9, \text{ отже, } q = 3 \text{ або } q = -3.$$

$$2\text{-й спосіб. } \dots b_5; \overbrace{b_6}^{\cdot q}; \overbrace{b_7}^{\cdot q}; \dots$$

Оскільки $b_7 = b_6 q = (b_5 q) q = b_5 q^2$, то $q^2 = \frac{b_7}{b_5} = \frac{36}{4} = 9$; отже, $q = 3$ або $q = -3$.

Відповідь. $q = 3$ або $q = -3$.

Приклад 3. Дано рівносторонній трикутник, сторона якого 8 см. Середини його сторін є вершинами другого трикутника, а середини сторін другого є вершинами третього і так само далі (мал. 75). Знайти площу п'ятого трикутника, побудованого в такий само спосіб.



Мал. 75

Розв'язання. Нехай $S_1; S_2; S_3; \dots$ – площі першого, другого, третього і далі трикутників. Знайдемо S_1 :

$$S_1 = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Оскільки сторони кожного наступного трикутника є середніми лініями попереднього, то довжина сторони кожного наступного трикутника буде вдвічі меншою за довжину сторони попереднього. Тоді сторона другого трикутника дорівнює 4 см, а його площа $S_2 = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$. Сторона третього трикут-

ника дорівнює 2 см, тоді $S_3 = \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$. Очевидно, що S_3 в 4 рази менша за S_2 , а S_2 в 4 рази менша за S_1 , тобто дійдемо висновку, що площа кожного наступного трикутника в 4 рази менша за площу попереднього, тому знайдені числові значення площ $S_1; S_2; S_3; \dots$ є послідовними членами геометричної прогресії зі знаменником $\frac{1}{4}$, перший член якої дорівнює $16\sqrt{3}$. Тоді числове значення площі п'ятого трикутника є відповідно п'ятим членом цієї прогресії. Тому

$$S_5 = S_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-1} = 16\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4^4} = \frac{\sqrt{3}}{16} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{16} \text{ см}^2$.

Доведемо деякі важливі *властивості геометричної прогресії*.



1. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів, тобто

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ де } n = 2, 3, 4, 5, \dots$$

Доведення. Скористаємося формулою n -го члена геометричної прогресії. Тоді:

$$\begin{aligned} b_{n-1} \cdot b_{n+1} &= b_1 q^{(n-1)-1} \cdot b_1 q^{(n+1)-1} = b_1^2 q^{n-2+n} = b_1^2 q^{2n-2} = \\ &= (b_1 q^{n-1})^2 = b_n^2. \end{aligned}$$

Якщо всі члени геометричної прогресії є додатними числами, то $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, тобто кожний член геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів.

За однією з версій саме із цією властивістю геометричної прогресії і пов'язано її назву.



2. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох рівновіддалених від нього членів, тобто

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, \text{ де } n \in N, k \in N, k < n.$$

Властивість доводиться аналогічно попередній властивості.



3. Якщо k, l, p і s – натуральні числа і $k + l = p + s$, то $b_k \cdot b_l = b_p \cdot b_s$.

Д о в е д е н н я. Skorистаємося формулою n -го члена геометричної прогресії:

$$b_k \cdot b_l = b_1 q^{k-1} \cdot b_1 q^{l-1} = b_1^2 q^{(k+l)-2};$$

$$b_p \cdot b_s = b_1 q^{p-1} \cdot b_1 q^{s-1} = b_1^2 q^{(p+s)-2}.$$

$$\text{Але } k + l = p + s, \text{ тому } b_1^2 q^{(k+l)-2} = b_1^2 q^{(p+s)-2}.$$

$$\text{Отже, } b_k b_l = b_p b_s.$$

А ще раніше...

У папірусі Ахмеса, який ми вже неодноразово згадували, є задача, у якій треба знайти суму n членів геометричної прогресії, а саме: «У семи людей є по сім кішок, кожна кішка з'їдає по сім мишей, кожна миша з'їдає по сім колосків, з кожного колоска можна виростити по сім мір зерна. Якими є числа цього ряду та їх сума?».

У своїй праці «Псалмит» Архімед уперше порівняв арифметичну і геометричну прогресії:

1; 2; 3; 4; 5; ...

10; 10²; 10³; 10⁴; 10⁵; ...

та помітив, що, наприклад $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$, тобто під час множення членів такої геометричної прогресії досить додати відповідні члени арифметичної прогресії і отриману суму записати показником числа 10.

Для давніх греків геометрична прогресія, як і арифметична, була пов'язана з так званою геометричною пропорцією:

$$a : b = b : c,$$

у якій числа a, b і c утворюють геометричну прогресію зі знаменником

$\sqrt{\frac{c}{a}}$. Цим зв'язком і пояснюється одна з версій назви прогресії – *геометрична*.



1. Яку послідовність називають геометричною прогресією?
2. Яке число називають знаменником геометричної прогресії?
3. Чи може знаменник геометричної прогресії дорівнювати нулю? Одиниці?
4. Як можна знайти знаменник геометричної прогресії?
5. Запишіть формулу n -го члена геометричної прогресії.
6. Сформулюйте і доведіть властивості геометричної прогресії.



Початковий рівень

763. Які з послідовностей є геометричними прогресіями? Укажіть для них перший член і знаменник.

- 1) 3; 6; 12; 2) 7; 7; 7; 3) 1; 2; 3;
4) 8; -8; 8; 5) 9; 3; 1; 6) 2; 4; 6.

764. Чи є геометричною прогресією послідовність:

- 1) натуральних чисел: 1; 2; 3; 4; 5; ...;
- 2) натуральних степенів числа 2: 2; 4; 8; 16; 32; ...;
- 3) натуральних степенів числа -5: -5; 25; -125; 625; ...;
- 4) кубів натуральних чисел: 1; 8; 27; 64; 125; ...?



Середній рівень

765. Знайдіть чотири перших члени геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q , якщо:

- 1) $b_1 = 10, q = 2$; 2) $b_1 = -20, q = 0,1$;
3) $b_1 = -5, q = -3$; 4) $b_1 = 8, q = \frac{1}{2}$.

766. Знайдіть п'ять перших членів геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q , якщо:

- 1) $b_1 = 125, q = -\frac{1}{5}$; 2) $b_1 = 0,5, q = 10$.

767. (x_n) – геометрична прогресія, $x_1 = \frac{1}{32}, q = -2$. Знайдіть:

- 1) x_2 ; 2) x_5 ; 3) x_8 ; 4) x_k .

768. (y_n) – геометрична прогресія, $y_1 = 81, q = -\frac{1}{3}$. Знайдіть:

- 1) y_2 ; 2) y_4 ; 3) y_7 ; 4) y_k .

769. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

- 1) b_6 , якщо $b_1 = 1$, $q = 2$; 2) b_5 , якщо $b_1 = 125$, $q = -\frac{1}{5}$;
 3) b_7 , якщо $b_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$; 4) b_4 , якщо $b_1 = \sqrt{2}$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

770. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

- 1) b_5 , якщо $b_1 = 2$, $q = -1$; 2) b_4 , якщо $b_1 = -128$, $q = \frac{1}{2}$;
 3) b_7 , якщо $b_1 = 64$, $q = -\frac{1}{4}$; 4) b_3 , якщо $b_1 = 3$, $q = -\sqrt{2}$.

771. Знайдіть шостий та n -й члени геометричної прогресії:

- 1) 10 000; 1000; 100; ...; 2) 3; -6; 12;

772. Знайдіть п'ятий та n -й члени геометричної прогресії:

- 1) 20; 5; 1,25; ...; 2) 4; -8; 16;

773. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n) , якщо:

- 1) $b_4 = 40$, $q = 2$; 2) $b_3 = 27$, $q = -3$.

774. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n) , якщо:

- 1) $b_3 = 100$, $q = -2$; 2) $b_4 = 64$, $q = 4$.

775. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть b_7 , якщо $b_6 = 4$, $b_8 = 9$.

776. Матеріальна точка за першу секунду пододала 5 м, а за кожну наступну – утричі більшу за попередню відстань. Скільки метрів пододала матеріальна точка за четверту секунду?

777. Ламана складається з п'яти ланок. Перша з них дорівнює 48 см, а кожна наступна вдвічі коротша за попередню. Яка довжина п'ятої (найкоротшої) ланки?



Достатній рівень

778. Доведіть, що послідовність (x_n) , задана формулою $x_n = 3 \cdot 4^n$, є геометричною прогресією. Знайдіть її перший член і знаменник.

779. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , у якій:

- 1) $b_7 = 12$, $b_9 = 48$; 2) $b_8 = 9$, $b_{11} = 243$;
 3) $b_{16} = 16$, $b_{18} = 9$; 4) $b_{30} = 1$, $b_{33} = -1$.

780. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , у якій:

1) $b_{10} = 11$, $b_{12} = 99$;

2) $b_{10} = 27$, $b_{13} = 1$.

781. Запишіть геометричну прогресію з п'яти членів, у якій третій член дорівнює 10, а знаменник дорівнює -2 .

782. Запишіть геометричну прогресію із шести членів, у якій четвертий член дорівнює 80, а знаменник дорівнює -4 .

783. Послідовність (x_n) – геометрична прогресія. Знайдіть x_5 ,

якщо $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{8}$.

784. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть b_1 , якщо $b_4 = -1$, $b_6 = -100$.

785. Послідовність (c_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

1) c_1 , якщо $c_3 = 10$, $c_5 = \frac{1}{10}$;

2) c_6 , якщо $c_1 = 2$, $c_3 = 8$.

786. Під мікроскопом розглядають 5 клітин, які розмножуються поділом навпіл щохвилини. Скільки утвориться клітин через одну хвилину; через три хвилини; через шість хвилин?



Високий рівень

787. Між числами 1 і 64 вставте: 1) одне число; 2) два числа таких, щоб вони разом з даними утворили геометричну прогресію.

788. Геометрична прогресія (b_n) складається з п'яти членів:

$\frac{1}{2}$, x_2 , x_3 , 4, x_5 . Знайдіть x_2 , x_3 , x_5 .

789. При якому значенні x числа $x + 3$, $2x$ і $5x - 4$ є послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.

790. При якому значенні y числа y , $2y + 3$ і $4y + 3$ є послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.

791. Доведіть, що коли числа a , b і c є послідовними членами геометричної прогресії, то справджується рівність:

$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

792. Для деяких чисел x, y, z , жодне з яких не дорівнює нулю, справджується рівність:

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) = (xy + yz)^2.$$

Доведіть, що x, y, z – послідовні члени геометричної прогресії.

793. Дано квадрат зі стороною 16 см. Середини його сторін є вершинами другого квадрата, а середини сторін другого квадрата є вершинами третього і так само далі. Знайдіть площу шостого квадрата, побудованого в такий спосіб.



Вправи для повторення

2 **794.** Обчисліть: 1) 2^7 ; 2) 4^6 ; 3) $3^5 - 1$; 4) $(3 - 1)^5$.

3 **795.** Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

1) $a_2 + a_4 = 14$; $a_6 + a_9 = 32$;

2) $a_2 + a_6 = 4$; $a_4 a_3 = 6$.

796. Доведіть, що значення виразу $\frac{a+3}{2a+2} - \frac{a+1}{2a-2} + \frac{2}{a^2-1}$ не залежить від значення змінної.

4 **797.** Відомо, що x_1 і x_2 – корені рівняння $5x^2 + 7x - 9 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть $x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1$.

798. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$.



Життєва математика

799. Після дощу рівень води в колодязі може підвищитися. Хлопець вимірює час t падіння невеликих камінчиків у колодязь і розраховує відстань до води за формулою $h = 5t^2$, де h – відстань у метрах до води, t – час падіння в секундах. В один із днів час падіння камінців склав 0,9 с, а після кількох дощових днів – 0,8 с. На скільки метрів підвився рівень води в колодязі за ці дні?



Цікаві задачі для учнів неледачих



800. Про послідовність (a_n) відомо, що $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n$. Знайдіть формулу n -го члена цієї послідовності.



19.

ФОРМУЛА СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ

Бухгалтерам та працівникам банків часто доводиться розв'язувати задачі на відсотки. Розглянемо задачу про нарахування *відсоткових коштів*. З економічної точки зору відсоткові кошти можна вважати винагородою, яку сплачує особа чи установа (позичальник) за користування протягом певного часу певною сумою коштів, отриманих від іншої особи чи установи (кредитора). Розмір цієї винагороди залежить від суми позики та терміну користування нею.

Задача 1. Вкладник відкрив у банку депозит у розмірі 10 000 грн під 11 % річних (тобто банк зобов'язується виплатити відсоткові кошти в розмірі 11 % на рік від початкової суми вкладу). Скільки відсоткових коштів отримає вкладник через рік?

Розв'язання. $11\% = 0,11$, тому вкладник отримає $0,11 \cdot 10\,000 = 1100$ (грн) відсоткових коштів.

Відповідь. 1100 грн.

Якщо вкладник вирішив тримати кошти в банку більше ніж один рік, не додаючи нових коштів і не забираючи з банку вкладених коштів, то обчислити суму коштів на рахунку вкладника через кілька років можна за допомогою *формули складних відсотків*.

Нехай вкладник поклав до банку A_0 грн під $p\%$ річних, A_0 ще називають *початковим капіталом*. Через рік банк нарахує вкладнику $\frac{A_0 p}{100}$ грн відсоткових коштів. Тому на рахунку вкладника через рік буде $A_0 + \frac{A_0 p}{100} = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ грн – *нарощений капітал*. Позначимо $A_1 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$. За другий рік вкладнику буде нараховано $\frac{A_1 p}{100}$ грн відсоткових коштів (адже тепер банк нараховує $p\%$ річних від числа A_1) і його вклад дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} A_1 + \frac{A_1 p}{100} &= A_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \\ &= A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2. \end{aligned}$$

Міркуючи аналогічно та застосовуючи формулу n -го члена геометричної прогресії (b_n) , де $b_1 = A_0$ і $q = 1 + \frac{p}{100}$, дійдемо висновку, що через n років нарощений капітал становитиме:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ грн.}$$

Отже,



початковий капітал A_0 , внесений до банку під p % річних, через n років стане нарощеним капіталом A_n , розмір якого обчислюється за формулою:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

яку називають *формулою складних відсотків*.

Задача 2. Вкладник відкрив у банку депозит на 5000 грн під 12 % річних. Скільки коштів буде на рахунку вкладника через 3 роки? Скільки відсоткових коштів отримає вкладник через 3 роки?

Розв'язання. $A_0 = 5000$, $p = 12$ %, $n = 3$. Тоді

$$A_3 = 5000 \left(1 + \frac{12}{100}\right)^3 = 7024,64 \text{ (грн).}$$

Відсоткові кошти можна знайти як різницю $A_3 - A_0$.

Отже, $A_3 - A_0 = 7024,64 - 5000 = 2024,64$ (грн).

Відповідь. 7024,64 грн, 2024,64 грн.

За формулою складних відсотків можна також розв'язувати й інші задачі, не пов'язані з нарощенням капіталу.

Задача 3. Населення деякого міста складає 30 000 мешканців. Кожного року кількість населення зменшується на 0,2 %. Яким буде населення цього міста через 10 років?

Розв'язання. Оскільки населення міста щороку зменшується на один і той самий відсоток, і це відсоток від кількості населення кожного попереднього року, а не від початкової кількості мешканців, то можна скористатися формулою складних відсотків.

Маємо, що $A_0 = 30\ 000$, $p = -0,2$ (оскільки населення зменшується, то $p < 0$), $n = 10$. Тоді:

$$A_{10} = 30\ 000 \left(1 - \frac{0,2}{100}\right)^{10} \approx 29\ 405 \text{ (мешк.).}$$

Відповідь. 29 405 мешканців.



1. Що таке відсоткові кошти?
2. Запишіть формулу складних відсотків.



Достатній рівень

- 801.** Вкладник поклав на депозитний рахунок 10 000 грн під 11 % річних.
- 1) Скільки коштів буде на цьому рахунку через 3 роки? Через 5 років?
 - 2) Скільки відсоткових коштів матиме вкладник через 3 роки? Через 5 років?
- 802.** Вкладник відкрив у банку депозитний рахунок на 20 000 грн під 12 % річних.
- 1) Якою буде сума на рахунку через 2 роки? Через 4 роки?
 - 2) Скільки відсоткових коштів отримає вкладник за 2 роки? За 4 роки?
- 803.** Вкладник відкрив депозит на 8000 грн під 9 % річних. Складіть формулу для обчислення відсоткових коштів вкладника через n років. Обчисліть за цією формулою відсоткові кошти, якщо $n = 2$, $n = 3$.
- 804.** Яку мінімальну суму коштів треба покласти в банк під 12 % річних, щоб через 2 роки мати на рахунку більше ніж 10 000 грн? Відповідь округліть до гривень.



Високий рівень

- 805.** Яку суму треба внести на депозит під 10 % річних, щоб одержати через 2 роки прибуток у розмірі 1218 грн?
- 806.** Яку суму треба внести на депозит під 5 % річних, щоб одержати через 2 роки прибуток у розмірі 820 грн?
- 807.** Товар коштує 2000 грн. Щомісяця ціна товару знижується на 3 %. Якою буде ціна товару через:
- 1) 3 місяці;
 - 2) півроку?
- Відповідь округліть до сотих гривні.
- 808.** Населення міста складає 50 000 осіб і щороку зменшується на 1 %. Якою буде кількість населення міста через:
- 1) 5 років;
 - 2) 10 років?

809. Який відсоток річних має нараховувати банк, щоб через три роки початковий розмір вкладу збільшився в $1\frac{91}{125}$ раза?

§20. СУМА n ПЕРШИХ ЧЛЕНІВ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Розглянемо n перших членів геометричної прогресії (b_n) : $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n$.

Позначимо через S_n їх суму:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n.$$

Знайдемо формулу для обчислення цієї суми. Маємо (враховуючи формулу n -го члена геометричної прогресії):

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на q :

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Віднімемо почленно від цієї рівності попередню:

$$S_nq - S_n = (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n) - (b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}) = b_1q^n - b_1 = b_1(q^n - 1).$$

Отже, $S_nq - S_n = b_1(q^n - 1)$ і $S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1)$.

Якщо $q \neq 1$, то отримаємо формулу суми n перших членів геометричної прогресії:



$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}. \quad (1)$$

Якщо $q = 1$, то всі члени прогресії дорівнюють першому члену і тоді $S_n = nb_1$.

Зауважимо, що отриману формулу (1) можна записати й у такому вигляді:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Оскільки $b_n = b_1q^{n-1}$, то отриману формулу (1) суми n перших членів геометричної прогресії можна подати й у іншому вигляді. Справді,

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1q^{n-1}q - b_1}{q - 1} = \frac{b_nq - b_1}{q - 1}.$$

Отже,



$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}. \quad (2)$$

Маємо ще одну формулу для обчислення суми n перших членів геометричної прогресії, якою зручно користуватися, якщо відомо перший та n -й члени прогресії і її знаменник.

Застосуємо ці формули для розв'язування вправ.

Приклад 1. Знайти суму перших семи членів геометричної прогресії 2; -6; 18;

Розв'язання. 1-й спосіб. За умовою:

$$b_1 = 2, b_2 = -6, q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Тоді за формулою (1):

$$S_7 = \frac{b_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{2((-3)^7 - 1)}{-3 - 1} = \frac{2 \cdot (-2188)}{-4} = 1094.$$

2-й спосіб. Відомо, що $b_1 = 2, q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{2} = -3$, тоді

$$b_7 = b_1 q^6 = 2 \cdot (-3)^6 = 1458.$$

За формулою (2):

$$S_7 = \frac{b_7 q - b_1}{q - 1} = \frac{1458 \cdot (-3) - 2}{-3 - 1} = 1094.$$

Відповідь. 1094.

Приклад 2. Знайти суму перших шести членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_2 = 8, b_4 = 32$.

Розв'язання. Оскільки $b_4 = b_1 q^3 = (b_1 q) q^2 = b_2 q^2$, то $q^2 = \frac{b_4}{b_2} = \frac{32}{8} = 4$, отже, $q = 2$ або $q = -2$.

Тоді існують дві прогресії, що задовольняють умову задачі:

1) якщо $q = 2$, то

$$b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{8}{2} = 4 \text{ і } S_6 = \frac{4(2^6 - 1)}{2 - 1} = 252;$$

2) якщо $q = -2$, то

$$b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{8}{-2} = -4 \text{ і } S_6 = \frac{4((-2)^6 - 1)}{-2 - 1} = -84.$$

Відповідь. 252 або -84.

Приклад 3. Скоротити дріб

$$\frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{x^6 - 1}.$$

Розв'язання. Доданки в чисельнику дробу є послідовними членами геометричної прогресії $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$, перший член якої дорівнює 1, а знаменник дорівнює x . З умови випливає, що $x \neq 1$.

Знайдемо суму всіх шести членів цієї прогресії за формулою (1) та скоротимо даний в умові дріб:

$$\frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{x^6 - 1} = \frac{1 \cdot (x^6 - 1)}{x^6 - 1} = \frac{1}{x - 1}.$$

Відповідь. $\frac{1}{x - 1}$.



Стародавня індійська задача-легенда розповідає, що винахідник шахів Сета просив у індійського царя Шерама за свій винахід стільки зерен, скільки їх буде, якщо покласти на першу клітинку шахівниці одну зернину, на другу – дві, на третю – чотири, на четверту – вісім і далі у той самий спосіб, поки не заповняться всі клітинки шахівниці.

Цар здивувався, що винахідник забажав так мало, і запропонував своїм математикам обчислити кількість зернин, які повинен йому віддати. Здивуванню царя не було меж, коли він почув, що ця кількість дорівнює числу

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Щоб зібрати таку кількість зернин, треба було засіяти і зібрати врожай пшениці з площі, яка у 2000 разів більша за площу Землі. Для зберігання такого врожаю знадобилася б комора, яка при ширині 10 м і висоті 4 м мала б довжину 300 000 000 км, тобто удвічі більшу за відстань від Землі до Сонця.



Запишіть формули, за якими обчислюють суму n перших членів геометричної прогресії.



Початковий рівень

810. Знайдіть S_5 – суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 1$, $q = 2$.

811. Знайдіть S_4 – суму чотирьох перших членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 1$, $q = 3$.



Середній рівень

812. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (b_n) , якщо:

1) $b_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$; 2) $b_1 = -17$, $q = -2$;

3) $b_1 = 32$, $q = -\frac{1}{2}$; 4) $b_1 = 5\sqrt{2}$, $q = \sqrt{2}$.

813. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n) , якщо:

1) $b_1 = 32$, $q = \frac{1}{2}$; 2) $b_1 = 5$, $q = -2$;

3) $b_1 = 27$, $q = -\frac{1}{3}$; 4) $b_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$.

814. Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії:

1) 16; -8; 4; ...; 2) 1,5; 3; 6; ...;

3) 4; 4^2 ; 4^3 ; ...; 4) $\sqrt{3}$; 3; $3\sqrt{3}$;

815. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії:

1) 1,5; 6; 24; ...; 2) -4; 2; -1; ...;

3) 2; 2^2 ; 2^3 ; ...; 4) 2; $\sqrt{2}$; 1;

816. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

1) S_7 , якщо $b_1 = 2$, $q = -3$;

2) S_8 , якщо $b_1 = -1$, $q = 4$.

817. Використовуючи формулу (2) із цього параграфу, обчисліть суму чисел, що є послідовними членами геометричної прогресії:

1) $1 + 3 + 9 + \dots + 729$; 2) $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \dots + 2$.

818. Використовуючи формулу (2) із цього параграфу, обчисліть суму чисел, що є послідовними членами геометричної прогресії:

1) $2 + 4 + 8 + \dots + 128$; 2) $\frac{1}{5} + 1 + 5 + \dots + 625$.

819. На п'яти ділянках висаджено смородину. На першій ділянці 16 кущів, а на кожній наступній у 1,5 раза більше, ніж на попередній. Скільки всього кущів смородини висаджено на п'яти ділянках?

820. Одна зі сторін чотирикутника дорівнює 12,5 см, а кожна наступна – у 1,2 раза довша за попередню. Знайдіть периметр чотирикутника.



Достатній рівень

821. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (b_n) , у якої:

1) $b_2 = 6, q = 2;$ 2) $b_3 = 8, q = -4.$

822. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n) , у якої:

1) $b_2 = 8, q = 4;$ 2) $b_3 = 27, q = -3.$

823. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

1) S_8 , якщо $b_3 = \frac{1}{4}, b_4 = \frac{1}{8};$

2) S_5 , якщо $b_1 = 5, b_3 = 45, q > 0;$

3) S_4 , якщо $b_2 = 8, b_4 = 2, q < 0;$

4) S_7 , якщо $b_1 = 5, b_4 = 40.$

824. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

1) S_7 , якщо $b_2 = \frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{9};$

2) S_8 , якщо $b_1 = 9, b_3 = 36, q > 0;$

3) S_4 , якщо $b_2 = 25, b_4 = 1, q < 0;$

4) S_6 , якщо $b_1 = 1, b_4 = 27.$

825. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n) , у якої:

1) $q = 2, S_6 = 315;$ 2) $q = -\frac{2}{3}, S_4 = 13.$

826. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n) , у якої:

1) $q = -2, S_6 = -63;$ 2) $q = \frac{1}{3}, S_5 = 121.$

827. Скоротіть дріб:

1) $\frac{1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8}{x^{10} - 1};$

2) $\frac{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5}{x^6 - 1}.$



Високий рівень

828. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія, $b_2 = 125$, $b_4 = 5$. Знайдіть S_5 .

829. Послідовність (c_n) – геометрична прогресія, $c_3 = 27$, $c_5 = 3$. Знайдіть S_6 .

830. (З книжки Я.Г. Перельмана «Жива математика», 1967 р.). Один чоловік запропонував багатію таку угоду: чоловік щодня протягом місяця сплачуватиме багатію по 100 000 рублів, а багатій сплачуватиме цьому чоловікові: у перший день – 1 копійку, у другий – 2 копійки, у третій – 4 копійки, у четвертий – 8 копійок і далі в той самий спосіб. Угода діятиме рівно 30 днів. Багатій погодився. Хто з них виграє за такої угоди? Врахуйте, що 1 рубль = 100 копійок.

831. Послідовність (c_n) – геометрична прогресія, $c_5 - c_3 = 144$, $c_4 - c_2 = 48$. Знайдіть S_6 .

832. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія, $b_6 - b_4 = 48$, $b_3 - b_5 = 24$. Знайдіть S_5 .

833. Знайдіть кількість членів геометричної прогресії (b_n) , якщо:

1) $b_1 = 15$, $q = 2$, $S_n = 945$;

2) $b_1 = 2$, $b_n = 128$, $S_n = 254$;

3) $q = 3$, $b_n = 486$, $S_n = 726$.



Вправи для повторення



834. Розв'яжіть нерівність:

1) $5(x - 2) \leq x + 26$;

2) $2x^2 - 3x - 5 > 0$.



835. Знайдіть суму всіх від'ємних членів прогресії

$$-4,8; -4,4; -4; \dots$$

836. Обчисліть:

$$\left(\frac{\sqrt{7} + 3}{\sqrt{7} - 3} - \frac{\sqrt{7} - 3}{\sqrt{7} + 3} \right)^2.$$

837. Вкладник вніс до банку на два різних рахунки кошти на загальну суму 60 000 грн. За першим з них банк нараховує 10 % річних, а за другим – 7 %. Через рік вкладник отримав 4800 грн прибутку. Яку суму коштів він поклав на кожний з рахунків?

4 838. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a - 20}{(a - 5)^2} : \left(\frac{a}{a^2 - 25} - \frac{a - 8}{a^2 - 10a + 25} \right)$$

є додатним, якщо $a < -5$.

839. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{y}{2x} - \frac{x}{y} = \frac{1}{2}; \\ y^2 - 5xy + 2x^2 = 32. \end{cases}$$



Життєва математика

840. У трьох салонах мобільного зв'язку один і той самий смартфон у кредит продають на різних умовах. Умови кредиту подано в таблиці.

Салон	Ціна смартфона, грн	Початковий внесок (у % від ціни)	Строк кредиту (місяців)	Сума щомісячного платежу, грн
Альфа	2500	15	12	200
Бета	2620	10	6	425
Гамма	2375	20	12	190

Визначте, у якому із салонів придбання смартфона в кредит є найвигіднішим, та обчисліть остаточну суму, у яку обійдеться купівля.



Цікаві задачі для учнів неледачих



841. З пункту А до пункту В виїхав мотоцикліст. Через 2 год в тому самому напрямку виїхав легковик, який прибув до пункту В одночасно з мотоциклістом. Якби мотоцикліст і легковик одночасно виїхали назустріч один одному з пунктів А і В, то вони зустрілися б через 1 год 20 хв. За який час кожний з них долає шлях від А до В?

Домашня самостійна робота № 4

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1** 1. Послідовність задано формулою $x_n = 3n - 7$. Знайдіть x_7 .
 А. 7; Б. 14; В. -7; Г. 28.
2. Укажіть послідовність, що є арифметичною прогресією:
 А. 2; 4; 6; Б. 2; 4; 5; В. 0; 1; 8; Г. 1; 3; 9.
3. Укажіть послідовність, що є геометричною прогресією:
 А. 0; 1; 8; Б. 4; 5; 6; В. 1; 2; 4; Г. -2; -3; -4.
- 2** 4. Тіло за першу секунду пододало 15 м, а за кожну наступну – на 2 м більше, ніж за попередню. Яку відстань пододало тіло за сьому секунду?
 А. 30 м; Б. 24 м; В. 3 м; Г. 27 м.
5. Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 7$, $a_2 = 4$.
 А. -130; Б. -65; В. -100; Г. 65.
6. Знайдіть п'ятий член геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 3$, $q = -2$.
 А. 24; Б. -96; В. -48; Г. 48.
- 3** 7. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія, $a_1 = 14,5$, $d = -2,5$. Укажіть число, яке є членом цієї прогресії.
 А. -21; Б. -22; В. -23; Г. -24.
8. Знайдіть суму натуральних чисел, які кратні числу 8 і не перевищують числа 400.
 А. 20 400; Б. 10 600; В. 10 200; Г. 9800.
9. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть S_6 , якщо $b_2 = 2$, $b_4 = 8$ і $q < 0$.
 А. -21; Б. 21; В. 63; Г. -63.
- 4** 10. Знайдіть найменший член послідовності $x_n = n^2 - 6n - 8$.
 А. -16; Б. -17;
 В. -18; Г. такого члена не існує.

11. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть $a_4 + a_{18}$, якщо $a_{11} = -8$.
 А. знайти неможливо; Б. -4 ; В. -16 ; Г. 16 .
12. При яких значеннях x числа $x - 2$, $x + 1$ і $5x + 1$ є послідовними членами геометричної прогресії?
 А. 3 ; Б. -3 ; В. $0,25, -3$; Г. $-0,25, 3$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО § 15–20

- 1** 1. Послідовність задано формулою $x_n = 4n + 5$. Знайдіть:
 1) x_{10} ; 2) x_{25} .
2. Які з послідовностей є арифметичними прогресіями:
 1) $3; 1; 2$; 2) $4; 2; 0$; 3) $1; 3; 9$; 4) $1; 11; 21$?
3. Які з послідовностей є геометричними прогресіями:
 1) $7; -14; 28$; 2) $5; 6; 7$; 3) $4; 2; 1$; 4) $3; 1; 0$?
- 2** 4. Учень прочитав книжку за 5 днів. У перший день він прочитав 36 сторінок, а кожного наступного дня читав на 4 сторінки менше, ніж попереднього. Скільки сторінок учень прочитав за останній день?
5. Знайдіть сьомий член і суму дванадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 5$, $a_2 = 8$.
6. Знайдіть шостий член і суму восьми перших членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = -1$, $q = 2$.
- 3** 7. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія, $a_1 = 18,5$, $d = -1,5$. Чи є членом цієї прогресії число:
 1) $2,5$; 2) 5 ?
8. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні числу 6 і не перевищують числа 540.
- 4** 9. При яких значеннях x числа $x - 1$, $x + 2$ і $5x + 6$ є послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.

Додаткові завдання

- 4** 10. Знайдіть найбільший член послідовності $y_n = -n^2 + 4n - 5$.
11. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть a_{15} , якщо $a_8 + a_{22} = 7$.

Вправи для повторення розділу 3

До § 15

- 1** 842. Послідовність задано формулою $a_n = 7n - 19$. Знайдіть:
 1) a_1 ; 2) a_5 ; 3) a_{100} ; 4) a_{1000} .
- 2** 843. Запишіть п'ять перших членів послідовності натуральних двоцифрових чисел, які:
 1) при діленні на 7 дають в остачі 1;
 2) при діленні на 6 дають в остачі 5.
- 3** 844. Знайдіть кількість додатних членів послідовності $a_n = 15 - 2n$.
845. Знайдіть перший від'ємний член послідовності $x_n = 7 - \frac{1}{3}n$.
846. Знайдіть найменший член послідовності $b_n = 4n - 5$.
- 4** 847. Підберіть одну з можливих формул n -го члена послідовності:
- | | |
|---------------------------|---|
| 1) 1; 3; 5; 7; 9; ...; | 2) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \dots$; |
| 3) 1; 4; 9; 16; 25; ...; | 4) 2; 4; 8; 16; 32; ...; |
| 5) -1; 1; -1; 1; -1; ...; | 6) 1; 3; 1; 3; 1; |
848. Послідовність задано формулою $a_n = n^2 - 4n - 7$. Скільки членів, що не перевищують числа -2 , містить ця послідовність?

До § 16

- 1** 849. Чи є арифметичною прогресією послідовність натуральних чисел, кратних числу 5?
- 2** 850. Знайдіть різницю та шостий член арифметичної прогресії 2,7; 2,4; 2,1;
851. Послідовність (x_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:
 1) x_1 , якщо $x_{12} = -8$, $d = -3$; 2) d , якщо $x_1 = 0$, $x_9 = -28$.
852. Знайдіть формулу n -го члена арифметичної прогресії:
 1) -5; -2; 1; ...; 2) $7; 7\frac{1}{4}; 7\frac{1}{2}; \dots$.

853. Ламана складається з восьми ланок. Довжина першої ланки дорівнює 12 см, а кожна наступна на 0,5 см коротша за попередню. Знайдіть довжину третьої ланки; восьмої ланки.

3 **854.** Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Доведіть, що:

$$1) a_{10} = a_3 + 7d; \quad 2) a_7 + a_3 = a_1 + a_9.$$

855. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:

$$1) a_{10}, \text{ якщо } a_1 = 8, a_5 = 2;$$

$$2) a_{100}, \text{ якщо } a_{40} = -20, d = -3.$$

856. Скільки додатних членів містить арифметична прогресія 8; 7,7; 7,4; ...?

857. Знайдіть найбільший від'ємний член арифметичної прогресії (a_n) , у якої $a_1 = -8,9, d = 0,2$.

4 **858.** Периметр трикутника дорівнює 39 см, причому довжини його сторін утворюють арифметичну прогресію. Чи можна знайти довжину хоча б однієї з них?

859. Кути деякого трикутника утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що один з них дорівнює 60° .

860. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 7. Знайдіть другий і третій її члени, якщо вони є квадратами двох послідовних натуральних чисел.

861. Доведіть, що коли a, b і c – три послідовних члени арифметичної прогресії, то:

$$1) c^2 = (a + 2b)^2 - 8ab; \quad 2) \left(\frac{a - c}{2} \right)^2 = b^2 - ac.$$

До § 17

1 **862.** Знайдіть S_{100} – суму ста перших членів арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 2, a_{100} = 198$.

2 **863.** Знайдіть суму п'ятдесяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 5, a_2 = 7,5$.

864. Знайдіть суму всіх цілих від'ємних чисел від -20 до -1 .

865. Довжини сторін шестикутника утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть периметр шестикутника, якщо найкоротша його сторона дорівнює 10 см, а найдовша – 20 см.

3 866. Знайдіть суму перших тридцяти членів арифметичної прогресії (a_n) з різницею d , якщо:

1) $y_{30} = 15$, $d = 2$; 2) $y_7 = 5$, $d = -3$.

867. Різниця арифметичної прогресії (a_n) дорівнює d . Знайдіть:

1) d , якщо $a_1 = 4$; $S_{10} = 175$; 2) a_1 , якщо $d = 5$; $S_8 = 196$.

868. Ганнуса взяла в бібліотеці роман обсягом 324 сторінки. Першого дня вона прочитала 20 сторінок, а кожного наступного дня читала на 4 сторінки більше, ніж попереднього. За скільки днів Ганнуса прочитала роман?

4 869. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії, якщо сума перших десяти її членів дорівнює 170, а сума перших двадцяти її членів – 540.

870. В арифметичній прогресії (a_n) :

1) $a_3 + a_7 = 18$. Знайдіть S_9 ; 2) $a_{11} = 5$. Знайдіть S_{21} .

871. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, менших за число 100 і не кратних числу 4.

872. Спростіть вираз:

$$1) \frac{p \cdot p^2 \cdot \dots \cdot p^n}{p \cdot p^3 \cdot \dots \cdot p^{2n-1}};$$

$$2) \frac{c^2 \cdot c^4 \cdot c^6 \cdot \dots \cdot c^{2n}}{c \cdot c^2 \cdot c^3 \cdot \dots \cdot c^n}.$$

До § 18

1 873. Чи є геометричною прогресією послідовність натуральних степенів числа a ($a \neq 0$):

$$a^1, a^2, a^3, a^4, \dots?$$

2 874. Відомо два перших члени геометричної прогресії: 0,5 і 1,5. Знайдіть наступні за ними чотири члени.

875. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:

1) $b_3 = 8$, $b_4 = 32$; 2) $b_4 = 2$, $b_6 = 18$ і $q > 0$.

876. Довжини трьох відрізків утворюють геометричну прогресію. Знайдіть середній за величиною відрізок, якщо менший з відрізків дорівнює 1 см, а більший – 9 см.

3 877. Запишіть перші п'ять членів геометричної прогресії, у якій третій і четвертий члени відповідно дорівнюють 8 і –16.

878. Серед членів геометричної прогресії (b_n) є як додатні, так і від'ємні члени, $b_2 = 8$, $b_4 = 72$. Знайдіть b_1 .

879. Членами геометричної прогресії (c_n) є лише додатні числа, $c_4 = 125$, $c_6 = 5$. Знайдіть c_8 і c_9 .

880. Між числами 27 і 12 уставте таке від'ємне число, щоб воно разом з даними утворювало геометричну прогресію.

4 881. Число 768 є членом геометричної прогресії 3; 6; 12; Знайдіть його номер.

882. При якому значенні x числа $x - 1$, $3 - 3x$ і $4x + 1$ є послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.

883. Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:

1) $b_1 + b_3 = 6$, $b_2 + b_4 = 12$;

2) $b_4 - b_2 = 18$, $b_5 - b_3 = 36$.

884. Чи можуть довжини сторін прямокутного трикутника утворювати геометричну прогресію? Якщо так, укажіть знаменник такої прогресії.

До § 20

1 885. Знайдіть суму трьох перших членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 8$, $q = -2$.

2 886. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

1) S_4 , якщо $b_1 = -2$, $q = 10$; 2) S_5 , якщо $b_1 = -60$, $q = 2$;

3) S_6 , якщо $b_1 = 0,1$, $q = -3$; 4) S_7 , якщо $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$.

887. Використовуючи формулу суми геометричної прогресії

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, \text{ подайте у вигляді дроби вираз:}$$

1) $1 + p + p^2 + \dots + p^8$, де $p \neq 1$;

2) $c^8 + c^7 + \dots + c^3$, $c \neq 1$.

3 888. На площині побудовано п'ять квадратів. Сторона першого дорівнює 3 см, а сторона кожного наступного вдвічі більша за сторону попереднього. Знайдіть суму площ цих квадратів.

889. Доведіть, що послідовність (x_n) , яку задано формулою $x_n = 0,2 \cdot 5^{n-1}$, є геометричною прогресією. Знайдіть суму шести перших членів цієї прогресії.

890. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії, перший член якої дорівнює 1, а п'ятий – дорівнює 81, якщо відомо, що її члени з парними номерами – від'ємні.

4 891. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія, у якої $b_5 + b_4 = 72$, $b_4 - b_2 = 18$. Знайдіть S_8 .

892. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 14, а сума їх квадратів дорівнює 84. Знайдіть суму восьми перших членів цієї прогресії.

893. Знайдіть перший член, знаменник і кількість членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_5 - b_1 = 45$, $b_3 + b_1 = 15$, $S_n = -63$.

894. Знайдіть геометричну прогресію, яка складається із шести членів, якщо сума її членів з непарними номерами дорівнює 273, а сума членів з парними номерами – 1092.

895. (Задача про поширення чуток із книжки Я.І. Перельмана «Жива математика», 1967 р.). У невеличке містечко, населення якого складає 50 тисяч осіб, о 8 годині ранку прибув мешканець столиці й привіз цікаву новину. О 8 год 15 хв він розповів цю новину трьом своїм знайомим, після чого ще через 15 хв кожний з них розповів новину трьом тим своїм знайомим, які про неї не знали. Після цього кожний з дев'яти мешканців міста, що дізналися про цю новину, розповів її трьом своїм знайомим і так само далі. О котрій годині (приблизно) про цю новину дізнаються всі мешканці міста?

Розділ 4

Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики

У цьому розділі ви:

- **ознайомитесь** з комбінаторними правилами суми і добутку; поняттями випадкової, вірогідної, неможливої події;
- **навчитеся** обчислювати відносну частоту та ймовірність випадкової події; подавати статистичні дані у вигляді таблиць, діаграм, графіків.

§ 21. КОМБІНАТОРНІ ЗАДАЧІ. КОМБІНАТОРНІ ПРАВИЛА СУМИ І ДОБУТКУ


Комбінаторика – розділ математики, що вивчає питання вибору та розташування елементів деякої скінченної множини відповідно до заданих умов.

Розглянемо приклади задач з комбінаторики.

Приклад 1. Скількома способами легкоатлет, збираючись на тренування, може обрати собі пару спортивного взуття, маючи 5 пар кросівок і 2 пари кедів?

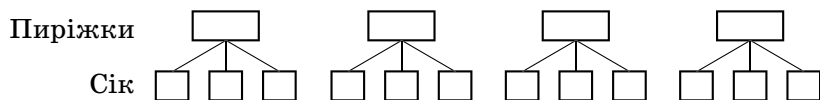
Очевидно, що вибрати одну з пар взуття, кросівки *або* кеди, можна $5 + 2 = 7$ способами.

Узагальнюючи, отримаємо *комбінаторне правило суми*:

 Якщо деякий елемент A можна вибрати k_1 способами, а елемент B (незалежно від вибору елемента A) – k_2 способами, то вибрати A *або* B можна $k_1 + k_2$ способами.

Це правило поширюється на три і більше елементів.

Приклад 2. У меню шкільної їдальні є на вибір 4 види піржків і 3 види соку. Скільки різних варіантів вибору сніданку з одного піржочка і однієї склянки соку є в учня цієї школи?



Мал. 76

Пиріжок учень може вибрати 4 способами i до кожного пиріжка обрати сік 3 способами (мал. 76). Отже, учень має $4 \cdot 3 = 12$ варіантів вибору сніданку.

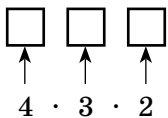
Узагальнюючи, приходимо до *комбінаторного правила добутку*:



якщо деякий елемент A можна вибрати k_1 способами i після кожного такого вибору (незалежно від вибору елемента A) інший елемент B можна вибрати k_2 способами, то пару об'єктів A і B можна вибрати $k_1 \cdot k_2$ способами.

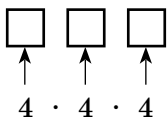
Це правило також поширюється на три і більше елементів.

Приклад 3. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, якщо в числі: 1) цифри не повторюються; 2) цифри повторюються?



Мал. 77

Розв'язання. 1) Маємо 4 способи для сотень числа (мал. 77). Після того як місце сотень заповнене (наприклад, цифрою 1), для десятків залишається 3 способи, міркуючи далі, для одиниць – 2 способи. Отже, маємо:



Мал. 78

4 способи, i після кожного з них – 3 способи, i після кожного з них – 2 способи. За правилом добутку маємо $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ числа.

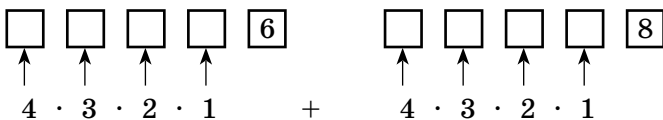
2) Якщо цифри в числі повторюються, то кожне з трьох місць можна заповнити 4 способами (мал. 78), і тоді таких чисел буде $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Відповідь. 1) 24 числа; 2) 64 числа.

Зауважимо, що, не користуючись комбінаторними правилами, подібні задачі ми могли б розв'язувати лише шляхом переліку всіх чисел, які задовольняють умову, а таке розв'язання є, безумовно, дуже громіздким.

Приклад 4. Скільки парних п'ятицифрових чисел можна скласти з цифр 5, 6, 7, 8, 9, якщо в числі цифри не повторюються?

Розв'язання. Парне п'ятицифрове число можна отримати, якщо останньою його цифрою буде 6 або 8. Чисел, у яких останньою цифрою є 6, буде $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (мал. 79),



Мал. 79

а тих, у яких останньою цифрою є 8, – також 24. За комбінаторним правилом суми всього парних чисел буде $24 + 24 = 48$.

Відповідь. 48.

Приклад 5. Абетка племені АБАБ містить лише дві літери, «а» і «б». Скільки слів у мові цього племені складаються: 1) з двох букв, 2) з трьох букв?

Розв'язання. 1) аа, ба, аб, бб (усього чотири слова); 2) ааа, ааб, аба, абб, ббб, бба, баб, баа (усього вісім слів).

Зауважимо, що знайдена кількість слів узгоджується з комбінаторним правилом добутку. Оскільки на кожне місце є два «претенденти» – «а» і «б», то слів, що містять дві літери, має бути $2 \cdot 2 = 4$, а три літери – $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Приклад 6. У футбольній команді з 11 гравців треба вибрати капітана і його заступника. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Капітаном можна обрати будь-кого з 11 гравців. Після цього його заступником – будь-кого з 10 гравців, що залишилися. Таким чином (за правилом добутку), є $11 \cdot 10 = 110$ різних способів.

Приклад 7. У країні Дивосвіт 10 міст, кожен два з яких сполучено авіалінією. Скільки авіаліній у цій країні?

Розв'язання. Оскільки кожна авіалінія сполучає два міста, то першим з них може бути будь-яке з 10 міст, а другим – будь-яке з 9, що залишилися. Отже, кількість таких авіаліній складає $10 \cdot 9 = 90$. Однак при цьому кожна з авіаліній враховано двічі. Тому всього їх буде $90 : 2 = 45$.

Комбінаторні задачі нерозривно пов'язані із задачами теорії ймовірності, ще однієї галузі математики, яку ми розглянемо в наступних параграфах підручника.



Щось близьке до комбінаторики вперше згадується в китайських рукописах XIII–XII ст. до н. е. Деякі комбінаторні задачі розв'язували і в Давній Греції. Зокрема, Арістоксен із Тарента (IV ст. до н. е.), учень Арістотеля, перелічив різні комбінації довгих і коротких складів у віршових розмірах. А Папп Олександрійський у IV ст. н. е. з'ясував кількість пар і трійок, які можна скласти з трьох елементів, що можуть повторюватися. Деякі елементи комбінаторики були відомі і в Індії у II ст. до н. е. Індійці вміли обчислювати числа, які зараз відомі нам як коефіцієнти формули бінома Ньютона. Пізніше, у VIII ст. н. е., араби знайшли й саму цю формулу, отже, і її коефіцієнти, які нині обчислюють за допомогою комбінаторних формул або «трикутника Паскаля».

Сучасного вигляду згадані комбінаторні формули набули завдяки середньовічному вченому Леві бен Гершону (XIV ст.) та французькому математику П. Ерігону (XVII ст.).

У III ст. н. е. сирійський філософ Порфирій для класифікації понять склав особливу схему, яка отримала назву «дерево Порфирія». Зараз подібні дерева використовуються для розв'язування певних задач комбінаторики в різноманітних галузях знань. Деякі раніше невідомі комбінаторні задачі розглянув Леонардо Пізанський (Фібоначчі) у своїй праці «Liber Abaci» (1202 р.), зокрема, про знаходження кількості гирь, за допомогою яких можна відміряти вагу, що є цілим числом від 1 до 40 фунтів. З часів грецьких математиків було відомо дві послідовності, кожний член яких отримували за певним правилом з попередніх, – арифметична і геометрична прогресії. Натомість в одній із задач Фібоначчі вперше використав формулу задання члена послідовності через два попередніх, яку назвали рекурентною. Надалі метод рекурентних формул став одним з найпотужніших для розв'язування комбінаторних задач.

Як не дивно, розвитку комбінаторики значною мірою посприяли азартні ігри, які набули неабиякої популярності в XVI ст. Зокрема, у той час питаннями визначення різноманітних комбінацій у грі в кості займалися такі відомі італійські математики, як Д. Кардано, Н. Тарталья та ін. А найбільш повно це питання дослідив Галілео Галілей у XVII ст.

Сучасні комбінаторні задачі високого рівня пов'язані з об'єктами в інших галузях математики: визначниками, скінченними геометріями, групами, математичною логікою тощо.



1. Що вивчає комбінаторика?
2. Сформулюйте комбінаторні правила суми і добутку.



Початковий рівень

896. На тарілці лежить 5 яблук і 8 слив. Скількома способами з тарілки можна взяти:

- 1) один фрукт;
- 2) одне яблуко і одну сливу?

897. У класі 10 юнаків і 15 дівчат. Скількома способами можна вибрати:

- 1) учня із цього класу;
- 2) пару учнів – юнака і дівчину?

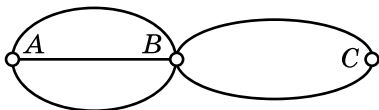
898. Костюм складається з блузки та спідниці. Скільки різних костюмів можна скласти з 5 видів блузок і 4 видів спідниць?

899. У магазині є 7 видів ручок і 5 видів зошитів. Скількома способами можна обрати комплект з однієї ручки й одного зошита?

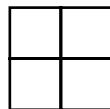


Середній рівень

- 900.** Скільки чотирицифрових чисел можна скласти за допомогою цифр 5, 6, 7, 8, якщо цифри в числі не повторюються?
- 901.** Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, якщо цифри в числі не повторюються?
- 902.** Скількома способами можна вибрати пару з одного голосного і одного приголосного звуків у слові «студент»?
- 903.** Скількома способами можна вибрати пару з одного голосного і одного приголосного звуків у слові «функція»?
- 904.** Скількома способами можна вишикувати в ряд 6 учнів?
- 905.** 10 учасників шахового турніру грають у залі за 5 столиками. Скількома способами можна розмістити шахістів за столами, якщо учасники всіх партій і колір фігур кожного учасника відомі?
- 906.** З міста А до міста В ведуть 3 дороги, а з міста В до міста С – 2 дороги (мал. 80). Скількома способами поштар може пройти від міста А до міста С?



Мал. 80



Мал. 81

- 907.** Кожну клітинку квадратної таблиці 2×2 (мал. 81) можна пофарбувати в зелений або червоний колір. Скільки є різних варіантів розфарбувань цієї таблиці?



Достатній рівень

- 908.** Скількома способами з 5 членів президії зборів можна вибрати голову зборів і секретаря?
- 909.** У секції легкої атлетики тренуються 8 спортсменів. Скількома способами між ними можна розподілити етапи естафети 4 по 100 м (тобто кожен із чотирьох атлетів, що бере участь в естафеті, має пробігти один з етапів: перший, або другий, або третій, або четвертий)?
- 910.** Гральний кубик підкидають двічі. Скільки різних пар чисел можна при цьому отримати?

- 911.** Монету підкидають тричі. Скільки різних послідовностей випадання аверса та реверса¹ можна при цьому отримати?
- 912.** Скільки різних трицифрових чисел, у запису яких є тільки непарні цифри, можна скласти, якщо:
- 1) цифри в числі не повторюються;
 - 2) цифри в числі можуть повторюватися?
- 913.** Скільки різних двоцифрових чисел, у запису яких є цифри 1, 2, 3, 4, 5, можна скласти, якщо цифри в числі:
- 1) не повторюються;
 - 2) можуть повторюватися?
- 914.** Скількома способами можна скласти ряд з 2 білих кульок, чорної, червоної і зеленої, якщо білі кульки мають розташовуватися з обох кінців ряду?
- 915.** Скількома способами на книжковій полиці можна розставити підручники із шести різних предметів так, щоб підручник з алгебри був крайнім ліворуч?



Високий рівень

- 916.** Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо в кожному числі цифри не повторюються?
- 917.** Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 2, 4, 8, якщо цифри в числі не повторюються?
- 918.** Скільки різних правильних нескоротних дробів можна скласти із чисел 2, 3, 5, 7, 12 так, щоб чисельник і знаменник були різними?
- 919.** У турнірі «Кубок Васюків» грало 10 шахістів, кожний з яких зіграв партію з кожним із суперників. Скільки партій було зіграно в цьому турнірі?
- 920.** У прем'єр-лізі з футболу беруть участь 16 команд, кожна з яких проводить по дві зустрічі з кожним із суперників. Скільки матчів буде проведено в прем'єр-лізі?
- 921.** Скільки різних непарних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри в числі не повторюються?

¹ *Аверс* (просторічна назва – «орел», або «герб») – лицьовий бік монети; *реверс* (просторічна назва – «решка») – бік монети, на якому зазвичай розміщується номінал монети.

922. Скільки різних парних трицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі не повторюються?



Вправи для повторення

923. Спростіть вираз:

1) $-4x(3x + 9) + 1,5x(8x - 2)$; 2) $(x - 2)^2 - (x + 1)(x - 1)$.

924. Знайдіть координати точок параболи $y = 2x - x^2$, у яких сума абсциси й ординати дорівнює 2.

925. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^3 + 3x^2 - 5x = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.

926. Побудуйте графік рівняння $|x - y| = 3$.



Життєва математика

927. Майстер спорту з легкої атлетики під час тренування пробіг 400 м за 50 секунд. Знайдіть його середню швидкість на дистанції. Відповідь подайте в кілометрах за годину.



Цікаві задачі для учнів неледачих



928. (Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру», 2016 рік.) У класі 20 учнів. Усі сидять за партами по двоє. Рівно третина хлопчиків сидить із дівчатками, і рівно половина дівчаток сидить з хлопчиками. Скільки хлопчиків у класі?

§ 22. ВИПАДКОВА ПОДІЯ. ЧАСТОТА ТА ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Будь-яка точна наука вивчає не самі явища, що відбуваються в природі, а їх математичні моделі. У математичних задачах часто розглядаються явища, які, залежно від певних умов, можуть або відбутися, або не відбутися. Такі *явища* називають *випадковими*.

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності випадкових явищ.

Нехай проводиться певний дослід (експеримент, спостереження, випробування тощо), результат якого передбачити неможливо. Такі *досліди* в теорії ймовірностей називають *випадковими*. При цьому доцільно проводити лише такі дослі-

ди, які можна повторити, хоча б теоретично, за одних і тих самих умов довільну кількість разів.

Випадковими дослідками є, наприклад, підкидання монети чи грального кубика, купівля лотерейного квитка, стрільба по мішені тощо.

Отже,



випадковий дослід – це дослід (експеримент, спостереження, випробування), результат якого залежить від випадку і який можна повторити багато разів за одних і тих самих умов.

Результатом випадкового дослідку є *випадкова подія*.



Випадкова подія – це подія, яка за одних і тих самих умов може відбутися, а може й не відбутися.

Прикладами випадкових подій є «випадіння одиниці при підкиданні грального кубика», «випадіння аверса при підкиданні монети», «виграш 10 грн при купівлі лотерейного квитка» тощо. Такі події, як «закипання води при її нагріванні до 100 °С» або «зменшення довжини дроту при його охолодженні» не можна назвати випадковими, бо вони є закономірними.

Випадкові події, як правило, позначають великими латинськими літерами: A, B, C, D, \dots

Приклад 1. У ящику є лише білі й чорні кульки. З нього навмання виймають одну кульку. Які з подій A, B, C, D при цьому можуть відбутися:

A – вийнято білу кульку; B – вийнято чорну кульку;
 C – вийнято зелену кульку; D – вийнято кульку?

Розв'язання. Оскільки з ящика можна вийняти лише те, що в ньому є, то вийняти білу або чорну кульку можна, а зелену – ні. Можна також стверджувати, що будь-який предмет, який навмання виймають з ящика, буде кулькою, оскільки там немає нічого, окрім кульок. Отже, події A і B можуть відбутися (а можуть і не відбутися); подія C не може відбутися, а подія D обов'язково відбудеться.

Відповідь. A, B, D .



Подію, яка за даних умов обов'язково відбудеться, називають вірогідною.

Подію, яка за даних умов ніколи не відбудеться, називають неможливою.

У прикладі 1 події A і B – випадкові, D – вірогідна подія, C – неможлива подія.

Приклад 2. Нехай проводиться деякий випадковий дослід, наприклад певний стрілець робить постріли по мішені. Нас цікавить, як математично оцінити шанси стрільця влучити в мішень за одних і тих самих незмінних умов.

Щоб це з'ясувати, розглянемо поняття *частоти події* та *відносної частоти події*.



Якщо за незмінних умов проведено n випадкових дослідів і в $n(A)$ випадків подія A відбулася, то число $n(A)$ називають *частотою події A* , а відношення $\frac{n(A)}{n}$ – *відносною частотою події A* .

Приклад 3. Дослід полягає в підкиданні кубика 150 разів поспіль. Нехай випадкова подія A – випадання шістки. Під час досліду ця подія відбулася 24 рази. Число 24 є частотою події A , а відношення $\frac{24}{150} = \frac{4}{25} = 0,16$ є відносною частотою події A .

Відносна частота події зміниться, якщо зміниться кількість дослідів або буде проведено іншу серію дослідів за тих самих умов.

Приклад 4. Різні вчені в різні роки проводили дослід, який полягав у багаторазовому підкиданні монети, та розглядали подію A – випадання аверса. Результати цих дослідів систематизовано в таблицю в порядку зростання кількості дослідів.

№ п/п	Дослідник	Роки життя	Кількість підкидання монети, n	Кількість випадання аверса, $n(A)$	Відносна частота, $\frac{n(A)}{n}$
1	Ж. Бюффон	1707–1788	4040	2048	0,5069
2	Де Морган	1806–1871	4092	2048	0,5005
3	В. Феллер	1906–1970	10 000	4979	0,4979
4	К. Пірсон	1857–1936	12 000	6019	0,5016
5	В. Джевонс	1835–1882	20 480	10 379	0,5068
6	К. Пірсон	1857–1936	24 000	12 012	0,5005
7	В. Романовський	1879–1954	80 640	40 151	0,4979

Зрозуміло, що монети в дослідах різних учених були різними, але сам дослід і подію, яку вони розглядали, можна вважати однаковими. Ці досліди, проведені різними вченими в різні епохи в різних країнах, дають приблизно один і той самий результат: відносна частота події A близька до числа $0,5$. У даному випадку число $0,5$ називають *статистичною ймовірністю події*.



Якщо під час проведення досить великої кількості випадкових дослідів значення відносної частоти випадкової події A є близьким до деякого певного числа, то це число називають *статистичною ймовірністю події A* .

Ймовірність прийнято позначати латинською літерою p (перша літера французького слова *probabilite* та латинського *probabilitas*, що перекладається як «можливість», «ймовірність»). Отже, для прикладу 4 можна записати:

$$p(A) = 0,5, \text{ або } p = 0,5.$$

Доходимо висновку, що



Ймовірність випадкової події можна знайти з досить великою точністю, якщо випадковий дослід проводити велику кількість разів. Що більше проведено дослідів, то ближчим є значення відносної частоти випадкової події до ймовірності цієї події.

Повернемося до питання, сформульованого у прикладі 2, тобто до математичної оцінки шансів стрільця влучити в мішень. Тепер зрозуміло, що таку математичну оцінку дає ймовірність. Для того щоб оцінити ймовірність влучення стрільцем у мішень (подія A), необхідно, щоб він зробив достатньо велику кількість пострілів (в одних і тих самих умовах). Тоді відносну частоту події A можна буде вважати ймовірністю влучення стрільця в мішень. Нехай, наприклад, протягом певного періоду зроблено 1000 пострілів, з яких 781 виявився влучним. Тоді відносну частоту $\frac{781}{1000} = 0,781$ можна вважати ймовірністю влучення цього стрільця в дану мішень.

Якщо відома ймовірність події A , то можна приблизно оцінити, скільки разів подія A відбудеться, якщо зробити певну кількість дослідів.

Приклад 5. Ймовірність влучення стрільця в мішень дорівнює 0,781. Скільки приблизно влучних пострілів буде в цього стрільця в серії з 50 пострілів?

Розв'язання. Нехай у серії з 50 пострілів влучили x разів. Тоді $\frac{x}{50}$ – відносна частота влучних пострілів. Якщо вважати, що відносна частота влучень приблизно дорівнює ймовірності, то $\frac{x}{50} \approx 0,781$, тобто $x \approx 39$.

Відповідь. 39 влучних пострілів.

А ще раніше...

Теорію ймовірностей нерідко називають «ученням про випадкове». На багатьох прикладах можна впевнитися в тому, що масові випадкові явища теж мають свої закономірності, знання про які можна успішно використовувати в практичній діяльності людини.

Ще в сиву давнину люди помітили, що кілька мисливців, кинувши списи одночасно, можуть вразити звіра з більшою ймовірністю, ніж один мисливець. Цей висновок не був науковим, а ґрунтувався на спостереженнях і досвіді.

Як наука теорія ймовірностей почала формуватися в XVII ст. На її розвиток вплинули тогочасні нагальні потреби науки і практики, зокрема в справі страхування, яке поширювалося завдяки бурхливому розвитку торговельних зв'язків та подорожей. Зручною моделлю для розв'язування задач і аналізу понять теорії ймовірностей були для вчених азартні ігри. Про це зазначав Гюйгенс у своїй книзі «Про розрахунки в азартній грі» (1657 р.), яка стала першою у світі книгою з питань теорії ймовірностей. Подальшому розвитку теорії ймовірностей (XVII–XVIII ст.) сприяли праці Б. Паскаля, Д. Бернуллі, Ж.Л. Д'Аламбера, Д. Крега, Т. Сімпсона, П. Ферма, Т. Байеса та ін.

Важливий внесок у теорію ймовірностей зробив швейцарський математик Я. Бернуллі (1654–1705): він довів закон великих чисел у найпростішому випадку незалежних випробувань у книзі «Аналітична теорія ймовірностей».

У 1718 р. англійський математик А. Муавр (1667–1754) опублікував книгу «Вчення про випадки», у якій дослідив закономірності, що часто можна спостерігати у випадкових явищах.

Уперше основи теорії ймовірностей виклав французький математик П. Лаплас (1749–1827).

У подальшому теорія ймовірностей розвивалася завдяки працям француза С. Пуассона (1781–1840) та росіян П.Л. Чебишова (1821–1894), А.А. Маркова (1856–1922) та О.М. Ляпунова (1857–1918).

Свій внесок у розвиток теорії ймовірностей зробили й українські математики: Б.В. Гнеденко (1912–1996), Й.І. Гіхман (1918–1985), А.В. Скороход (1930–2011), М.Й. Ядренко (1932–2004).



1. Що вивчає теорія ймовірностей?
2. Що таке випадковий дослід?
3. Що таке випадкова подія?
4. Яку подію називають вірогідною, а яку – неможливою?
5. Що називають частотою і що – відносною частотою події?
6. Що називають статистичною ймовірністю події?



Початковий рівень

929. (Усно). Які з подій є випадковими:

- 1) при підкиданні грального кубика випаде 6 очок;
- 2) при температурі 0 °С вода замерзне;
- 3) придбавши лотерейний квиток, виграють 200 грн;
- 4) наступним днем після 1 березня буде 2 березня;
- 5) прізвище навмання вибраного дев'ятикласника починатиметься з букви «А»;
- 6) довжина кола радіуса 5 см дорівнюватиме 10π см?

930. (Усно). Які з подій вірогідні, а які – неможливі:

- 1) сонце зійде на сході;
- 2) при підкиданні грального кубика випаде кількість очок, що кратна числу 11;
- 3) навмання вибране трицифрове число, складене із цифр 7, 8, 9, виявиться більшим за 600;
- 4) двоцифрове число, складене із цифр 1 і 2, буде кратним числу 10;
- 5) випаде білий сніг;
- 6) кількість днів навмання вибраного місяця буде більшою за 31?

931. Які з подій випадкові, вірогідні, неможливі:

- 1) виграти партію в шахи у суперника свого рівня;
- 2) крокодил буде літати;
- 3) при підкиданні двох гральних кубиків з'являться очки, сума яких більша за 12;
- 4) запізнення потяга Харків–Львів;
- 5) 5 травня наступного року буде сонячно;
- 6) наступним днем після п'ятниці буде субота;
- 7) наступним днем після понеділка буде неділя;
- 8) днем народження людини, яку зустріли, буде 30 червня;
- 9) днем народження людини, яку зустріли, буде 31 червня;
- 10) вийняти зелену кульку з коробки із зеленими і чорними кульками?

932. Наведіть по два приклади вірогідної, неможливої, випадкової події.



Середній рівень

933. Перемалюйте таблицю в зошит і для кожного досліді вкажіть приклад вірогідної, неможливої, випадкової події.

№ п/п	Дослід	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Виймання навмання кульки з коробки з білими і чорними кульками			
2	Відривання листка у відривному календарі			
3	Виймання навмання карти з колоди карт			
4	Складання двоцифрового числа із цифр 3 і 4			

934. Перемалюйте таблицю в зошит і для кожного досліді вкажіть приклад вірогідної, неможливої і випадкової події.

№ п/п	Дослід	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Витягування навмання цукерки з коробки із цукерками з білого і чорного шоколаду			
2	Складання двоцифрового числа із цифр 8 і 9			
3	Визначення дати народження деякої людини			
4	Визначення кількості днів навмання вибраного року			

935. Випадковий дослід полягав у підкиданні грального кубика, проведеному 200 разів. Результати досліді занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит та обчисліть відносну частоту випадання кожного окремого числа.

Число	1	2	3	4	5	6
Кількість випадання числа	33	32	35	34	36	30
Відносна частота випадання числа						

- 936.** Було виконано п'ять серій по 50 підкидань монети в кожній. Результати досліду занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит та обчисліть відносну частоту події A в кожній із серій.

Серія	1	2	3	4	5
Випадання аверса (подія A)	23	26	24	25	28
Відносна частота події A					

- 937.** Відомо, що в партії з 1000 батарейок зазвичай є 3 браковані. Яка ймовірність придбати браковану батарейку з такої партії?
- 938.** У заводській партії, що налічує 10 000 деталей, 15 є бракованими. Яка ймовірність того, що взята навмання з партії деталь виявиться бракованою?



Достатній рівень

- 939.** (Усно). Стрелець виконав два постріли по мішені: один раз влучив, а другий – ні. Чи можна стверджувати, що для цього стрільця ймовірність влучення в мішень за даних умов дорівнює 0,5? Чому?
- 940.** Щоб з'ясувати, з яким кольором волосся в місті мешканців найбільше, а з яким – найменше, дослідники розійшлися по різних частинах міста й записували колір волосся кожного мешканця, що їм зустрівся. Результати цього дослідження було занесено в таблицю.

Колір волосся	шатени	блондини	брюнети	руді
Кількість людей	423	238	222	87

Оцініть (з точністю до сотих) ймовірність того, що обраний навмання житель міста:

1) шатен; 2) брюнет; 3) не блондин; 4) не рудий.

- 941.** В умовах попередньої задачі оцініть (з точністю до сотих) ймовірність того, що обраний навмання житель міста:
- 1) рудий; 2) блондин; 3) не шатен; 4) не брюнет.

- 942.** Троє друзів прийшли в комп'ютерний клуб і здали свої капелюхи. Коли вони розходилися по домівках, раптово вимкнулося світло і кожний взяв капелюх навмання. Які з наступних подій випадкові, неможливі, вірогідні:
- 1) кожний узяв свій капелюх;

- 2) кожний вийшов з капелюхом;
- 3) усі вдягли чужі капелюхи;
- 4) двоє вдягли чужі капелюхи, а один – свій;
- 5) один вдягнув чужий капелюх, а двоє – свої?

943. (Проектна діяльність.) Візьміть деякий текст українською мовою, виберіть у ньому будь-яких п'ять рядків підряд. Обчисліть відносну частоту в цих рядках кожної з букв «а» і «й» та порівняйте їх.

944. (Проектна діяльність.) Візьміть деякий текст українською мовою, виберіть у ньому будь-які десять рядків підряд. Обчисліть відносну частоту в цих рядках кожної з букв «р» і «ф» та порівняйте їх.

945. (Усно). На основі задач 943–944 дайте відповідь на запитання: чому на клавіатурах комп'ютерів букви «а» та «р» розташовані ближче до центра, а букви «й» та «ф» – ближче до краю.

946. Було перевірено 1000 деталей, з яких 5 виявилися бракованими.

- 1) Скільки приблизно бракованих деталей буде в партії з 1800 деталей?
- 2) Скільки приблизно деталей було в партії, якщо серед них виявлено 12 бракованих?

947. Серед 200 опитаних жителів міста 198 мають мобільний телефон.

- 1) Скільки приблизно мобільних телефонів буде в 500 опитаних жителів цього міста?
- 2) Скільки приблизно було опитано жителів міста, якщо серед них тих, які мали мобільний телефон, виявилось 693?



Високий рівень

948. Відомо, що деякий баскетболіст зі штрафного кидка влучає в кошик з ймовірністю, більшою за 0,8, але меншою за 0,83. Скільки приблизно штрафних кидків він виконав під час тренування, якщо серед них допустив 4 промахи?

949. Відомо, що деякий стрілець влучає в мішень з ймовірністю, більшою за 0,89, але меншою за 0,9. Скільки приблизно пострілів він виконав під час тренування, якщо серед них сталося 6 промахів?



Вправи для повторення

2 950. Виконайте дію:

$$1) \frac{6a + 7}{2a - 1} + \frac{4a + 8}{1 - 2a}; \quad 2) 32p^3n^2 \cdot \frac{n^7}{8p^6}.$$

3 951. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків рівнянь $x^2 + y^2 = 16$ і $x - y = 4$. Накресліть графіки цих рівнянь і позначте знайдені точки.

952. Розв'яжіть нерівність:

$$15x + (4x + 1)(3x - 8) > (4x - 5)(4x + 5) + 27.$$

4 953. Відомо, що x_1 і x_2 – корені рівняння $5x^2 + 7x - 9 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть $x_1^3x_2 + x_2^3x_1$.

954. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$.



Життєва математика

955. До березня 2017 року діяли такі тарифи на електроенергію для мешканців житлових будинків:

Обсяг споживання	Тариф (коп. за 1 кВт · год, з ПДВ)
Населення, яке проживає в житлових будинках (у тому числі в будинках, обладнаних кухонними електроплитами)	
– За обсяг, спожитий до 100 кВт · год електроенергії на місяць	71,4
– За обсяг, спожитий від 100 до 600 кВт · год	129,0
– За обсяг, спожитий понад 600 кВт · год електроенергії на місяць	163,8

Лічильник електроенергії на 1 листопада показував 12 615 кіловат-годин, а на 1 грудня – 12 807 кіловат-годин. Скільки треба заплатити за електроенергію за листопад? Відповідь подайте у гривнях.



Цікаві задачі для учнів неледачих



956. (Задача Ейлера). Знайдіть число, четвертий степінь якого, поділений на половину цього числа і збільшений на 14,25, дорівнюватиме 100.

§ 23. КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Проводити численні досліди для визначення статистичної ймовірності події досить важко, а іноді – неможливо. Проте в багатьох прикладних задачах ймовірність можна визначити, використовуючи *класичне означення ймовірності*.

Розглянемо приклад.

Приклад 1. У ящику лежать дві кульки: біла і чорна. З нього навмання виймають одну кульку.

Розглянемо події:

A – вийнято білу кульку;

B – вийнято чорну кульку;

C – вийнято червону кульку;

D – вийнято кульку.

Як відомо з попереднього параграфа, подія C – неможлива, подія D – вірогідна, а події A і B – випадкові.

Оскільки білих і чорних кульок у ящику порівну, то шанси бути витягнутою в чорної кульки є такими самими, що й у білої. Жодних інших кульок у ящику немає, тож, якщо дослід з витягуванням кульки проводити багаторазово, кожного разу повертаючи кульку в ящик, можна дійти висновку, що приблизно в половині випадків буде витягнуто білу кульку і ще в половині випадків – чорну.

За даних умов число 0,5 (половина) – це статистична ймовірність випадкової події «вийняти білу кульку».

Цю ймовірність можна отримати, якщо кількість білих кульок, тобто 1, поділити на кількість усіх кульок ($1 + 1 = 2$).

Отже, сформулюємо *класичне означення ймовірності*:



Ймовірність випадкової події A дорівнює відношенню кількості випадків, що сприяють появі події A , до кількості всіх можливих випадків.

У вигляді формули це означення можна записати так:



$$p(A) = \frac{m}{n},$$

де n – кількість усіх можливих випадків; m – кількість випадків, що сприяють появі події A .

Іноді ймовірність подають у відсотках, тоді $p(A) = 50\%$.

Повертаючись до прикладу 1, можна легко знайти ймовірності подій B , C і D . Отже,

$$p(B) = \frac{1}{2} = 0,5; \quad p(C) = \frac{0}{2} = 0; \quad p(D) = \frac{2}{2} = 1.$$

Отже, доходимо важливого висновку:



Ймовірність вірогідної події дорівнює 1, ймовірність неможливої події дорівнює 0; ймовірність випадкової події може бути будь-яким числом від 0 до 1.

Ймовірності подій A і B в даному випробуванні однакові, бо $p(A) = p(B) = 0,5$. Такі події називають *рівноймовірними*.



Рівноймовірні події – події, ймовірність яких однакова в даному випробуванні.

Розглянемо ще приклади.

Приклад 2. Із 30 учнів класу 12 мають з алгебри оцінки високого рівня. Яка ймовірність того, що навмання вибраний учень класу матиме з алгебри оцінку високого рівня?

Розв'язання. Маємо: $n = 30$, $m = 12$, $p = \frac{m}{n} = \frac{12}{30} = 0,4$.

Відповідь. 0,4.

Приклад 3. Одночасно підкинули два гральних кубики. Яка ймовірність того, що сума очок, які випадуть:

1) дорівнює 6; 2) менша за 5?

Розв'язання. Складемо таблицю суми очок, які можуть випасти на двох гральних кубиках при їх одночасному підкиданні. $n = 36$ – кількість усіх можливих подій.

II \ I	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1) Маємо 5 випадків, коли сума очок на обох кубиках дорівнює 6, тому $m = 5$ і

$$p = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}.$$

2) Маємо 6 випадків, коли сума очок на обох кубиках менша за 5. Тому $m = 6$ і $p = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Відповідь. 1) $\frac{5}{36}$; 2) $\frac{1}{6}$.

Приклад 4. У коробці 20 чорних кульок, 25 зелених, а решта – білі. Скільки білих кульок у коробці, якщо ймовірність витягнути білу кульку:

1) дорівнює $\frac{1}{4}$; 2) менша за $\frac{1}{5}$?

Розв'язання. Нехай у коробці x білих кульок. Тоді $n = 20 + 25 + x = 45 + x$ і $m = x$.

Отже, ймовірність витягнути білу кульку дорівнює $\frac{x}{45 + x}$.

1) За умовою $\frac{x}{45 + x} = \frac{1}{4}$, тоді $4x = 45 + x$; тобто $x = 15$.

2) За умовою $\frac{x}{45 + x} < \frac{1}{5}$. Щоб розв'язати нерівність, помножимо її обидві частини на додатне число $5(45 + x)$. Маємо:
 $5x < 45 + x$, звідки $x < 11,25$.

Отже, якщо ймовірність витягнути білу кульку менша за $\frac{1}{5}$, то в коробці не більше 11 білих кульок.

Відповідь. 1) 15; 2) не більше 11.

Приклад 5. Власник мобільного телефону забув дві останні цифри свого PIN-коду, але пам'ятає, що вони різні. Знайти ймовірність того, що він отримає доступ до телефону з першої спроби.

Розв'язання. Двома останніми цифрами PIN-коду можуть бути такі комбінації: 00, 01, 02, 03, ..., 97, 98, 99. Всього їх 100. Але серед них є 10 комбінацій, у яких цифри однакові: 00, 11, 22, ..., 88, 99. Оскільки власник телефону пам'ятає, що всі цифри різні, то він вибиратиме із 90 комбінацій ($100 - 10 = 90$). Отже, $n = 90$. Знаходимо ймовірність того, що власник отримає доступ до телефону з першої спроби, тобто $m = 1$. Тоді $p = \frac{m}{n} = \frac{1}{90}$.

Відповідь. $\frac{1}{90}$.



1. Як знайти ймовірність випадкової події A ?
2. Яка ймовірність у вірогідної події? У неможливої події?
3. У яких межах може змінюватися ймовірність випадкової події?
4. Які події називають рівноймовірними в даному випробуванні?



Початковий рівень

957. Наведіть приклад:

- 1) рівноймовірних подій;
- 2) подій, які не є рівноймовірними в даному випробуванні.



Середній рівень

958. Яка ймовірність того, що:

- 1) наступним днем після 30 березня буде 1 квітня;
- 2) наступним днем після понеділка буде вівторок?

959. Яка ймовірність того, що:

- 1) наступним днем після 30 квітня буде 1 травня;
- 2) наступним днем після середи буде вівторок?

960. На запитання вікторини було отримано 60 правильних відповідей, у тому числі і твоя. Для визначення єдиного переможця навмання витягують картку з прізвиськом. Яка ймовірність того, що приз отримаєш саме ти?

961. Із 30 екзаменаційних білетів учень не вивчив один. Яка ймовірність того, що саме цей білет він витягне на екзамені?

962. У ящику 25 білих кульок і 15 чорних. Яка ймовірність витягнути навмання з ящика:

- 1) білу кульку;
- 2) чорну кульку?

963. У класі 18 хлопців і 12 дівчат. З класу вибирають навмання одного учня. Яка ймовірність того, що це буде:

- 1) хлопець;
- 2) дівчина?

964. Чи є рівноймовірними події:

- 1) A_1 – з 20 карток із числами від 1 до 20 витягнути картку із числом 1;
- A_2 – з 20 карток із числами від 1 до 20 витягнути картку із числом 20;

2) B_1 – витягнути білу кульку з коробки, у якій 3 білі кульки і 7 чорних;

B_2 – витягнути чорну кульку з коробки, у якій 3 білі кульки і 7 чорних;

3) C_1 – при підкиданні грального кубика випало просте число;

C_2 – при підкиданні грального кубика випало складене число;

4) D_1 – витягнути червоний олівець з коробки, де половина олівців червоні, а половина – сині;

D_2 – витягнути синій олівець з коробки, де половина олівців червоні, а половина – сині?

965. Відомо, що в партії з 1000 деталей 2 браковані. Яка ймовірність того, що навання вибрана деталь:

1) бракована;

2) якісна?

966. У магазині виявилось, що в партії із 400 смартфонів 2 бракованих. Яка ймовірність того, що навання вибраний із цієї партії смартфон:

1) бракований;

2) якісний?

967. У кошику 5 червоних, 3 зелених і 2 жовтих яблука. Навання вибирають одне яблуко. Яка ймовірність того, що це яблуко виявиться:

1) червоним;

2) зеленим;

3) червоним або жовтим;

4) не червоним?

968. У коробці 6 червоних, 3 зелених і 1 синій олівець. З коробки навання виймають один олівець. Яка ймовірність того, що цей олівець:

1) зелений;

2) червоний;

3) зелений або синій;

4) не зелений?



Достатній рівень

969. (Задача Д'Аламбера.) Яка ймовірність того, що при двох підкиданнях монети хоча б один раз випаде аверс?

970. З натуральних чисел від 1 до 30 учень навання вибирає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 30?

971. Яка ймовірність того, що навання вибране натуральне число від 1 до 15 буде дільником числа 15 або простим числом?

- 972.** Маємо новий відривний календар невисокосного року. Відриваємо в ньому навмання один листок. Знайдіть ймовірність того, що:
- 1) на листку число 1;
 - 2) на листку число 31;
 - 3) число на листку ділиться на 5.
- 973.** Маємо новий відривний календар високосного року. Відриваємо в ньому один листок. Знайдіть ймовірність того, що:
- 1) на листку число 2;
 - 2) на листку число 30;
 - 3) число на листку є кратним числу 10.
- 974.** Одночасно підкинули два гральних кубики. Яка ймовірність того, що на кубиках:
- 1) випаде однакова кількість очок;
 - 2) сума очок дорівнюватиме 10;
 - 3) сума очок буде не більшою за 3;
 - 4) сума очок буде парним числом.
- 975.** Одночасно підкинули два гральних кубики. Знайдіть ймовірність того, що:
- 1) на кубиках випаде різна кількість очок;
 - 2) сума очок на кубиках дорівнюватиме 7;
 - 3) сума очок на кубиках буде не меншою за 11;
 - 4) сума очок на кубиках буде непарним числом.
- 976.** Складіть таблицю добутку очок, що випали на двох гральних кубиках при їх одночасному підкиданні, аналогічну до таблиці суми очок (див. **Приклад 3** цього параграфа). Знайдіть імовірність того, що добуток очок:
- 1) дорівнюватиме 12;
 - 2) дорівнюватиме 11;
 - 3) буде меншим за 5;
 - 4) буде більшим за 26;
- 977.** У коробці лежать 12 синіх олівців і кілька червоних. Скільки червоних олівців у коробці, якщо ймовірність витягнути навмання:
- 1) синій олівець дорівнює 0,75;
 - 2) червоний олівець дорівнює $\frac{2}{5}$;
 - 3) синій олівець більша за 0,5;
 - 4) червоний олівець менша за $\frac{2}{3}$?
- 978.** У коробці 6 білих і кілька чорних кульок. Скільки чорних кульок у коробці, якщо ймовірність витягнути навмання:
- 1) білу кульку дорівнює 0,6;

- 2) чорну кульку дорівнює 0,25;
- 3) білу кульку менша за 0,5;
- 4) чорну кульку більша за $\frac{1}{4}$?

Високий рівень

- 979.** У коробці 3 чорні ручки, кілька зелених та кілька червоних. Скільки зелених ручок у коробці і скільки червоних, якщо ймовірність навмання витягнути зелену ручку дорівнює 0,2, а червону – 0,5?
- 980.** У шухляді 8 білих хустин, кілька червоних і кілька картатих. Скільки в шухляді червоних хустин і скільки картатих, якщо ймовірність навмання витягнути червону хустину дорівнює 0,5, а картату – 0,1?
- 981.** Юрко, ідучи в гості до Ганнусі, придбав букет з 5 білих і кількох червоних троянд. Скільки червоних троянд у букеті, якщо ймовірність вибрати з нього навмання червону троянду більша за 0,5, але менша за 0,6, при цьому квітів у букеті непарна кількість?
- 982.** У мисці лежить 10 вареників з картоплею і кілька вареників з м'ясом. Скільки вареників з м'ясом у мисці, якщо ймовірність того, що один вибраний навмання вареник буде з м'ясом, більша за 0,2, але менша за 0,5?
- 983.** Яка ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове число ділиться на 3?
- 984.** Картки з номерами 1, 2, 3, 4 виклали в ряд. Яка ймовірність того, що картки з парними номерами опиняться поряд?
- 985.** Підкидають три монети. Яка ймовірність того, що:
- 1) аверсів випаде більше, ніж реверсів;
 - 2) випаде два реверси;
 - 3) усі монети випадуть однаковою стороною;
 - 4) аверсів випаде не більше одного?



Вправи для повторення

2 **986.** Скоротіть дріб: 1) $\frac{14p^{24}n^5}{2p^8n^{10}}$; 2) $\frac{9a^2 - 6a + 1}{9a^2 - 1}$.

987. Розв'яжіть рівняння: 1) $6x^2 + 18x = 0$; 2) $5x^2 - 20 = 0$.

3 988. Побудуйте графік функції $y = -4x + x^2$. Використовуючи графік функції, знайдіть:

- 1) область значень функції;
- 2) проміжок зростання функції.

4 989. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a - 20}{(a - 5)^2} : \left(\frac{a}{a^2 - 25} - \frac{a - 8}{a^2 - 10a + 25} \right)$$

додатне, якщо $a < -5$.

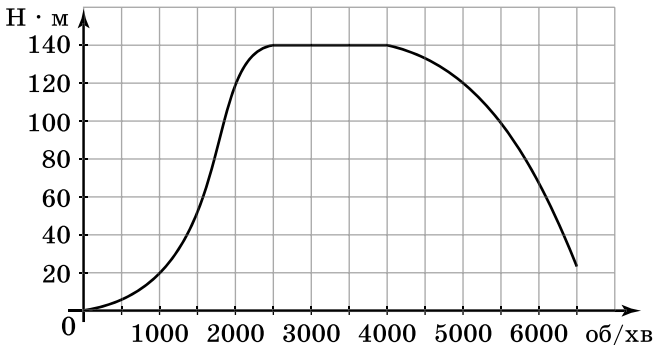
990. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{y}{2x} - \frac{x}{y} = \frac{1}{2}; \\ y^2 - 5xy + 2x^2 = 32. \end{cases}$$



Життєва математика

991. На графіку зображено залежність крутного моменту двигуна від кількості його обертів за хвилину (мал. 82). На осі абсцис відкладено кількість обертів за хвилину, на осі ординат – крутний момент в $\text{Н} \cdot \text{м}$. Швидкість автомобіля (y км/год) наближено обчислюють за формулою $v = 0,036n$, де n – кількість обертів двигуна за хвилину. З якою найменшою швидкістю має рухатися автомобіль, щоб крутний момент був не меншим за $120 \text{ Н} \cdot \text{м}$? Відповідь подайте в кілометрах за годину.



Мал. 82



Цікаві задачі для учнів неледачих



992. Відомо, що рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має коренів і $a + b + c < 0$. Чи можна визначити знак числа c ? У разі позитивної відповіді вкажіть знак числа c .

§24. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ПРО СТАТИСТИКУ. СТАТИСТИЧНІ ДАНІ. СПОСОБИ ПОДАННЯ ДАНИХ ТА ЇХ ОБРОБКИ

У практичній діяльності людям часто доводиться збирати, обробляти та досліджувати різноманітні дані, пов'язані з явищами, процесами та подіями масового характеру. Такі дані називають *статистичними*. На запитання, пов'язані зі статистичними даними, допомагає відповісти *математична статистика*.



Математична статистика – розділ математики, що вивчає математичні методи систематизації, обробки та дослідження статистичних даних для наукових і практичних висновків.

Назва «статистика» походить від латинського *status*, що перекладається як «стан», «становище».

Приклад 1. Під час державної підсумкової атестації з математики 50 дев'ятикласників отримали такі бали:

5	10	4	7	8	9	6	4	11	6
9	2	11	5	6	7	5	8	6	10
8	7	3	10	8	12	9	6	11	7
11	5	6	4	7	5	3	9	5	10
4	6	7	9	8	4	7	5	7	6

Систематизуємо ці дані за рівнями навчальних досягнень у вигляді таблиці: початковий рівень (1–3 бали), середній рівень (4–6 балів), достатній рівень (7–9 балів), високий рівень (10–12 балів). У перший стовпчик запишемо назви рівнів навчальних досягнень. Для кожної оцінки робитимемо позначку рисою у другому стовпчику, у рядку, який відповідає рівню навчальних досягнень. У третій стовпчик запишемо сумарну кількість учнів, які отримали оцінку відповідного рівня:

Рівень навчальних досягнень	Підрахунок кількості учнів	Сума
Початковий		3
Середній		20
Достатній		18
Високий		9

Після обробки результати статистичних досліджень подають у найбільш наочному та стислому вигляді, наприклад, за допомогою таблиць, графіків, діаграм¹.

Приклад 2. Подамо результати статистичного дослідження з Прикладу 1 кількома способами.

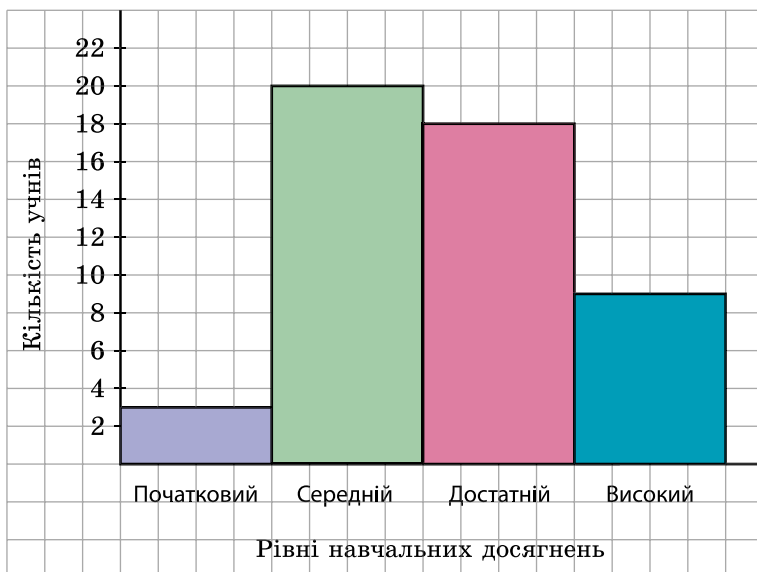
1) У вигляді *таблиці*.

Рівень навчальних досягнень	Кількість учнів
Початковий	3
Середній	20
Достатній	18
Високий	9

або

Рівень навчальних досягнень	Початковий	Середній	Достатній	Високий
Кількість учнів	3	20	18	9

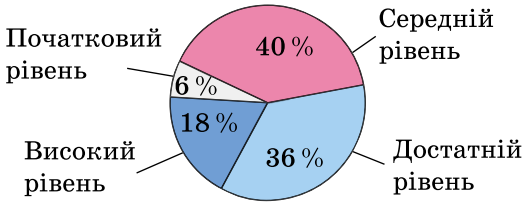
2) У вигляді *стовпчастої діаграми*, яку в статистиці називають *гістограмою* (мал. 83).



Мал. 83

¹ Стовпчасті і кругові діаграми будували в 6 класі.

3) У вигляді *кругової діаграми*. На малюнку 84 подано кругову діаграму відсоткового розподілу кількості учнів за відповідними рівнями навчальних досягнень.



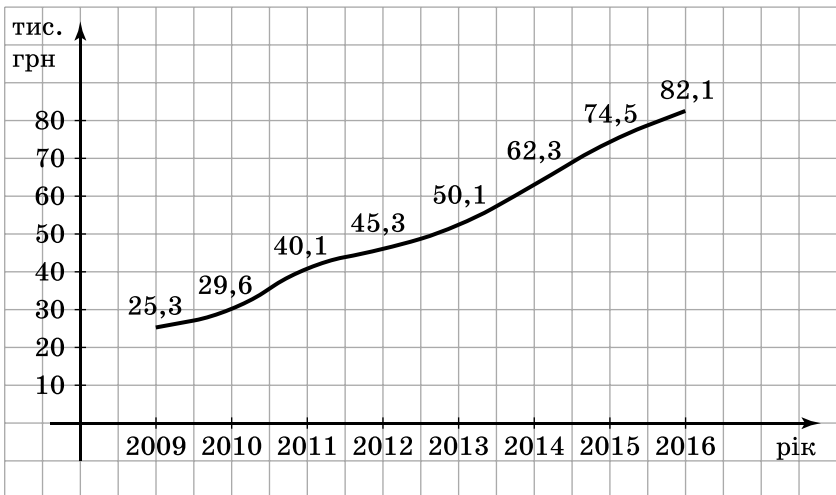
Мал. 84

Результати статистичних досліджень подають у вигляді графіка в тому випадку, коли статистичні дані відображають зміни деякої величини протягом певного проміжку часу (кількох днів, місяців, років).

Приклад 3. У таблиці подано чистий прибуток малого підприємства (у тис. грн) по кожному з останніх восьми років.

Рік	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Прибуток, тис. грн	25,3	29,6	40,1	45,3	50,1	62,3	74,5	82,1

Подамо ці статистичні дані у вигляді *графіка* (мал. 85).



Мал. 85

Подавати результати статистичних досліджень у вигляді таблиць, діаграм, графіків можна, використовуючи на комп'ютері спеціальні програмні засоби, наприклад, *Microsoft Excel* або аналогічні програми, з якими ви вже навчилися працювати на уроках інформатики.



Середнім значенням статистичних вимірювань називають середнє арифметичне статистичних даних.

Нагадаємо, що для того щоб знайти середнє арифметичне кількох чисел, треба їх суму поділити на їх кількість.

Приклад 4. Яким є середнє значення чистого прибутку малого підприємства за останніх вісім років (див. **приклад 3**).

Розв'язання.

$$\frac{25,3 + 29,6 + 40,1 + 45,3 + 50,1 + 62,3 + 74,5 + 82,1}{8} = \frac{409,3}{8} = 51,1625 \text{ (тис. грн)}$$

Відповідь. 51,1625 тис. грн.

У наведених вище прикладах ми розглянули питання систематизації невеликої кількості статистичних даних. А яким чином можна дослідити та систематизувати явища масового характеру, тобто такі, що охоплюють тисячі чи більше досліджуваних об'єктів?

Приклад 5. Із центральної площі невеликого міста відправляються чотири автобуси № 1, № 2, № 3 і № 4. Місцева влада хоче з'ясувати, на якому з маршрутів має бути більше автобусів, а на якому – менше. Розв'язання цієї проблеми пов'язано з певними закономірностями та об'єктивними умовами життя мешканців міста. Звичайно, відповідь можна отримати, опитавши всіх мешканців міста, але це надто довго і дорого.

На практиці ж роблять *вибірку*, тобто опитують вибірково кілька десятків чи сотень людей, після чого систематизують дані у вигляді таблиці. Нехай, наприклад, було опитано 200 мешканців міста, що користуються автобусами № 1, № 2, № 3 і № 4. Мешканець, який користується кількома маршрутами, мав назвати маршрут, яким користується найчастіше. Отримані статистичні дані було систематизовано у вигляді таблиці:

Маршрут	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Кількість користувачів маршруту	48	56	36	60

Таку таблицю називають *частотною*, а числа у другому її рядку – *частотами*. Ці числа показують, як часто трапляється у вибірці те чи інше значення. Суму частот усіх значень вибірки називають *обсягом вибірки*. У нашому прикладі обсягом вибірки є число 200, тобто кількість опитаних мешканців, адже $48 + 56 + 36 + 60 = 200$.

Відносною частотою значення вибірки називають записане у відсотках відношення його частоти до обсягу вибірки. Наприклад, відносна частота маршруту № 1 дорівнює $\frac{48}{200} \cdot 100 \% = 24 \%$.

Якщо, наприклад, місто має між маршрутами № 1, № 2, № 3 і № 4 розподілити 50 автобусів, то на маршрут № 1 доцільно виділити 12 автобусів: $50 \times 0,24 = 12$, тобто 24 % від 50. Подамо остаточні результати дослідження у вигляді таблиці:

Маршрут	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Частота	48	56	36	60
Відносна частота	24 %	28 %	18 %	30 %
Кількість автобусів, які доцільно виділити	12	14	9	15



1. Які дані називають статистичними?
2. Що вивчає математична статистика?
3. Як подають результати статистичних досліджень?
4. Що у статистиці називають гістограмою?
5. Що називають середнім значенням статистичних вимірювань?
6. Що називають обсягом вибірки? Частотою вибірки? Відносною частотою вибірки?



Початковий рівень

993. При щорічному медичному огляді виміряли (у см) зріст десяти студенток і отримали такі дані:

169; 173; 167; 169, 172; 170; 171; 175; 164; 173.

Знайдіть середнє значення цих вимірювань.

994. Виміряли (у м) зріст десяти дев'ятикласників, що взяли участь у конкурсі «Мужність класу», і отримали такі дані:

1,67; 1,72; 1,68; 1,70; 1,73; 1,80; 1,68; 1,81; 1,78; 1,67.

Знайдіть середнє значення цих вимірювань.



Середній рівень

995. У таблиці подано статистичні дані щодо кількості медалей, які здобули українські спортсмени на літніх Олімпійських іграх. Побудуйте гістограму кількості золотих медалей, які здобули українські спортсмени.

Рік олімпіади	Золоті	Срібні	Бронзові	Усього
1996	9	2	12	23
2000	3	10	10	23
2004	9	5	9	23
2008	7	5	15	27
2012	6	5	8	19
2016	2	5	4	11

996. У таблиці подано статистичні дані щодо кількості медалей, які здобули українські школярі на міжнародних математичних олімпіадах за останні чотири роки. Побудуйте гістограму загальної кількості медалей, які здобули українські школярі на міжнародних математичних олімпіадах.

Рік	Золоті	Срібні	Бронзові	Усього
2013	1	3	1	5
2014	2	3	1	6
2015	2	3	1	6
2016	0	2	4	6

997. У таблиці подано статистичні дані щодо місць, що посідала футбольна команда «Дніпро» протягом десяти останніх чемпіонатів України з футболу. За даними таблиці побудуйте графік.

Рік	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Місце	4	3	6	4	4	4	4	2	3	3



Достатній рівень

998. Використовуючи дані таблиці до задачі **995**, побудуйте кругову діаграму розподілу золотих, срібних та бронзових медалей на літніх Олімпійських іграх 2008 року.

999. Використовуючи дані таблиці до задачі **996**, побудуйте кругову діаграму розподілу золотих, срібних та бронзових медалей на Міжнародній математичній олімпіаді 2015 року.



Високий рівень

1000. (Проектна діяльність.) 1) Систематизуйте в частотну таблицю дані вибірки про розмір взуття, які отримано в результаті опитування 40 жінок.

36	38	35	37	38	39	36	38	37	38
39	34	37	38	35	36	39	37	38	39
37	39	35	38	36	38	40	35	37	36
38	37	39	36	38	35	38	37	34	36

2) Знайдіть частоти та відносні частоти значень вибірки.

3) Взуттєва фабрика планує випускати 10 000 пар жіночого взуття щорічно. Яку кількість пар взуття кожного розміру доцільно випускати?

1001. (Проектна діяльність.) 1) Систематизуйте в частотну таблицю дані вибірки про розмір взуття, які отримано в результаті опитування 40 чоловіків.

42	39	41	43	40	42	41	44	42	43
44	42	40	38	43	41	42	44	41	43
45	41	42	40	43	39	44	41	43	42
42	43	39	42	40	44	41	42	43	40

2) Знайдіть частоти та відносні частоти значень вибірки.

3) Взуттєва фабрика планує випускати 20 000 пар чоловічого взуття щорічно. Яку кількість пар кожного розміру доцільно випускати?



Вправи для повторення

2 1002. Ціна письмового стола 4000 грн. Якою буде ціна цього стола після:

- 1) зниження ціни на 5 %;
- 2) підвищення ціни на 10 %?

3 1003. Відстань між селами, що дорівнює 18 км, велосипедист планував подолати за певний час. Але оскільки він рухався зі швидкістю, на 3 км/год меншою за заплановану, то витратив на дорогу на 12 хв більше, ніж планував. З якою швидкістю рухався велосипедист?



1004. Вкладник вніс на банківський депозит 20 000 грн під 10 % річних.

- 1) Яка сума коштів буде на його депозитному рахунку через 3 роки?
- 2) Скільки відсоткових грошей отримає вкладник через 3 роки?



Життєва математика

1005. Податок на додану вартість (ПДВ) в Люксембурзі складає 15 %, в Угорщині 25 %, а в Україні 20 % від ціни товару. Яку суму ПДВ при купівлі планшета доведеться сплатити в кожній із цих країн, якщо його ціна (без ПДВ) в Угорщині складає 31 250 угорських форинтів, а курс угорського форинта такий: 100 угорських форинтів дорівнюють 0,32 євро або 9,17 гривні.



Цікаві задачі для учнів неледачих



1006. (Київська обласна олімпіада юних математиків, 2016 рік). Скільки існує трицифрових чисел з ненульовими цифрами, які мають таку властивість: при будь-якій перестановці цифр отримаємо трицифрове число, що ділиться націло на 4?

Домашня самостійна робота № 5

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. У класі 9 юнаків і 10 дівчат. Скількома способами можна вибрати старосту в цьому класі?

- А. 9; Б. 10; В. 19; Г. 90.

2. Укажіть, яка з подій є випадковою:

- А. навімання вибрана доба матиме 24 години;
 Б. гральний кубик має шість граней;
 В. наступним днем після п'ятниці йде субота;
 Г. навімання вибране трицифрове число кратне числу 7.

3. Середнє значення статистичних даних 8, 7, 9, 10 і 7 дорівнює:

- А. 41; Б. 8,2; В. 7; Г. 10,25.

4. Випадковий дослід полягав у підкиданні грального кубика, яке проведено 100 разів. Результати дослідів занесено в таблицю. Якою є відносна частота випадання числа 6?

Число	1	2	3	4	5	6
Кількість випадання числа	18	15	16	15	19	17

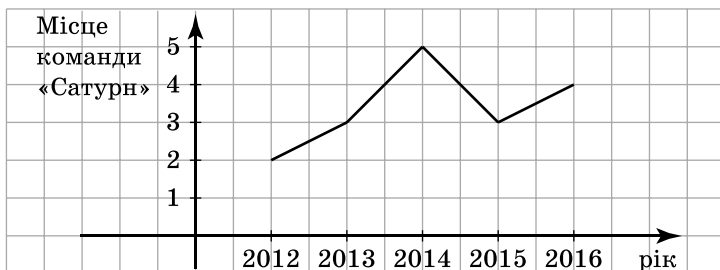
- А. 0,17; Б. 17; В. 0,017; Г. 1,7

5. У наборі новорічних іграшок 6 червоних кульок, 3 білих і 1 жовта. Яка ймовірність того, що взята навмання з набору кулька не буде червоною?

- А. 0,6; Б. 0,4; В. 0,3; Г. 0,1

6. На графіку (мал. 86) показано, які місця посідала волейбольна команда «Сатурн» протягом останніх п'яти чемпіонатів області з волейболу. В якому році, 2013 чи 2015, команда «Сатурн» посіла більш високе місце?

- А. у 2013 році; Б. у 2015 році;
 В. у 2013 році і 2015 році команда «Сатурн» посіла одне й те саме місце;
 Г. неможливо визначити



Мал. 86

- 3** 7. У баскетбольній команді з 5 дівчат треба вибрати капітана і його заступника. Скількома способами це можна зробити?
 А. 5; Б. 10; В. 20; Г. 25.
8. Серед 100 опитаних жителів невеликого міста 97 мали мобільний телефон. Яке число буде найбільш близьким до кількості мобільних телефонів, якщо опитати 200 жителів цього міста?
 А. 194; Б. 98; В. 190; Г. 199.
9. З натуральних чисел від 1 до 24 учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 24?
 А. $\frac{1}{2}$; Б. $\frac{7}{24}$; В. $\frac{3}{8}$; Г. $\frac{1}{3}$.
- 4** 10. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 7, 9, якщо в кожному числі цифри не повторюються?
 А. 256; Б. 24; В. 18; Г. 9
11. Відомо, що деякий біатлоніст влучає в мішень з ймовірністю, більшою за 0,8, але меншою за 0,85. Яке число найбільш точно відображає приблизну кількість пострілів під час тренування, якщо в них біатлоніст мав 14 влучень у мішень?
 А. 17; Б. 20; В. 22; Г. 15.
12. У коробці 4 чорні ручки, кілька синіх та кілька червоних. Скільки синіх ручок у коробці, якщо ймовірність навмання витягнути синю ручку дорівнює 0,5, а червону – 0,3?
 А. 9; Б. 8; В. 12; Г. 10.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО § 21–24

- 1** 1. На полиці стоїть 7 збірок віршів і 3 збірки оповідань. Скількома способами з полиці можна взяти:
 1) будь-яку збірку; 2) збірку віршів і збірку оповідань?
2. Які з подій є випадковими:
 1) при підкиданні грального кубика випаде 5 очок;
 2) площа круга, радіус якого дорівнює 8 см, дорівнюватиме 64π см²;
 3) наступним днем після 31 грудня буде 1 січня;
 4) придбаний лотерейний квиток виявиться виграшним?
3. Виміряли (у см) зріст п'яти дев'ятикласників і отримали такі дані:
 160, 164, 158, 161, 162.
 Знайдіть середнє значення цих вимірювань.

- 2** 4. Було виконано п'ять серій по 100 підкидань монети в кожній. Результати досліду занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит та обчисліть відносну частоту події A в кожній із серій.

Серія	1	2	3	4	5
Випадання аверса (подія A)	47	51	50	48	53
Відносна частота події A					

5. У ящику 11 білих, 4 чорних і 5 зелених кульок. Навмання виймають одну з них. Яка ймовірність того, що вона виявиться:
- 1) білою; 2) не зеленою?
6. У таблиці записано місця, які посідала футбольна команда «Металіст» протягом п'яти останніх чемпіонатів області з футболу. За даними таблиці побудуйте графік.

Рік	2012	2013	2014	2015	2016
Місце	5	3	6	2	4

- 3** 7. У секції плавання тренується 7 спортсменок. Скількома способами між ними можна розподілити етапи естафети 4 по 100 м вільним стилем (тобто кожна із чотирьох плавчинь, що бере участь в естафеті, пливе свій етап: перший, або другий, або третій, або четвертий)?
8. Було перевірено 500 деталей, з яких 2 виявилися бракованими.
- 1) Скільки приблизно бракованих деталей буде в партії з 1500 деталей?
- 2) Скільки приблизно було деталей у партії, якщо серед них виявилось 8 бракованих?
- 4** 9. У шафі лежить 10 зелених, кілька чорних і кілька сірих пар шкарпеток. Скільки чорних і скільки сірих пар шкарпеток у шафі, якщо ймовірність навмання взяти пару чорних шкарпеток дорівнює 0,3, а сірих – 0,2?

Додаткові завдання

- 4** 10. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 3, 7, 9, якщо цифри в числі не повторюються?

11. Відомо, що деяка баскетболістка влучає в кошик зі штрафного кидка з ймовірністю, більшою за 0,7, але меншою за 0,75. Скільки приблизно штрафних кидків виконала вона під час тренування, якщо відбулося 12 влучень у кошик?

Вправи для повторення розділу 4

До § 21

- 1** 1007. У танцювальному клубі займаються 7 юнаків і 9 дівчат. Скількома способами можна вибрати одну танцювальну пару для участі в конкурсі?
- 2** 1008. Скількома способами можна вибрати пару з одного голосного і одного приголосного серед звуків слова «стежка»?
1009. Скількома способами можна викласти в ряд червону, білу, чорну та зелену кульки?
1010. З букв розрізної абетки складено слово «учень». Скільки різних послідовностей букв можна отримати, переставляючи букви цього слова?
- 3** 1011. Скільки різних трицифрових чисел можна скласти, використовуючи цифри 1 і 2, якщо цифри в числі можуть повторюватися?
1012. Скільки різних чотирицифрових чисел, у запису яких використовуються лише непарні цифри, можна скласти, якщо цифри в числі можуть повторюватися?
1013. Скільки різних двоцифрових чисел можна скласти, використовуючи цифри 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі:
1) можуть повторюватися;
2) не можуть повторюватися?
1014. Скількома способами можна вибрати старосту та його заступника в класі, де навчається 28 учнів?
1015. Скількома способами можна пошити двокольоровий прапор зі смужок однакової ширини, якщо є шовк восьми різних кольорів?
1016. З букв слова «сокіл» беруть деякі три і викладають у ряд. Скільки різних послідовностей букв при цьому можна отримати?

- 4 1017.** Скільки різних трицифрових чисел можна скласти, використовуючи цифри 0, 1, 2, 3, 4, якщо цифри в числі не повторюються?
- 1018.** Скільки існує чотирицифрових чисел, усі цифри яких парні й не повторюються?
- 1019.** Скільки є різних варіантів складання шифру із чотирьох цифр, якщо цифри у шифрі: 1) можуть повторюватися; 2) не можуть повторюватися?
- 1020.** Шкільний розклад на день містить 5 уроків. Визначте кількість різних варіантів розкладів на один день, якщо в класі вивчають 9 предметів і предмети в один день не можуть повторюватися.
- 1021.** Під час зустрічі 8 чоловіків обмінялися рукоштовками. Скільки рукоштовок було здійснено?

До § 22

- 1 1022.** Які з даних подій випадкові, вірогідні, неможливі:
- 1) програти партію в шахи рівному по силі супернику;
 - 2) при підкиданні грального кубика випаде число 11;
 - 3) випаде два аверси при підкиданні двох монет одночасно;
 - 4) дата народження людини, яку зустріли, 1 вересня;
 - 5) дата народження людини, яку зустріли, 31 вересня;
 - 6) витягнути олівець з коробки, де лежать 6 зелених і 5 червоних олівців;
 - 7) наступним днем після 1 грудня буде 2 грудня;
 - 8) наступним днем після 2 грудня буде 1 грудня?
- 2 1023.** Перемалюйте таблицю в зошит і для кожного досліду вкажіть приклад вірогідної, неможливої, випадкової події.

№ п/п	Дослід	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Підкидання двох гральних кубиків одночасно			
2	Витягування хустинки з коробки, де лежать червоні та зелені хустинки			
3	Складання трицифрового числа із цифр 1, 2, 3			
4	Кількість днів навімання обраного місяця року			

1024. Було виконано чотири серії по 100 підкидань монети в кожній. Результати досліду занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит та обчисліть відносну частоту події A в кожній серії.

Серія	1	2	3	4
Випадання аверса (подія A)	51	50	47	49
Відносна частота події A				

1025. Відомо, що в партії з 10 000 тонометрів 9 є бракованими. Яка ймовірність того, що навмання вибраний із цієї партії тонометр виявиться бракованим?

3 **1026.** Щоб з'ясувати, який зріст у чоловіків деякого міста трапляється частіше, а який – рідше, дослідники розійшлися по різних частинах міста й записували зріст чоловіків, яких зустрічали. Результати цього дослідження було занесено в таблицю.

Зріст, см	до 161	161–170	171–180	181–190	вище 190
Кількість опитаних	15	142	241	79	53

Оцініть (з точністю до сотих), що обраний навмання чоловік цього міста має зріст:

- 1) нижче від 161 см;
- 2) від 171 до 180 см;
- 3) вище від 180 см;
- 4) нижче від 181 см.

1027. (Проектна діяльність.) Виберіть якийсь текст українською мовою, позначте в ньому будь-які шість рядків підряд. Обчисліть відносну частоту в цих рядках букви «о» та букви «ц» та порівняйте їх.

1028. У серії зі 100 пострілів стрілець влучив у ціль 84 рази.

- 1) Скільки приблизно влучень буде в серії зі 150 пострілів?
- 2) Скільки приблизно пострілів зробив стрілець, якщо серед них було 189 влучень?

4 **1029.** Сергій грає в настільний теніс краще, ніж Василь, а тому виграв партію з ймовірністю, більшою за 0,6, але меншою за 0,7. Скільки партій приблизно зіграли хлопці, якщо Сергій виграв 5 партій?

До § 23

- 2** 1030. 1) Чи всі рівноймовірні події мають ймовірність, що дорівнює 0,5?
2) Наведіть приклад двох рівноймовірних подій, ймовірність яких не дорівнює 0,5.
1031. У лотереї з 500 квитків 50 є виграшними. Яка ймовірність виграти в цій лотереї, якщо придбати один квиток?
1032. Гральний кубик підкидають один раз. Знайдіть ймовірність того, що:
- 1) випало число, що є дільником числа 9;
 - 2) випало не більше як 2 очки;
 - 3) випало не менше як 2 очки;
 - 4) випало число, що є квадратом натурального числа.
- 3** 1033. У ящику a синіх і b червоних кульок. З нього виймають одну кульку червоного кольору і відкладають. Після цього з ящика беруть ще одну кульку. Яка ймовірність того, що вона також червона?
1034. Підкидають дві однакові монети. Яка з подій більш ймовірна: A – монети випадуть однаковими сторонами чи B – монети випадуть різними сторонами?
1035. У коробці 25 карток, пронумерованих від 1 до 25. З коробки навмання виймають одну картку. Яка ймовірність того, що на ній написано число:
- 1) 1;
 - 2) 26;
 - 3) парне;
 - 4) непарне;
 - 5) кратне числу 5;
 - 6) просте;
 - 7) одноцифрове;
 - 8) двоцифрове;
 - 9) в запису якого є цифра 2;
 - 10) в запису якого немає цифри 1?
1036. Підкинули два гральних кубики. Яка ймовірність того, що модуль різниці чисел, що випадуть, дорівнюватиме 1?
- 4** 1037. На десяти картках записано цифри від 0 до 9. Спочатку навмання беруть одну картку, а потім, не повертаючи її назад, – іншу. З цих карток утворюють двоцифрове число: на першій картці – десятки цього числа, на другій – одиниці (наприклад, якщо складено число 01 – це означатиме число 1). Знайдіть ймовірність того, що складуть число, яке:
- 1) кратне числу 3;
 - 2) є дільником 99;
 - 3) кратне числу 11.

1038. На п'яти картках записано цифри від 1 до 5. Виймають навмання одну картку, запам'ятовують число, що на ній записано, і картку знов кладуть до інших. Потім ще раз вибирають одну картку. Знайдіть ймовірність того, що:

- 1) обидва рази витягли одну й ту саму картку;
- 2) першого разу витягнули картку з більшим числом, ніж другого разу.

1039. У коробці 3 білі, 5 чорних і кілька зелених кульок. Скільки зелених кульок у коробці, якщо ймовірність того, що вибрана навмання кулька є білою, більша за 0,2, а ймовірність того, що вона зелена, більша за 0,4?

До § 24

1040. У таблиці подано інформацію про місця, які посідала футбольна команда «Волинь» (м. Луцьк) протягом п'яти останніх чемпіонатів України з футболу.

Рік	2012	2013	2014	2015	2016
Місце	12	13	13	9	12

Яке місце в середньому посідала команда «Волинь» протягом останніх п'яти чемпіонатів?

1041. За даними таблиці попередньої задачі побудуйте графік.

1042. (Проектна діяльність.) Дізнайтеся (з газет чи Інтернету) дані про кількість м'ячів, які забивала команда вашого регіону в останніх десяти матчах чемпіонату України з футболу. Побудуйте гістограму та кругову діаграму за цими даними.

1043. (Проектна діяльність.) 1) Дізнайтеся та систематизуйте в частотну таблицю дані про результати останньої контрольної роботи з алгебри, проведеної у вашому класі.

2) Знайдіть частоти та відносні частоти вибірки.

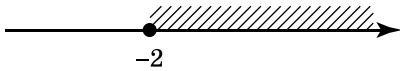
3) *Мода вибірки* – те її значення, яке трапляється у вибірці найчастіше. Знайдіть моду вибірки.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 9 КЛАСУ

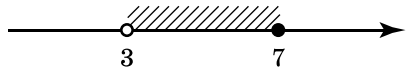
1 1. Порівняйте a і b , якщо:

1) $a - b = 5$; 2) $a - b = -4,1$.

2. Запишіть проміжки, які зображено на малюнках 87 і 88.



Мал. 87



Мал. 88

3. Дано $f(x) = \frac{x + 5}{x - 1}$. Знайдіть: 1) $f(0)$; 2) $f(3)$.

2 4. Розв'яжіть нерівність:

1) $-3x < 12$; 2) $4x - x^2 \geq 0$.

5. Знайдіть дев'ятий член та суму перших десяти членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 9$, $d = -2$.

6. Відомо, що в партії з 2000 деталей 5 є бракованими. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь:

1) бракована; 2) якісна?

3 7. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = -7. \end{cases}$$

8. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 4x - 5$. За графіком знайдіть:

- 1) область значень функції;
2) проміжок зростання функції.

4 9. Доведіть, що $x^2 + y^2 - 2(2x - y) + 5 \geq 0$ для будь-яких значень змінних x і y .



До розділу 1

1044. Доведіть нерівність:

- 1) $(x^3 - y^3)(x - y) \geq 3xy(x - y)^2$;
- 2) $(x^2 - y^2)(x^4 - y^4) \leq (x^3 - y^3)^2$.

1045. Доведіть нерівність:

- 1) $9x^2 + 25 \geq 30|x|$;
- 2) $x^2 - 4x + 5 \geq 2|x - 2|$.

1046. Доведіть, що для невід'ємних значень змінних x і y справджується нерівність:

- 1) $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$;
- 2) $(x + y)^3 \leq 4(x^3 + y^3)$.

1047. Доведіть, що коли $x \geq y$, то:

- 1) $x^3 - y^3 \geq x^2y - yx^2$;
- 2) $x^5 - y^5 \geq x^4y - xy^4$.

1048. Доведіть, що, коли $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, справджується нерівність $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

1049. Доведіть, що:

- 1) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}}}}}}} < 3$;

- 2) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}}}}} < 2$.

1050. Доведіть нерівність $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{120}{121} > \frac{1}{11}$.

1051. Відсоток учнів 9-го класу, які володіють трьома іноземними мовами (англійською, французькою і німецькою), лежить у межах від 2,9 до 3,1 %. Визначте, яка найменша кількість учнів може бути в цьому класі. Скільки учнів цього класу володіють трьома іноземними мовами?

1052. Чи правильно, що:

- 1) коли $a^2b \leq 0$, то $b \leq 0$;
- 2) коли $\frac{a^2}{b} \geq 0$, то $b > 0$;
- 3) коли $a^2b > 0$, то $b > 0$;
- 4) коли $\frac{a^2}{b} < 0$, то $b < 0$?

1053. Між числами $\frac{4}{7}$ і $\frac{5}{7}$ знайдіть число, що дорівнює квадрату раціонального числа. Скільки існує таких чисел?

1054. Який дріб ближче до одиниці: правильний чи обернений йому неправильний?

1055. Розв'яжіть рівняння з трьома змінними:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{y+1}{\sqrt{y}} + \frac{z+1}{\sqrt{z}} = 6.$$

1056. Доведіть нерівність:

$$\left(1 + \frac{x^2}{yz}\right) \left(1 + \frac{y^2}{xz}\right) \left(1 + \frac{z^2}{xy}\right) \geq 8, \text{ де } x > 0, y > 0, z > 0.$$

1057. Відомо, що $x > 0$. Знайдіть найменше значення виразу:

$$1) x + \frac{4}{x}; \quad 2) \frac{x^2 + 15x + 36}{x}.$$

1058. Відомо, що $y > 0$. Знайдіть найбільше значення виразу:

$$1) \frac{y}{9 + y^2}; \quad 2) \frac{y^2}{9y^4 + 4}.$$

1059. Доведіть, що коли $x + y + z = 7$ і $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, то $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} < 5$.

1060. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{2 - \sqrt{5}(x + \sqrt{5})} - 2x.$$

1061. Для всіх значень параметра m розв'яжіть нерівність:

$$1) 3(2m - x) < mx + 1; \\ 2) 5(3m + x) < mx - 7.$$

1062. Чи існує таке значення a , щоб розв'язком системи

$$\begin{cases} x \leq 6, \\ x < a \end{cases} \text{ був проміжок:}$$

$$1) (-\infty; 7); \quad 2) (-\infty; 6); \quad 3) (-\infty; 6]; \quad 4) (-\infty; 5)?$$

До розділу 2

1063. Доведіть, що графік функції $y = (x - a)(x - b) - c^2$ при будь-яких значеннях a, b і c має з віссю x хоча б одну спільну точку.

1064. Побудуйте графік функції:

$$1) y = (x^2 - 5)^2 - (x^2 - 3)^2; \\ 2) y = (x - 1)^2(x - 2) - (x - 2)^2(x - 1).$$

1065. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x^3}{(\sqrt{x})^2} - \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} - 2; \quad 2) y = x^2 - 2x - (\sqrt{2x - 4})^2.$$

1066. Віссю симетрії графіка функції $y = ax^2 - (a + 6)x + 9$ є пряма $x = 2$. Побудуйте графік цієї функції.

1067. При якому значенні a множина значень функції $y = x^2 - 2x + a$ збігається з областю визначення функції $y = \sqrt{2x - a}$?

1068. Побудуйте графік функції:

$$1) y = ||x^2 - 1| - 3|; \quad 2) y = \frac{|x|}{|x| - 2}.$$

1069. Доведіть, що нерівність $\frac{x - a}{x - b} < 0$ рівносильна нерівності $(x - a)(x - b) < 0$, а нерівність $\frac{x - a}{x - b} > 0$ рівносильна нерівності $(x - a)(x - b) > 0$.

1070. Використовуючи результати попередньої задачі, розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x}{x - 2} > 0; \quad 2) \frac{x + 3}{x - 1} < 0;$$
$$3) \frac{2x - 7}{x} > 0; \quad 4) \frac{2x - 7}{5x + 1} < 0.$$

1071. Розв'яжіть нерівність:

$$1) |x^2 + 3x| > 4; \quad 2) |x^2 + 4x| < 5;$$
$$3) |2x^2 + 5x - 4| \leq 3; \quad 4) |2 + 4x - 3x^2| \geq 2.$$

1072. Знайдіть розв'язки нерівності:

$$(x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7 \leq 0.$$

1073. При яких значеннях a областю визначення функції $y = \sqrt{(a + 1)x^2 - 2(a - 1)x + (3a - 3)}$ є множина всіх чисел?

1074. При яких значеннях m квадратний тричлен $mx^2 - 7x + 4m$ набуває від'ємних значень для будь-яких значень x ?

1075. При яких значеннях a нерівність $\frac{x^2 + ax - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$ справджується для всіх значень x ?

1076. При яких значеннях b подвійна нерівність

$$-9 < \frac{3x^2 + bx - 6}{x^2 - x + 1} < 6$$

справджується для будь-якого значення x ?

1077. Скільки розв'язків має система рівнянь залежно від значень a :

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - y = a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x| = 2? \end{cases}$$

1078. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} |x + 1| + |y + 1| = 8, \\ |x + 1| = 2y - 5. \end{cases}$

1079. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y - 9 = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 5y - 1 = 0. \end{cases}$

1080. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} xy = 15, \\ x^2 + x + y^2 + y = 12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy = -12, \\ x^2 - x + y^2 + y = 18. \end{cases}$$

1081. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x + y = 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 - y^3 = 26. \end{cases}$$

1082. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$

1083. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23. \end{cases}$$

1084. Розв'яжіть систему рівнянь:

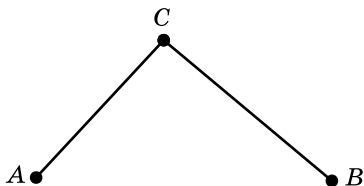
$$1) \begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1, \\ x^2 + y^2 + \frac{4x}{y} = 22; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2} + 2xy = \frac{21}{5}, \\ \frac{1}{2xy} + x^2 + y^2 = \frac{21}{4}. \end{cases}$$

1085. За допомогою заміни $y = tx$ розв'яжіть системи рівнянь, ліві частини яких є однорідними многочленами:

$$1) \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

1086. Дві точки рухаються по колу. Одна з них здійснює повний оберт на 5 с швидше, ніж друга, і тому встигає зробити за 1 хв на два оберти більше. Скільки обертів за хвилину здійснює кожна з точок?

1087. Дорога від пункту A до пункту B спочатку йде вгору, а потім спускається вниз (мал. 89). Туристи піднімаються зі швидкістю на 1 км/год меншою, ніж спускаються. На шлях від A до B вони витрачають 4 год, а на зворотний – 4 год 10 хв. З якою швидкістю туристи піднімаються вгору і з якою – спускаються, якщо довжина дороги від A до B дорівнює 14 км?



Мал. 89

1088. Два потяги, довжина яких 490 м і 210 м, рівномірно рухаються назустріч один одному по паралельних коліях. Машиніст першого з них побачив зустрічний потяг на відстані 700 м, після чого через 28 с потяги зустрілися. Визначте швидкість кожного потяга, якщо перший з них проїжджає повз нерухомого спостерігача на 35 с довше, ніж другий.

1089. З одного місця старту в одному напрямі вирушили одночасно два мотоциклісти: один зі швидкістю 80 км/год, а другий – 60 км/год. Через півгодини з того самого місця і в тому самому напрямку вирушив автомобіль, який наздогнав першого мотоцикліста через 1 год 15 хв після того, як наздогнав другого. Визначте швидкість автомобіля.

1090. Дві автівки вирушили одночасно з двох міст назустріч одна одній і після зустрічі продовжили рух у тому самому напрямку. Швидкість однієї автівки була на 30 км/год більшою за швидкість другої, тому вона прибула в пункт призначення через 2 год після зустрічі. Друга автівка прибула у свій пункт призначення через 4,5 год після зустрічі. Знайдіть швидкість кожної автівки.

- 1091.** Два пішоходи вийшли одночасно назустріч один одному: перший з пункту *A*, другий з пункту *B*. Перший пішохід до зустрічі пройшов на 1 км більше від другого. Через 45 хв після зустрічі перший пішохід прийшов у пункт *B*. Другий пішохід прибув у пункт *A* через 1 год 20 хв після зустрічі. Знайдіть відстань від *A* до *B*.
- 1092.** Андрій, Петро і Сергій, працюючи разом, можуть почистити відерце картоплі за 12 хв; Андрій, Петро і Юрій – за 15 хв, а Сергій і Юрій – за 20 хв. За скільки хвилин почистять картоплю хлопці, працюючи вчетирьох?
- 1093.** Тому Соєру доручили пофарбувати паркан. Якщо він робитиме це самостійно, то закінчить фарбувати на 8 год пізніше, ніж робив би це з другом Геком. Якщо ж фарбуватиме тільки Гек, то виконає роботу на 4,5 год пізніше, ніж це зробили б обидва хлопці разом. За який час пофарбують паркан обидва хлопці, працюючи разом?
- 1094.** Сплавили два сорти чавуну з різним відсотковим вмістом хрому. Якщо одного сорту взяти в 5 разів більше, ніж другого, то відсотковий вміст хрому в сплаві буде вдвічі більший, ніж відсотковий вміст хрому в меншій із частин, що сплавляються. Якщо ж узяти однакову кількість обох сортів, то сплав міститиме 8 % хрому. Визначте відсотковий вміст хрому в кожному із цих двох сортів чавуну.
- 1095.** О 17 год зі свого будинку до стадіону на велосипеді виїхав уболівальник Сергій, який рухався із запланованою швидкістю і розраховував приїхати на футбольний матч о 18 год 30 хв, за півгодини до його початку. О 17 год 20 хв брат Сергія Петро побачив, що Сергій забув квиток, і зателефонував йому на мобільний. Тоді Сергій миттєво розвернув велосипед і, збільшивши швидкість на 3 км/год, поїхав додому, а Петро зі швидкістю 5 км/год вийшов назустріч Сергію. Під час зустрічі Петро віддав Сергію квиток, і той з тією самою швидкістю вирушив на стадіон. У результаті Сергій приїхав на стадіон за 20 хв до початку матчу. Яка відстань від будинку Сергія до стадіону і з якою швидкістю він планував рухатися?

До розділу 3

1096. *Послідовність* називають *зростаючою*, якщо кожний її член, починаючи з другого, більший за попередній. Які з послідовностей є зростаючими:

- 1) $a_n = 5n - 7$; 2) $b_n = 3 - 4n$; 3) $c_n = (-1)^n$;
4) $x_n = \frac{6}{n}$; 5) $y_n = -\frac{8}{n}$; 6) $a_n = n^2 + 7n$;
7) $b_n = n^3$; 8) $c_n = n^2 - 8n$; 9) $x_n = (1 - n)^2$?

1097. *Послідовність* називають *спадною*, якщо кожний її член, починаючи з другого, менший від попереднього. Які з послідовностей є спадними:

- 1) $c_n = \frac{1}{2}n - 8$; 2) $a_n = 4 - 5n$; 3) $b_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}$;
4) $x_n = \frac{10}{n}$; 5) $y_n = -\frac{1}{n}$; 6) $c_n = -n^2 - n$;
7) $g_n = -(n + 1)^3$; 8) $b_n = -2n^2 + 10n$; 9) $x_n = \frac{1}{n^5}$?

1098. Знайдіть суму n перших членів послідовності (x_n) , якщо

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

1099. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія з додатними членами. Доведіть, що сума n перших членів послідовності (x_n) , де $x_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$, дорівнює $\frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}$.

1100. Між числами $-19,88$ і $19,91$ вставлено n таких чисел, що вони разом з даними утворюють арифметичну прогресію. При якому значенні n різниця цієї прогресії належить області визначення функції $y = \sqrt{-x^2 + 7|x| - 12}$?

1101. Доведіть, що коли a , b і c – три послідовних члени арифметичної прогресії, то числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$ і $b^2 + bc + c^2$ в зазначеному порядку також утворюють арифметичну прогресію.

1102. Доведіть, що коли сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію, то її різниця дорівнює радіусу кола, вписаного в цей трикутник.

1103. Нехай дано послідовність концентричних кіл (тобто кіл, що мають спільний центр) із центром у точці $A(-6; 8)$ та-

ких, що їх радіуси R_n утворюють арифметичну прогресію з першим членом 1,6 і різницею 0,4. Чи існує в цій послідовності коло, що проходить через початок координат? Якщо існує, то який його номер?

- 1104.** Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Відомо, що $a_{2m} + a_{2k} = 0$. Доведіть, що $a_{m+k} = 0$.
- 1105.** В арифметичній прогресії $S_m = S_n$, $m \neq n$. Доведіть, що $S_{m+n} = 0$.
- 1106.** Відомо, що при будь-якому значенні n сума n перших членів деякої числової послідовності обчислюється за формулою $S_n = 2n^2 + 3n$. Доведіть, що ця послідовність є арифметичною прогресією, та знайдіть її різницю.
- 1107.** Послідовність чисел 1; 8; 22; 43; ... має ту властивість, що різниці двох сусідніх чисел (наступного й попереднього) утворюють арифметичну прогресію 7; 14; 21; Знайдіть номер члена послідовності, що дорівнює 35 351.
- 1108.** У зростаючій арифметичній прогресії a_1, a_2, a_3, a_4 , що складається із цілих чисел, найбільший член дорівнює сумі квадратів решти членів. Знайдіть цю прогресію.
- 1109.** Доведіть, що коли сторони трикутника утворюють геометричну прогресію, то його висоти також утворюють геометричну прогресію.
- 1110.** Послідовність (b_n) – скінченна геометрична прогресія. Доведіть, що $\frac{S_n - b_n}{S_n - b_1} = \frac{1}{q}$.
- 1111.** a, b, c – послідовні члени геометричної прогресії. Доведіть, що $\frac{a^2 + b^2}{a} = \frac{b^2 + c^2}{c}$.
- 1112.** Дві геометричні прогресії складаються з однакової кількості членів. Перший член і знаменник першої прогресії дорівнюють відповідно 20 і $\frac{3}{4}$, а перший член і знаменник другої відповідно дорівнюють 4 і $\frac{2}{3}$. Якщо перемножити члени цих прогресій з однаковими номерами, то сума всіх добутоків дорівнюватиме $158\frac{3}{4}$. Знайдіть, скільки членів у цих прогресіях.

- 1113.** У зростаючій геометричній прогресії сума першого і останнього членів дорівнює 257, а добуток другого і передостаннього членів дорівнює 256. Знайдіть кількість членів прогресії, якщо їх сума дорівнює 511.
- 1114.** Знайдіть усі прогресії, які є одночасно і арифметичними, і геометричними.
- 1115.** Сума трьох послідовних членів зростаючої арифметичної прогресії дорівнює 15. Якщо від перших двох її членів відняти по 1, а до третього додати 1, то три отриманих числа утворюють геометричну прогресію. Знайдіть три початкових числа.
- 1116.** Сума трьох чисел, що утворюють геометричну прогресію, дорівнює 91. Якщо до цих чисел додати відповідно 25, 27 і 1, то отримаємо три числа, що утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть сьомий член геометричної прогресії.
- 1117.** Три числа утворюють геометричну прогресію. Якщо до другого числа додати 2, то вони утворюють арифметичну прогресію. Якщо ж після цього до третього числа додати 16, то прогресія знову стане геометричною. Знайдіть три початкових числа.
- 1118.** Підприємство два роки поспіль збільшувало обсяг своєї продукції на один і той самий відсоток і за два роки збільшило виробництво вдвічі. Знайдіть відсоток, на який щорічно збільшувався обсяг продукції.

До розділу 4

- 1119.** На полиці стоять підряд 50 книжок, частина – з фізики, частина – з математики. Відомо, що жодна книжка з фізики не стоїть поряд з іншою книжкою з фізики, а кожна книжка з математики обов'язково стоїть поряд з іншою книжкою з математики. Якою може бути найбільша кількість книжок з фізики?
- 1120.** У квадраті 2017×2017 зафарбовано всі клітини по обох діагоналях. Навмання вибирають одну клітину. Яка ймовірність того, що вона не зафарбована?
- 1121.** Телефонний номер Миколи складається із семи різних цифр. Наталя хоче йому зателефонувати, пам'ятаючи, що всі цифри його номера різні, але забула дві останні цифри. Яка ймовірність того, що, набираючи номер телефону навмання, Наталя з першої спроби додзвониться до Миколи?

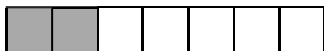
1122. З відрізків довжиною 1; 3; 5; 7 і 9 см вибирають навмання три. З якою ймовірністю з цих трьох відрізків можна побудувати трикутник?
1123. Яка ймовірність того, що в січні вибраного навмання року буде п'ять субот?
1124. У шаховому турнірі брало участь 10 гросмейстерів, двоє з яких – українці. Кожен з гросмейстерів зіграв по одній партії з кожним зі своїх суперників. Любитель шахів Олександр Семенович вирішив переглянути одну з партій турніру, вибравши її навмання. Яка ймовірність того, що в цій партії гратимуть:
- 1) двоє українців;
 - 2) український гросмейстер з іноземним?
1125. Учень навмання вибирає одне з чисел від 1920 до 2019. Яка ймовірність того, що це число можна записати у вигляді $2^a - 2^b$, де a і b – натуральні числа?
1126. Усі грані куба з ребром 1 м пофарбовано. Куб розпилено на 1000 кубиків з ребром 10 см. З цих кубиків один вибирають навмання. Яка ймовірність того, що в нього:
- 1) пофарбовано 3 грані;
 - 2) пофарбовано 2 грані;
 - 3) пофарбовано 1 грань;
 - 4) жодну з граней не пофарбовано?

ЗРАЗОК ВАРІАНТА АТЕСТАЦІЙНОЇ ПИСЬМОВОЇ РОБОТИ З МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА ПЕРША

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповіді, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Яку частину смужки зафарбовано?



- А) $\frac{2}{5}$; Б) $\frac{5}{7}$; В) $\frac{1}{7}$; Г) $\frac{2}{7}$.

2. Скільки кілограмів сушених яблук можна отримати з 9 кг свіжих, якщо з 30 кг свіжих яблук виходить 3 кг сушених?

- А) 0,8 кг; Б) 0,09 кг; В) 1,8 кг; Г) 0,9 кг.

3. Укажіть рівняння, коренем якого є число 6.

- А) $0x = 6$; Б) $5x = 30$; В) $-5x = 30$; Г) $5x = -30$.

4. Спростіть вираз $(m - 3t)(m + 3t) - m^2$.

- А) $-9t^2$; Б) $-3t^2$; В) $2m^2 - 9t^2$; Г) $-2m^2 - 9t^2$.

5. Виконайте дію $3\sqrt{2} + \sqrt{2}$.

- А) $3\sqrt{4}$; Б) $3\sqrt{2}$; В) $4\sqrt{2}$; Г) $2\sqrt{2}$.

6. Обчисліть $\left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-7}$.

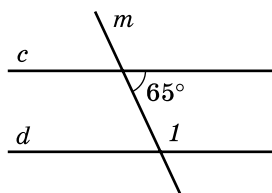
- А) 16; Б) 4; В) $\frac{1}{16}$; Г) -16.

7. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія, $b_3 = 14$, $q = -2$. Знайдіть b_2 .

- А) 7; Б) -7; В) 12; Г) 16.

8. Укажіть множину розв'язків нерівності $x^2 - 25 \leq 0$.

- А) $(-5; 5)$; Б) $[-5; 5]$;
В) $(-\infty; 5]$; Г) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$.

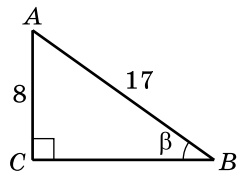


9. Прямі c і d паралельні, m – січна. Укажіть градусну міру кута 1.

- А) 65° ; Б) 105° ;
В) 115° ; Г) 125° .

10. За даним малюнком знайдіть $\cos \beta$.

- А) $\frac{15}{17}$; Б) $\frac{8}{17}$; В) $\frac{8}{15}$; Г) $\frac{17}{15}$.



11. Укажіть координати середини відрізка, кінцями якого є точки $K(-2; 1)$ і $L(6; -13)$.

- А) $(-2; 6)$; Б) $(-2; -6)$; В) $(4; -12)$; Г) $(2; -6)$.

12. У квадрат, площа якого 16 см^2 , вписано коло. Знайдіть довжину цього кола.

- А) $2\pi \text{ см}$; Б) $8\pi \text{ см}$; В) $4\pi \text{ см}$; Г) $16\pi \text{ см}$.

ЧАСТИНА ДРУГА

Розв'яжіть завдання 13–16. Запишіть відповідь до кожного з них.

13. Спростіть вираз $\left(\frac{a + 7b}{a^2 - 7ab} - \frac{a - 7b}{a^2 + 7ab} \right) : \frac{28b^2}{49b^2 - a^2}$.

14. Знайдіть найменше ціле значення x , при якому різниця дробів $\frac{29 - 3x}{2}$ і $\frac{x + 7}{3}$ буде від'ємною.

15. Знайдіть область значень функції $y = 2x^2 + 4x - 1$.

16. При яких значеннях b вектори $\vec{m}(-12; b)$ і $\vec{n}(3b; -9)$ колінеарні?

ЧАСТИНА ТРЕТЯ

Розв'язання завдань 17–19 повинні мати обґрунтування. У них потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструвати розв'язання схемами, графіками, таблицями.

17. Потяг у дорозі було затримано на 30 хв. Щоб компенсувати затримку, машиніст потяга на перегоні завдовжки 225 км збільшив швидкість на 5 км/год порівняно із запланованою. З якою запланованою швидкістю мав рухатися потяг?

18. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 2y - xy + x = 2, \\ y + xy - 3x = 0. \end{cases}$$

19. Куты паралелограма відносяться як 9 : 11. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Розділ 1

16. 1) $\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$; 2) $\sqrt{7} - \sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.

17. 1) $\sqrt{3} - 1 > \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$; 2) $4 + \sqrt{15} = \frac{1}{4 - \sqrt{15}}$. 18. 1) Вказівка.

$a^2 + 10a + 26 = (a + 5)^2 + 1$. 23. 2) Вказівка. $a^2 + b^2 - (4(a + b) - 8) = (a - 2)^2 + (b - 2)^2$; 3) $m^2 + n^2 + 1 - (m + n + mn) = \frac{(m^2 - 2mn + n^2) + (m^2 - 2m + 1) + (n^2 - 2n + 1)}{2}$. 24. 3) Вказівка.

Докажіть, що $(a + 1)^3 - 4(a^3 + 1) = -3(a + 1)(a - 1)^2$. 26. 2) Вказівка. $\frac{3m}{5n} + \frac{5n}{12m} - (-1) = \frac{(6m + 5n)^2}{60mn}$. 28. $m^3 + n^3 > mn(m + n)$.

29. Добуток першого і четвертого виразів менший від добутку другого і третього. 32. 8 днів. 33. 1,5. 34. 2505 грн. 38. $65\frac{5}{11}$ км/год.

55. 1) $a > 0$; 2) $a < 0$; 3) $a > 0$; 4) $a > 0$. 56. 1) $x < 0$; 2) $x > 0$; 3) $x > 0$; 4) $x < 0$. 57. 1) Так; 2) ні. 58. 1) $x + 2 > y$; 2) $y - 3 < x$; 3) $-x + 1 < -y + 1$; 4) $-x < -y + 8$; 5) $-(x + 1) < -y$; 6) порівняти неможливо. 59. 1) $a - 2 < b$; 2) $b + 3 > a$; 3) $-a + 2 > -b + 2$; 4) $-b - 7 < -a$; 5) $-a > -(b + 3)$; 6) порівняти неможливо.

60. 1) $3,1 < 2x + 0,7 < 3,7$; 2) $3,5 < 5 - x < 3,8$; 3) $-0,6 < \frac{x}{3} - 1 < -0,5$; 4) $-13 < 2 - 10x < -10$. 61. 1) $2,2 < 3a - 0,2 < 3,4$; 2) $2,8 < 4 - a < 3,2$;

3) $3,4 < \frac{a}{2} + 3 < 3,6$; 4) $4 < 10 - 5a < 6$. 62. 1) $4 < \frac{20}{a} < 10$;

2) $0,1 < \frac{1}{3a + 4} < 1$. 63. 1) $10 < \frac{100}{x} < 20$; 2) $0,2 < \frac{1}{2x - 3} < 1$.

64. $4,2 < a < 5$. 65. $48 < p < 51$. 66. 1) $x > y$; 2) $x < y$. 67. 1) $a < b$;

2) $a > b$. 68. $3 < \frac{12}{7 - 3a} < 12$. 69. $3 < \frac{27}{13 - 2b} < 9$. 70. $\frac{6}{x} > 3$ або $\frac{6}{x} < -3$.

72. 1) -3 ; 2) -4 . 74. 12,25. 75. Модель В ($R = 32,5$), модель А ($R = 28$).

76. Говерла, Дніпро. 92. Ні. 95. 1) $2,5 < \frac{a}{b} < 10$; 2) $\frac{2}{15} < \frac{4b}{3a} < \frac{8}{15}$.

96. 1) $\frac{2}{5} < \frac{x}{y} < 4$; 2) $\frac{5}{8} < \frac{5y}{2x} < \frac{25}{4}$. 97. $10,8 < P < 12,4$. 98. $28 < P < 34$.

99. $63^\circ < \angle A < 70^\circ$. 102. Вказівка. Використайте нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним та почленне множення нерівностей. 103. Див. вказівку до попереднього

- номера. **104.** Вказівка. Використайте $x + \frac{1}{x} \geq 2$, коли $x > 0$.
- 106.** 100 г 6-відсоткового і 200 г 3-відсоткового. **107.** $4\frac{2}{3}$.
- 109.** 1) 96,5 км/год; 2) 0,63 км/год. **114.** 1. **124.** -1; -2. **125.** 1; 2; 3; 4. **126.** 1) Будь-яке число, крім 0; 2) будь-яке число, крім 0; 3) будь-яке число; 4) $x = 0$; 5) будь-яке число, крім 1; 6) будь-яке число; 7) немає розв'язків; 8) $x = 1$; 9) немає розв'язків.
- 127.** 1) Будь-яке число; 2) будь-яке число, крім -2; 3) немає розв'язків; 4) $x = -2$; 5) немає розв'язків; 6) будь-яке число.
- 128.** 1) Будь-яке число, крім -2; 2) немає розв'язків; 3) будь-яке число, крім 0; 4) будь-яке число, крім 0 і -1; 5) будь-яке число, більше за 0; 6) 1 і будь-яке число, менше від 0. **129.** 1) Будь-яке число, крім 3; 2) немає розв'язків; 3) будь-яке число, крім 0; 4) будь-яке число, крім 0 і 1; 5) будь-яке додатне число, крім 3; 6) будь-яке від'ємне число. **133.** ≈ 122 см. **140.** На $16\frac{2}{3}\%$. **164.** 1) $A \cup B$; 2) $A \cap C$; 3) $B \cap C$. **165.** 1) $A \cup C$; 2) $A \cap C$; 3) $B \cap C$. **168.** 60 км/год. **169.** 6 або -6. **173.** 1) На 5-й хв; 2) за 5 хв; 3) за 2 хв; 4) на 30°C . **174.** -4; 2. **199.** 1) $a > 0$; 2) $a < 0$. **200.** 1) $b > 0$; 2) $b < 0$. **202.** 1) 1; 2; 3; 2) 1; 2; 3; 4; 5. **203.** 1) 1; 2; 2) 1; 2; 3. **204.** 1) 9; 2) 0. **205.** 1) 5; 2) 0. **206.** 1), 3) $(-\infty; +\infty)$; 2), 4) немає розв'язків. **207.** 1), 3) Немає розв'язків; 2), 4) $(-\infty; +\infty)$. **208.** Меншою від 12 см. **209.** 1) $a > -7$; 2) $a > -2$. **210.** 1) $a = 0$; 2) $a = 3$. **211.** 1) $b < -4,5$; 2) $-4 < b < 0$ або $b > 0$. **212.** 1) $a > -4$; 2) $a > 9$. **213.** 1) Якщо $a < 0$, то $x < \frac{3}{a}$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$, то $x > \frac{3}{a}$; 2) якщо $a < 0$, то $x \leq 0$; якщо $a = 0$, то x - будь-яке число; якщо $a > 0$, то $x \geq 0$; 3) якщо $a < 0$, то $x > 0$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$, то $x < 0$; 4) якщо $a < 0$, то $x < -\frac{5}{a}$; якщо $a = 0$, то x - будь-яке число; якщо $a > 0$, то $x > -\frac{5}{a}$. **214.** 48. **215.** 51. **218.** 2 км/год. **221.** 950,4 грн. **224.** Останнє, у неї 30 % перемог. **241.** 1) 6; 7; 2) 1; 2. **242.** 1) -5; -4; -3; -2; -1; 2) 7; 8. **243.** 1) 1; 2) -2. **244.** 1) 1; 2) -1. **249.** 1), 3) Немає розв'язків; 2) $x < 2,8$; 4) x - будь-яке число. **250.** 1) Немає розв'язків; 2) $x < 10$. **251.** 1) $[3; 5) \cup (5; 7)$; 2) $(5; 10)$. **252.** 1) $[2; 4) \cup (4; 6)$; 2) $(3; 8)$. **253.** Від 1 см до 6 см. **254.** $-1 < a < 0$. **255.** $a > 3$. **259.** 1) $15 < 2x - y < 38$; 2) $2 < \frac{x}{y} < 10$. **260.** $m < -\frac{1}{2}$. **261.** За 60 хв. **262.** Немає коренів. **265.** 2), 3). **267.** 1) $m > 0$; 2) $m < 0$; 3) $m < 0$; 4) $m > 0$. **269.** 1) $a^3 - b^3 \geq ab(b - a)$; 2) $m^2 + n^2 \geq \frac{1}{2}$.

270. Перший. 271. Площа квадрата більша. 276. 1) $8x > 5y$; 2) $3x > y$; 3) $-3x < -y$; 4) $-5x < -2y$. 278. 1) $2a - 10 > 0$; 2) $35 - 7a < 0$. 279. 1) $1 < |x| < 3$; 2) $0 \leq |x| < 7$. 283. 1), 3) Так; 2), 4) ні. 284. $81 < S < 100$. 285. 1) $3m + 2n > 12$; 2) $b - 3a < 0$; 3) порівняти неможливо; 4) $p - 4q < 9$. 286. 1) $5 < a^2 + 2a + 5 < 8$; 2) $-4 < x^2 - 4x < -3$; 3) $\frac{3}{20} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{3}{10}$; 4) $-6 < \frac{1}{mn} - 7 < -3\frac{2}{3}$. 287. $x > y$. 288. $20 < S < 60$. 293. 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. 294. -1 і -2 . 298. Найменше число 1,6, найбільшого не існує. 307. 30. 308. 1) $[11; +\infty)$; 2) $[5; 7) \cup (7; +\infty)$. 309. Більшою за 9 см. 310. 1) $a > 1$; 2) $a < 0$ або $0 < a < \frac{1}{4}$. 311. 1) Якщо $a < -3$, то $x \leq \frac{a-5}{a+3}$; якщо $a = -3$, то x - будь-яке число; якщо $a > -3$, то $x \geq \frac{a-5}{a+3}$; 2) якщо $a < 3$, то $x > -3$; якщо $a = 3$, то розв'язків немає; якщо $a > 3$, то $x < -3$; 3) якщо $a < -1$, то $x < a - 1$; якщо $a = -1$, то розв'язків немає; якщо $a > -1$, то $x > a - 1$; 4) якщо $a < -2$ або $a > 2$, то $x \leq \frac{1}{a+2}$; якщо $a = -2$, то розв'язків немає; якщо $-2 < a < 2$, то $x \geq \frac{1}{a+2}$; якщо $a = 2$, то x - будь-яке число. 312. 7, 8, 9 або 10. 317. 1) 1; 2; 3; 2) натуральних розв'язків немає. 319. 2) $[8; 9]$. 320. 19. 322. 1) $a > 5$; 2) $a \geq 2$. 323. 1) Якщо $a \leq 2$, то розв'язків немає; якщо $a > 2$, то $2 < x < a$; 2) якщо $a \leq 6$, то $x > 6$; якщо $a > 6$, то $x > a$. 324. $a < -0,5$ або $a > 1,5$. 325. $0 \leq a \leq 8$. 326. 56.

Фіскальна математика

1. На 3 059 025 тис. грн. 2. На 915 грн. 3. 670 грн. 4. 8 грн. 5. 216 грн; 2592 грн. 6. 5600 грн; 5174,4 грн.

Розділ 2

344. 7) x - будь-яке число; 8) $(-\infty; -1) \cup (-1; 5) \cup (5; +\infty)$; 9) $[2; +\infty)$; 10) $(-2, 5; +\infty)$. 345. 7) x - будь-яке число; 8) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty)$; 9) $[-3; +\infty)$; 10) $(3, 5; +\infty)$. 347. $k = -3$, $b = 5$. 348. $k = 3$, $b = -7$. 349. 1) $[-5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3]$; 3) $[2; +\infty)$; 4) $[-3; +\infty)$; 5) $[5; +\infty)$; 6) $(-\infty; 9]$. 355. $c = 3$, $x_2 = 1$. 356. $-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. 357. Один. 358. 4186 грн. 362. 50. 374. 1) $(0; 3)$, $(-3; 0)$; 2) $(0; \sqrt{2})$, $(-2; 0)$; 3) $(0; -1)$, $(1; 0)$; 4) $(2; 0)$. 375. 1) $(0; -5)$, $(5; 0)$; 2) $(0; 3)$, $(-9; 0)$; 3) $(0; 1)$, $(-2; 0)$; 4) $(-3; 0)$. 378. 1) 3; 2) 2. 379. 1) 2; 2) 2. 383. 1) $x > 1$; 2) $-10 \leq x < -4$. 384. 70 км/год і 80 км/год. 385. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $c = 6$. 386. 14 хв. 388. Перший дріб менший. 403. 1) $x = -3$, $x = 1$; 2) $[-4; +\infty)$;

3) $-3 < x < 1$; 4) $[-1; +\infty)$. **404.** 1) $x = 1, x = 3$; 2) $[-1; +\infty)$; 3) $x < 1$ або $x > 3$; 4) $(-\infty; 2]$. **405.** 1) $x = 5$; 2) $x = -3, x = 0$. **406.** 1) $x = 3$; 2) $x = 0, x = 5$.

407. Вказівка. $\frac{x+4}{x-2} = \frac{x-2+6}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{6}{x-2} = \frac{6}{x-2} + 1$.

408. Вказівка. $\frac{x+5}{x+1} = \frac{x+1+4}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{4}{x+1} + 1$.

409. 2) $a = 4$. **411.** $-2 \leq x < 5$. **412.** 10. **413.** 2 с. **418.** 1) 4; 2) 7.

438. $y = \frac{1}{12} x^2$. **441.** $a = -10$. **442.** $b = 2$. **443.** 1) $b = 2$; 2) $b = -10$.

444. $a = -3$. **445.** 1) (2; 2) і (5; 5); 2) (4; -4) і (2; -2). **446.** 1) (0; 0) і (6; 6); 2) (2; -2) і (-5; 5). **448.** (2,5; 8) і (2; 7). **449.** (1; -5) і (0,2; -4,2).

450. $\approx 10,6$ с. **451.** 1) 125 м; 2) піднімалася в перші 5 с, спускалася в наступні 5 с; 3) через 10 с. **452.** 1) 11,25 м; 2) піднімався в перші 1,5 с, спускався в наступні 1,5 с; 3) через 3 с. **453.** $b = -10, c = 32$.

454. $a = 2, c = 5$. **455.** $a = 1, b = -6, c = 7$. **456.** $c = 7$. **457.** $c = 8$.

458. $c > 16$. **459.** $c < -1$. **466.** 1. **467.** 1) -3; 3; 2) -2; 2; 3.

468. 7376 осіб. **471.** На 11. **487.** 1) $(-\infty; -1 - 2\sqrt{2}) \cup (-1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$;

2) $\left[\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right]$. **488.** 1) $(2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7})$; 2) $\left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \right] \cup$

$\cup \left[\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; +\infty \right)$. **491.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) \emptyset ; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{3} \right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty \right)$;

4) {4}; 5) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; 6) {5}; 7) $(-\infty; +\infty)$; 8) \emptyset . **492.** 1) немає розв'язків; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) {3}; 4) $(-\infty; 0,6) \cup (0,6; +\infty)$; 5) {1}; 6) $(-\infty; +\infty)$; 7) \emptyset ; 8) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$. **493.** 1) 1; 2) 1; 2; 3; 4.

494. 1) 1; 2; 3; 2) -3; -2; -1; 0. **495.** 1), 3) $(-\infty; +\infty)$; 2), 4) немає розв'язків. **496.** 1), 3) $(-\infty; +\infty)$; 2), 4) немає розв'язків. **498.** 1) -3;

2) -2. **499.** 1) 1; 2) 0. **500.** 1) $\left[\frac{1}{2}; 2 \right]$; 2) $(-\infty; -2,5) \cup (0,5; +\infty)$;

3) $\left(-1; -\frac{1}{3} \right)$; 4) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **501.** 1) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right]$; 2) $(-\infty; -1) \cup$

$\cup (-1; +\infty)$. **502.** 1) $[-1; 2) \cup (2; 3]$; 2) $(-\infty; -2] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$.

503. 1) (0; 1); 2) (3; $+\infty$). **504.** 1) $(-\infty; -4,5]$; 2) [8; 12). **505.** 1) 0; 1;

5; 6; 2) -3; 1; 2. **506.** 1) 0; 1; 3; 4; 5; 2) 1; 2; 3. **507.** 1) [3; 4) \cup (4; 5];

2) $(-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$. **508.** [3; 4). **509.** (4; 5]. **510.** 1) $-2 < a < 6$;

2) $0 < a < \frac{12}{13}$. **511.** 1) $a < 2$ або $a > 6$; 2) $a < 0$ або $0 < a < 0,4$, або

$a > 2$. **512.** 1) $-7 < a < 5$; 2) $a < 0$ або $0 < a < \frac{1}{4}$. **513.** 1) $0 < m < 28$;

2) $m < -4$. **516.** $a = 2; x_2 = 1; x_3 = 2$. **517.** 9 упаковок. **522.** Так.

533. 1) (2; 1), (2; -1); 2) немає розв'язків. **534.** 1) (3; 1), (-3; 1);

2) немає розв'язків. **535.** 1) $(-4; 0), (-1; -3); 2) (0; 2)$. **536.** 1) $(-6; 0), (-1; -5); 2) (0; 3)$. **537.** 1) Один розв'язок; 2) чотири розв'язки. **538.** 1) $(3; 2), (-42; 11); 2) (5; 0), (3; 4); 3) (-2; 4), (2; 2); 4) (4; 3), \left(\frac{3}{7}; -\frac{4}{7}\right)$. **539.** 1) $(-1; -1), (5; 2); 2) (3; 2), (-1,2; 3,4); 3) (3; -1), (-3; 2); 4) (2; 3), (15; -10)$. **540.** 1) $(3; 2), (-4; 9); 2) (3; 5), (5; 3), (-3; -5), (-5; -3)$. **541.** 1) $\left(3,5; \frac{3}{7}\right); 2) (2; 5), (2; -5), (-2; 5), (-2; -5); 3) (1; 4), (-1; -4); 4) (1; 5), (-1; -5)$. **542.** 1) $\left(5; \frac{1}{2}\right); 2) (1; 2), (1; -2), (-1; 2), (-1; -2); 3) (2; 1), (-2; -1); 4) (-3; 1), (3; -1)$. **543.** 1) $(2; 3), (-2,5; -1,5); 2) (4; -1), (2; -3)$. **544.** 1) $(2; 1), \left(-1\frac{1}{3}; -2\frac{1}{3}\right); 2) (-1; -8), \left(-4\frac{1}{3}; 2\right)$. **545.** 1) $(2; 1), (1; 2); 2) (3; 2), (-2; -3); 3) (1; 0), (-1,5; 2,5); 4) (2; -1), \left(\frac{21}{53}; \frac{15}{53}\right)$. **546.** 1) $(3; 2), (-10; 15); 2) (-1,5; 0,5), (0,5; 2,5)$. **547.** 1) $a = 2; 2) a = -2$. **548.** $[-11,5; -9]$. **549.** 2 км/год. **551.** 5000. **552.** 1) Зошит – 9 грн, олівець – 6 грн; 2) 18 км/год; 2 км/год. **555.** –7 і 4. **556.** 4 і –3. **557.** –2 і –5. **558.** 6 і 4. **559.** 20 м і 30 м. **560.** 8 см і 10 см. **561.** 5 см і 12 см. **562.** 6 см і 8 см. **563.** 5 і 10 або 30 і –15. **564.** 6 і 3 або 1 і –2. **565.** 24. **566.** 48. **567.** 8 с./хв і 10 с./хв. **568.** Яна – 6 задач, Оля – 5 задач. **569.** 5 м і 8 м або 19,5 м і 22,5 м. **570.** 21 ряд. **571.** 60 км/год і 80 км/год. **572.** 12 км/год і 18 км/год. **573.** 3 км/год і 12 км/год. **574.** 28 см. **575.** 30 см². **576.** 6 год і 3 год. **577.** Батько за 10 днів, син – за 15 днів. **578.** 4 км/год і 5 км/год. **579.** 12 км/год і 18 км/год. **580.** 20 км/год і 2 км/год. Вказівка. Для розв'язування отриманої системи використати метод заміни змінної. **581.** 18 км/год і 12 км/год. Вказівка. Нехай швидкість велосипедиста, що їхав з А до В, – x км/год, а другого – y км/год. За умовою задачі ма-

тимемо систему рівнянь
$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{9}{10}y = 18, \\ \frac{18}{y} - \frac{18}{x} = \frac{9}{10} - \frac{2}{5}. \end{cases}$$
 584. $[-3; 2) \cup (2; 3]$.

585. 8. **586.** Наталка живе у третьому під'їзді на 5 поверсі, Сергій – у п'ятому під'їзді на 7 поверсі. **587.** 2017¹⁰. **594.** 1), 3), 4) Так; 2) ні. **595.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty); 2) (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right); 3) (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty); 4) (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty); 5) (-\infty; 0) \cup (0; +\infty); 6) (2; 5) \cup (5; +\infty); 7) x = 0; 8) x = -1; 9) x = 0$.

- 596.** 1) 0; 2) 0; 3) $[0; 2]$; 4) $(0; 1]$; 5) $[-2; +\infty)$; 6) $\left(0; \frac{1}{4}\right]$. **600.** 1) Не існують; 2) 1; 3) 10. **601.** 1) $(-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2)$. **607.** 1) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$; 2) $x = 0$; 3) немає таких проміжків; 4) $(-\infty; -3)$ і $(-3; +\infty)$; 5) $-3 < x < 0$; 6) $x < -3$ або $x > 0$. **608.** $a = 2$. **615.** $c = 9$. **616.** $a = -2$. **617.** 1) $[0; 8]$; 2) $[-27; 0]$. **618.** $(-1; 4)$, $(5; 10)$. **619.** $p = -5$; $q = 8$. **621.** $x = 4$. **622.** 1) $-0,5$; 2) -1 . **623.** 1) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D = 0$; 2) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D > 0$; 3) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $D < 0$; 4) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$, $D > 0$. **625.** $a > \frac{8}{7}$. **631.** 1) $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$; 2) $[3; 6]$; 3) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. **632.** Менша від 5 см. **633.** $0 < x \leq 7$. **634.** $-1,5 \leq x \leq -\frac{4}{3}$. **635.** 1) $c = 16$; 2) $c = 9$. **636.** 1) $[-2; -1) \cup (1; 2]$; 2) $[-3; -1) \cup (0; 2]$. **637.** $a = -2$. **638.** $m < -\frac{1}{7}$ або $m > 1$. **639.** Якщо $a \leq -6$ або $a \geq -1$, то $x_{1,2} = a - 1 \pm \sqrt{a^2 + 7a + 6}$; якщо $-6 < a < -1$, то розв'язків немає. **640.** 1) Якщо $a < 2$, то $-2 < x < -a$; якщо $a = 2$, то розв'язків немає; якщо $a > 2$, то $-a < x < -2$; 2) якщо $a < -1$, то $x \leq 2a$ або $x \geq -a - 3$; якщо $a = -1$, то x — будь-яке число; якщо $a > -1$, то $x \leq -a - 3$ або $x \geq 2a$. **641.** 1) Якщо $m \leq -2$, то $x < m$; якщо $-2 < m \leq 3$, то $x \leq -2$; якщо $m > 3$, то $x \leq -2$ або $3 \leq x < m$; 2) якщо $m \leq -4$, то $-4 < x < 2$; якщо $-4 < m < 2$, то $m \leq x < 2$; якщо $m \geq 2$, то система не має розв'язків. **645.** 1) $(2; 5)$; 2) система не має розв'язків. **646.** 1) $(6; 2)$, $(2; 6)$; 2) $(3; -4)$, $(-3; 4)$, $(-4; 3)$, $(4; -3)$. **647.** 1) $(3; 2)$, $(-3; 2)$, $(-3; -2)$, $(3; -2)$; 2) $(3; -2)$, $(-3; -2)$; 3) $(2; -1)$, $(-2; 1)$; 4) $(6; 10)$. **648.** 1) $(4; 1)$; 2) $(-1; 0)$, $(0; -1)$, $(1; 0)$. **649.** 1) $(-1; -2)$, $(-2,5; -1)$; 2) $(3; 1)$, $(-3; -1)$. **650.** 1) $(6; 2)$, $\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$; 2) $(2; 1)$, $\left(\frac{126}{11}; -\frac{54}{11}\right)$. **651.** 5 і 2 або -2 і -5 . **652.** 5 і 7. **653.** 4 см і 8 см. **654.** 4 і 5 або 15 і $\frac{4}{3}$. **655.** 12 см і 9 см. **656.** 4 см і 5 см. **657.** 35. **658.** 28 см або 26 см. **659.** 90 км/год і 80 км/год. **660.** 8. **661.** 7. **662.** 25 або 85. **663.** 100×80 м. **664.** 20 год і 30 год. **665.** 20 деталей.

Розділ 3

- 676.** 1) $y_9 = 7$; 2) $y_3 = y_6 = -29$; 3) не є членом послідовності; 4) $y_{12} = 79$. **677.** 1) $x_{10} = 69$; 2) не є членом послідовності; 3) $x_2 = 5$; 4) $x_1 = x_3 = 6$. **678.** 1) $c_1 = 8$, $c_2 = 3$, $c_3 = -2$, $c_4 = -7$, $c_5 = -12$; 2) $c_1 = -3$, $c_2 = -3$, $c_3 = -3$, $c_4 = -3$, $c_5 = -3$; 3) $c_1 = -2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, $c_4 = 4$, $c_5 = 5$; 4) $c_1 = 0$, $c_2 = -5$, $c_3 = -5$, $c_4 = 1,25$, $c_5 = -0,3125$. **679.** 1) $y_1 = 5$,

$y_2 = 3, y_3 = -1, y_4 = -9, y_5 = -25$; 2) $y_1 = 16, y_2 = 1, y_3 = 8, y_4 = \frac{1}{16};$
 $y_5 = 64$. **680.** 1) $a_1 = 25$; 2) $b_4 = 32$; 3) $c_{2k} = 1$, де k – натуральне число; 4) $y_2 = y_3 = 6$. **681.** 1) $x_1 = -1$; 2) $a_4 = -21$. **684.** -7 . **685.** $(0; 2), (0; -2), (-3; -1), (3; 1)$. **686.** Через 5 місяців. **689.** $(1; 2; 3); (-1; -2; -3)$. **705.** 1) 5; 2) $4\frac{1}{3}; 5\frac{2}{3}$; 3) 4; 5; 6. **706.** 18; 21; 24; 27.

707. 1) $a_n = -x + 3xn$; 2) $a_n = \frac{m-2}{m} + \frac{1}{m}n$. **708.** 1) $a_1 = 39, d = -2$;
 2) $a_1 = 5, d = 2$. **709.** 1) $c_1 = -45, d = 3$; 2) $c_1 = -1, d = -3$. **710.** 1) Так;
 2) ні. **711.** 1) Ні; 2) так. **712.** 32. **713.** 27. **714.** 1) $d = 5$; 2) 69.
715. $x = 1$ або $x = 6$. **716.** $y_1 = -1$ або $y = 4$. **717.** $m = 1$. **718.** 1) -37 ;
 2) 2,5. **719.** 1) -25 ; 2) 5,4. **723.** 1) $-1; -\sqrt{3}; \sqrt{3}$; 2) $1 \pm \sqrt{2}$. **724.** Так.
725. $[-10; 0) \cup (0; 1]$. **726.** 96 000 грн. **740.** 1) 42 653; 2) 12 425;
 3) 12 402; 4) 1635. **741.** 1) 12 810; 2) 123 525. **742.** 1) -44 ; 2) 98.
743. 1) -275 ; 2) 192,5. **744.** 4. **745.** 4. **746.** 100. **747.** -100 . **748.** 15.
749. $-197,4$. **750.** 484. **751.** 1) 15; 2) -3 або 6. **752.** 1) 12; 2) -37 .
753. 610. **754.** 6 год. **757.** $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$. **759.** 10 Ом. **762.** 6 або $-\frac{6}{19}$.

778. $x_1 = 12, q = 4$. **779.** 1) $q = 2$ або $q = -2$; 2) $q = 3$; 3) $q = \frac{3}{4}$ або
 $q = -\frac{3}{4}$; 4) $q_1 = -1$. **780.** 1) $q = 3$ або $q = -3$; 2) $q = \frac{1}{3}$. **781.** 2,5; -5 ; 10;
 -20 ; 40. **782.** $-\frac{5}{4}$; 5; -20 ; 80; -320 ; 1280. **783.** $x_5 = \frac{1}{32}$. **784.** $b_1 = \frac{1}{1000}$
 або $b_1 = -\frac{1}{1000}$. **785.** 1) $c_1 = 1000$; 2) $c_6 = 64$ або $c_6 = -64$. **786.** 10 клі-
 тин; 40 клітин; 320 клітин. **787.** 1) 1; 8; 64 або 1; -8 ; 64; 2) 1; 4; 16;
 64. **788.** $x_2 = 1, x_3 = 2, x_5 = 8$. **789.** 4; 2; 1, якщо $x = 1$, і -9 ; -24 ; -64 ,
 якщо $x = -12$. **790.** -1 ; 1; -1 , якщо $y = -1$. **793.** 8 см². **795.** 1) $a_1 = 3,$
 $d = 2$; 2) $a_1 = 5, d = -1$. **797.** $-10,008$. **799.** На 85 см. **800.** $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$.
801. 1) 13 676,31 грн; 16 850,58 грн; 2) 3676,31 грн; 6850,58 грн.
802. 1) 25 088 грн; 31 470,39 грн; 2) 5088 грн; 11 470,39 грн.
803. $8000(1,09^n - 1)$; 1504,8 грн; 2360,23 грн. **804.** 7972 грн.
805. 5800 грн. **806.** 8000 грн. **807.** 1) 1825,35 грн; 2) 1665,94 грн.
808. 1) 47 550 осіб; 2) 45 219 осіб. **809.** 20 %. **819.** 211. **820.** 67,1 см.
821. 1) 189; 2) $-409,5$. **822.** 1) 682; 2) 183. **823.** 1) $1\frac{127}{128}$; 2) 605;
 3) -10 ; 4) 635. **824.** 1) $1\frac{364}{729}$; 2) 2295; 3) -104 ; 4) 364. **825.** 1) 5;
 2) 27. **826.** 1) 3; 2) 81. **827.** 1) $\frac{1}{x^2 - 1}$; 2) $-\frac{1}{x + 1}$. **828.** 781 або -521 .

829. 364 або 182. 830. Чоловік, що запропонував угоду. Багатій отримав 3 000 000 руб., а заплатив 10 737 418,23 руб. 831. 728. 832. -22. 833. 1) 6; 2) 7; 3) 5. 835. -31,2. 836. 252. 837. 20 000 грн під 10 % річних і 40 000 грн під 7 % річних. 839. (2; -2); (-2; 2). 840. У салоні «Гама», 2755 грн. 841. Легковик за 2 год, мотоцикліст за 4 год. 844. 7. 845. $x_n = 7 - \frac{1}{3}n$. 846. $b_1 = -1$. 847. 1) $a_n = 2n - 1$; 2) $a_n = \frac{n}{n+1}$; 3) $a_n = n^2$; 4) $a_n = 2^n$; 5) $a_n = (-1)^n$; 6) $a_n = (-1)^n + 2$. 848. 5. 855. 1) -5,5; 2) -200. 856. 27. 857. $a_{45} = -0,1$. 858. Так; середня сторона дорівнює 13 см. 860. 16; 25 або 4; 1. 866. 1) -420; 2) -615. 867. 1) 3; 2) 7. 868. 9 днів. 869. $a_1 = 8$, $d = 2$. 870. 1) 81; 2) 105. 871. 3750. 872. 1) $p \frac{n-n^2}{2}$; 2) $c \frac{n^2+n}{2}$. 877. 2; -4; 8; -16; 32. 878. $-\frac{8}{3}$. 879. $c_8 = \frac{1}{5}$, $c_9 = \frac{1}{25}$. 880. -18. 881. 9. 882. 1; -3; 9, якщо $x = 2$. 883. 1) $b_1 = 1,2$, $q = 2$; 2) $b_1 = 3$, $q = 2$. 884. Можуть, $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}}$. 888. 3069 см². 889. 781,2. 890. 61. 891. 765. 892. 510 або $15 \frac{15}{16}$. 893. $b_1 = 3$, $q = -2$, $n = 6$. 894. 1; 4; 16; 64; 256; 1024. 895. О 10 год 30 хв.

Розділ 4

904. 720. 905. 120. 906. 6. 907. 16. 908. 20. 909. 1680. 910. 36. 911. 8. 912. 1) 60; 2) 125. 913. 1) 20; 2) 25. 914. 6. 915. 120. 916. 600. 917. 18. 918. 8. 919. 45. 920. 240. 921. 48. 922. 24. 924. (1; 1), (2; 0). 925. 1) -2,5; 0; 1; 2) -2; 2; 3. 927. 28,8 км/год. 928. 12. 939. Ні. 940. 1) $\approx 0,44$; 2) $\approx 0,23$; 3) $\approx 0,75$; 4) $\approx 0,91$. 941. 1) $\approx 0,09$; 2) $\approx 0,25$; 3) $\approx 0,56$; 4) $\approx 0,77$. 942. 1), 3), 4) Випадкова; 2) вірогідна; 5) неможлива. 946. 1) 9; 2) 2400. 947. 1) 495; 2) 700. 948. 21 або 22, або 23. 949. Від 55 до 59 пострілів. 952. (-2,5; -1). 953. -10,008. 955. 190,08 грн. 956. 3,5. 969. $\frac{3}{4}$. 970. $\frac{4}{15}$. 971. $\frac{8}{15}$. 972. 1) $\frac{12}{365}$; 2) $\frac{7}{365}$; 3) $\frac{71}{365}$. 973. 1) $\frac{2}{61}$; 2) $\frac{11}{366}$; 3) $\frac{35}{366}$. 974. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{1}{2}$. 975. 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{1}{2}$. 976. 1) $\frac{1}{9}$; 2) 0; 3) $\frac{2}{9}$; 4) $\frac{1}{12}$. 977. 1) 4; 2) 8; 3) менше за 12; 4) менше за 24. 978. 1) 4; 2) 2; 3) більше за 6; 4) більше за 2. 979. Зелених - 2 ручки, червоних - 5. 980. 10 червоних хустин і 2 картатих.

981. 6 червоних троянд. 982. 3 або 4 вареники. 983. $\frac{1}{3}$ 984. $\frac{1}{2}$.
 985. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{2}$. 990. (2;-2), (-2;2). 991. 72 км/год.
 992. $c < 0$. 1003. 15 км/год. 1004. 1) 26 620 грн, 2) 6620 грн.
 1005. У Люксембурзі – 15 євро, в Угорщині – 7812,5 форинтів, в Україні – 573,13 грн. 1006. 8 чисел. 1010. 120. 1011. 8. 1012. 625.
 1013. 1) 25; 2) 20. 1014. 756. 1015. 56. 1016. 60. 1017. 48. 1018. 96.
 1019. 1) 10000; 2) 5040. 1020. 15120. 1021. 28. 1026. 1) 0,03; 2) 0,45;
 3) 0,25; 4) 0,75. 1028. 1) 126; 2) 225. 1029. 8 партій. 1033. $\frac{b-1}{a+b-1}$.
 1034. Рівноймовірні події. 1035. 1) $\frac{1}{25}$; 2) 0; 3) $\frac{12}{25}$; 4) $\frac{13}{25}$; 5) $\frac{1}{5}$;
 6) $\frac{9}{25}$; 7) $\frac{9}{25}$; 8) $\frac{16}{25}$; 9) $\frac{8}{25}$; 10) $\frac{13}{25}$. 1036. $\frac{5}{18}$. 1037. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{30}$; 3) 0.
 1038. 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{2}{5}$. 1039. 6.

Задачі підвищеної складності

1045. 2) Вказівка. $x^2 - 4x + 5 - 2|x - 2| = (x - 2)^2 - 2|x - 2| + 1 = (|x - 2| - 1)^2 \geq 0$. 1048. Вказівка. Розгляньте різницю квадратів лівої і правої частин. 1049. 1) Вказівка. Замініть останнє число 6 у лівій частині нерівності на 9. 1050. Вказівка. Розгляньте $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{120}{121}$ і $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{119}{120}$. Доведіть, що $x > y$, а тому $x^2 > xy$. 1051. 33 учні, з яких 1 володіє трьома іноземними мовами. 1052. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так. 1053. Наприклад $\frac{16}{25}$. Існує безліч таких чисел. 1054. Правильний. 1055. $x = y = z = 1$. 1057. 1) 4; 2) 27. Вказівка. Використайте нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним. 1058. 1) $\frac{1}{6}$. Вказівка. $\frac{9 + y^2}{2} \geq 3y$. Тому $\frac{y}{9 + y^2} \leq \frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{12}$. 1059. Вказівка. $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = x + y + z + 2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \leq \leq 7 + 2\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2}\right)$. 1060. $x \leq 3(2 - \sqrt{5})$. 1061. 1) Якщо $m < -3$, то $x < \frac{6m-1}{m+3}$; якщо $m = -3$, то x – будь-яке число; якщо $m > -3$, то $x > \frac{6m-1}{m+3}$; 2) якщо $m < 5$, то $x < \frac{15m+7}{m-5}$; якщо $m = 5$, то нерівність не має розв'язків; якщо $m > 5$, то $x > \frac{15m+7}{m-5}$. 1062. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) так. 1063. Вказівка.

$y = x^2 - (a + b)x + (ab - c^2)$. Дискримінант квадратного тричлена $x^2 - (a + b)x + (ab - c^2)$ дорівнює $(a - b)^2 + 4c^2$. **1066.** Вказівка, $a = 2$. **1067.** $a = 2$. **1070.** 1) $x < 0$ або $x > 2$; 2) $-3 < x < 1$; 3) $x < 0$ або $x > 3,5$; 4) $-\frac{1}{5} < x < 3,5$. **1071.** 1) $x < -4$ або $x > 1$;

2) $-5 < x < 1$; 3) $-3,5 \leq x \leq -\frac{5 + \sqrt{33}}{4}$ або $\frac{\sqrt{33} - 5}{4} \leq x \leq 1$; 4) $x \leq -\frac{2}{3}$ або $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$, або $x \geq 2$. **1072.** $-3 \leq x \leq -1$. **1073.** $a \geq 1$.

1074. $m < -\frac{7}{4}$. **1075.** $-6 < a < 2$. **1076.** $-3 < b < 6$. **1077.** 1) Якщо

$|a| > 2\sqrt{2}$, система не має розв'язків; якщо $|a| = 2\sqrt{2}$, система має єдиний розв'язок; якщо $|a| < 2\sqrt{2}$, система має два розв'язки; 2) якщо $|a| < 2$, система не має розв'язків; якщо $|a| = 2$, система має два розв'язки; якщо $|a| > 2$, система має чотири розв'язки.

1078. (2; 4), (-4; 4). **1079.** (1; 2), $\left(-\frac{239}{146}; \frac{117}{146}\right)$. **1080.** 1) Система не

має розв'язків; 2) (4; -3), (3; -4). **1081.** 1) (2; 1), (1; 2); 2) (3; 1), (-1; -3). **1082.** $x = y = 4$, $z = -4$. **1083.** 1) (3; 1), (1; 3). Вказівка. Заміна $x + y = u$, $xy = v$; 2) (3; 5), (5; 3). **1084.** 1) (3; 1), (-3; -1),

$\left(\frac{14\sqrt{106}}{53}; \frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$, $\left(-\frac{14\sqrt{106}}{53}; -\frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$; 2) (2; 1), (1; 2), (-1; -2), (-2; -1), $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$.

1085. 1) (3; 2), (-3; -2), $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$; 2) (2; 1),

(-2; -1). **1086.** 6 і 4. **1087.** 3 км/год і 4 км/год. **1088.** 10 м/с і 15 м/с.

1089. 100 км/год. **1090.** 90 км/год, 60 км/год. **1091.** 7 км. **1092.** 10 хв.

1093. 6 год. **1094.** 11 %; 5 %. **1095.** 18 км; 12 км/год. Вказівка.

Нехай x км/год – запланована Сергієм швидкість, а y км – відстань від дому до стадіону. Тоді маємо систему

$$\begin{cases} y = 1,5x; \\ \frac{1}{3} + \frac{x}{3(x+8)} + \frac{y - \frac{5x}{3(x+8)}}{x+3} = 1\frac{2}{3}. \end{cases}$$

1096. 1), 5), 6), 7), 9). **1097.** 2), 4), 6), 7), 9). **1098.** $\frac{n}{n+1}$. **1100.** 9; 10; 11; 12.

1103. Так; $n = 22$. **1106.** $d = 4$. **1107.** 101. **1108.** -1; 0; 1; 2. **1112.** 7.

1113. 9. **1114.** Тільки послідовності однакових, відмінних від нуля,

чисел. 1115. 3; 5; 7. 1116. 5103 або $\frac{7}{81}$. 1117. 1; 3; 9 або $\frac{1}{9}$; $-\frac{5}{9}$; $\frac{25}{9}$.
 1118. $\approx 41,4\%$. 1119. 17. 1120. $\left(\frac{2016}{2017}\right)^2$. 1121. $\frac{1}{20}$. 1122. 0,3. 1123. $\frac{3}{7}$.
 1124. 1) $\frac{1}{45}$; 2) $\frac{16}{45}$. 1125. $\frac{1}{50}$. 1126. 1) $\frac{1}{125}$; 2) $\frac{12}{125}$; 3) $\frac{48}{125}$; 4) $\frac{64}{125}$.

**Відповіді до завдань
«Домашня самостійна робота»**

| № завдання \ № роботи | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-----------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | В | Б | Г | Г | А | Б | В | А | Б | Г | В | Б |
| 2 | В | Б | А | Г | В | Б | В | Г | А | В | Б | Б |
| 3 | Б | Б | Г | А | В | Г | А | В | Б | А | Г | Г |
| 4 | Б | А | В | Г | Б | Г | В | В | Б | Б | В | Г |
| 5 | В | Г | Б | А | Б | В | В | А | Г | В | А | Г |

**Відповіді до варіанта атестаційної письмової роботи
з математики**

Частина перша

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| А | | | | × | | × | | | | × | | |
| Б | | | × | | | | × | × | | | | |
| В | | | | | × | | | | × | | | × |
| Г | × | × | | | | | | | | | × | |

Частина друга

13. $-\frac{1}{b}$. 14. 7. 15. $[-3; +\infty)$. 16. -6; 6.

Частина третя

17. 45 км/год. 18. (2; 2), (0,5; 1). 19. 81°.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аргумент 68

Вершина параболи 99, 101

Вибірка 222

Випадкова подія 202

Випадковий дослід 202

Відносна частота події 203

Відсоткові кошти 178

Вірогідна подія 202

Вісь симетрії параболи 101

Властивості арифметичної прогресії 157, 158

– геометричної прогресії 172, 173

– нерівностей зі змінними 41

– степеня із цілим показником 213

– функції $y = ax^2$, $a \neq 0$ 100

– $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ 101

– числових нерівностей 13, 14, 22, 23

Графік функції 70

Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь 120, 121

Доведення нерівностей 6

Заміна змінних у системах рівнянь 124

Змінна залежна 68

– незалежна 68

Знаки нестрогої нерівності 6

– строгої нерівності 6

Знаменник геометричної прогресії 170

Класичне означення ймовірності 211

Комбінаторика 195

Комбінаторне правило добутку 196

Комбінаторне правило суми 195

Ліва частина нерівності 5

Лінійні нерівності з однією змінною 41

Математична статистика 219

Найбільше значення функції 69

Найменше значення функції 69

Найпростіші перетворення графіків функцій 88–93

Нарощений капітал 178

Наступний член послідовності 149

Неможлива подія 202

Нерівність квадратна 111

– Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним 7

– лінійна 41

– неправильна 6

– нестрога 6

– правильна 6

– строга 6

– числова 5

Нерівності рівносильні 41

Нескінченна числова послідовність 150

Нулі функції 78

Об'єднання множин 35

– числових проміжків 35

Область визначення функції 69

– значень функції 69

Обсяг вибірки 223

Оцінювання значення виразу 16, 23

Переріз множин 34

– числових проміжків 34

Подання статистичних даних у вигляді графіків 221

– діаграм 220

– таблиць 220

Подвійні числові нерівності 16

Попередній член послідовності 149

Послідовність 149

Початковий капітал 178

Почленне додавання нерівностей 22

– множення нерівностей 23

Права частина нерівності 5

Прогресія арифметична 155
– геометрична 170

Проміжок знакосталості функції 79
– зростання функції 79
– спадання функції 79

Рекурентна формула 150
Рівноймовірні події 212
Рівняння першого степеня з двома змінними 120
Різниця арифметичної прогресії 155
Розв'язок нерівності 29
– системи нерівностей 49

Середнє арифметичне 7
– геометричне 7
– значення статистичних вимірювань 222
Система лінійних нерівностей 49
Скінченна числова послідовність 150
Спосіб додавання 123
– підстановки 122
Статистична ймовірність події 204

Статистичні дані 221
Степінь рівняння 120

Теорія ймовірностей 201

Формула n -го члена арифметичної прогресії 156
– – – геометричної прогресії 171
– – – послідовності 150
– складних відсотків 179
– суми n перших членів арифметичної прогресії 163, 164
– – – – геометричної прогресії 181, 182
Функція (функціональна залежність) 68
– зростаюча на проміжку 79
– квадратична 98
– спадна на проміжку 79

Частота події 203

Числові послідовності 151
– проміжки 32
Члени послідовності 149

ЗМІСТ

| | |
|--|---|
| <i>Шановні дев'ятикласники та дев'ятикласниці!</i> | 3 |
| <i>Шановні вчителі!</i> | 4 |
| <i>Шановні батьки!</i> | 4 |

Розділ 1. Нерівності

| | |
|---|----|
| § 1. Числові нерівності | 5 |
| § 2. Основні властивості числових нерівностей | 13 |
| § 3. Почленне додавання і множення нерівностей | 22 |
| § 4. Нерівності зі змінними. Розв'язок нерівності | 29 |
| § 5. Числові проміжки. Переріз та об'єднання множин | 32 |
| § 6. Лінійні нерівності з однією змінною.
Рівносильні нерівності | 41 |
| § 7. Системи лінійних нерівностей з однією змінною,
їх розв'язування | 49 |
| <i>Завдання для перевірки знань до § 1–7</i> | 58 |
| <i>Вправи для повторення розділу 1</i> | 59 |
| <i>Фіскальна математика</i> | 66 |

Розділ 2. Квадратична функція

| | |
|--|-----|
| § 8. Функції. Область визначення, область значень
і графік функції | 68 |
| § 9. Властивості функції | 78 |
| § 10. Найпростіші перетворення графіків функцій | 88 |
| § 11. Функція $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, її графік
і властивості | 98 |
| <i>Завдання для перевірки знань до § 8–11</i> | 110 |
| § 12. Квадратна нерівність | 111 |
| § 13. Розв'язування систем рівнянь другого степеня
з двома змінними | 120 |
| § 14. Система двох рівнянь з двома змінними
як математична модель текстових
і прикладних задач | 131 |
| <i>Завдання для перевірки знань до § 12–14</i> | 138 |
| <i>Вправи для повторення розділу 2</i> | 139 |

Розділ 3. Числові послідовності

| | |
|--|-----|
| § 15. Числові послідовності | 149 |
| § 16. Арифметична прогресія, її властивості. Формула
n -го члена арифметичної прогресії | 155 |
| § 17. Сума n перших членів арифметичної прогресії | 163 |
| § 18. Геометрична прогресія, її властивості. Формула
n -го члена геометричної прогресії | 169 |
| § 19. Формула складних відсотків | 178 |
| § 20. Сума n перших членів геометричної прогресії | 181 |

| | |
|--|-----|
| <i>Завдання для перевірки знань до § 15–20</i> | 189 |
| <i>Вправи для повторення розділу 3</i> | 190 |
| Розділ 4. Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики | |
| § 21. Комбінаторні задачі. Комбінаторні правила суми і добутку | 195 |
| § 22. Випадкова подія. Частота та ймовірність випадкової події | 201 |
| § 23. Класичне означення ймовірності | 211 |
| § 24. Початкові відомості про статистику.
Статистичні дані. Способи подання даних та їх обробки | 219 |
| <i>Завдання для перевірки знань до § 21–24</i> | 228 |
| <i>Вправи для повторення розділу 4</i> | 230 |
| Завдання для перевірки знань за курс алгебри 9 класу | 235 |
| Задачі підвищеної складності | 236 |
| Зразок варіанта атестаційної письмової роботи з математики | 246 |
| Відповіді та вказівки до вправ | 248 |
| Предметний покажчик | 259 |

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Головний редактор *Наталія Зabloцька*
Редактор *Оксана Єргіна*
Обкладинка *Тетяни Куш*
Художнє оформлення *Василя Маруцини*
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедева*
Коректор *Лариса Леуська*

Формат 60×90/16.
Ум. друк. арк. 16,5. Обл.-вид. арк.15,01.
Тираж 132 591 пр. Вид. № 1875.
Зам. № .

Видавництво «Генеza», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 5088 від 27.04.2016.

Віддруковано на ПРАТ «Харківська книжкова фабрика “Глобус”»,
вул. Різдяна, 11, м. Харків, 61052.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3985 від 22.02.2011.
www.globus-book.com

ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

1. Якщо $a > b$, то $b < a$; якщо $a < b$, то $b > a$.
2. Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.
Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.
3. Якщо $a > b$ і p – будь-яке число, то $a + p > b + p$.
4. Якщо $a > b$ і $p > 0$, то $ap > bp$.
Якщо $a > b$ і $p < 0$, то $ap < bp$.
5. Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

| | |
|--------------------|--|
| Почленне додавання | $\begin{array}{r} a < b \\ + \\ c < d \\ \hline a + c < b + d \end{array}$ |
|--------------------|--|

6. Якщо $a < b$ і $c < d$, то $ac < bd$, де a, b, c, d – додатні.

| | |
|-------------------|---|
| Почленне множення | $\begin{array}{r} a < b \\ \times \\ c < d \\ \hline ac < bd \end{array}$ |
|-------------------|---|

| Нерівність | Зображення | Числовий проміжок |
|-------------------|------------|-------------------|
| $x < a$ | | $(-\infty; a)$ |
| $x \leq a$ | | $(-\infty; a]$ |
| $x > a$ | | $(a; +\infty)$ |
| $x \geq a$ | | $[a; +\infty)$ |
| $a < x < b$ | | $(a; b)$ |
| $a < x \leq b$ | | $(a; b]$ |
| $a \leq x < b$ | | $[a; b)$ |
| $a \leq x \leq b$ | | $[a; b]$ |

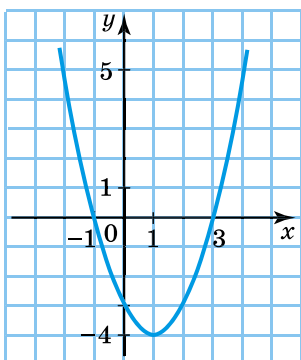
ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

| Десятки | Одиниці | | | | | | | | | |
|---------|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |
| 2 | 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 | 676 | 729 | 784 | 841 |
| 3 | 900 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 |
| 4 | 1600 | 1681 | 1764 | 1849 | 1936 | 2025 | 2116 | 2209 | 2304 | 2401 |
| 5 | 2500 | 2601 | 2704 | 2809 | 2916 | 3025 | 3136 | 3249 | 3364 | 3481 |
| 6 | 3600 | 3721 | 3844 | 3969 | 4096 | 4225 | 4356 | 4489 | 4624 | 4761 |
| 7 | 4900 | 5041 | 5184 | 5329 | 5476 | 5625 | 5776 | 5929 | 6084 | 6241 |
| 8 | 6400 | 6561 | 6724 | 6889 | 7056 | 7225 | 7396 | 7569 | 7744 | 7921 |
| 9 | 8100 | 8281 | 8464 | 8649 | 8836 | 9025 | 9216 | 9409 | 9604 | 9801 |

ФУНКЦІЯ $y = ax^2 + bx + c$, ЇЇ ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ

Приклад. $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1; \quad y_B = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4.$$



| | | | | | | | |
|-----|----|----|----|----|----|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 5 | 0 | -3 | -4 | -3 | 0 | 5 |

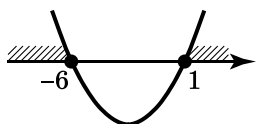
Властивості

- $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- $E(f) = [-4; +\infty)$.
- Нулі функції: $x = -1$; $x = 3$.
- $f(x) > 0$, якщо $x < -1$ або $x > 3$;
 $f(x) < 0$, якщо $-1 < x < 3$.

- Функція зростає, якщо $x \in [1; +\infty)$;
функція спадає, якщо $x \in (-\infty; 1]$.

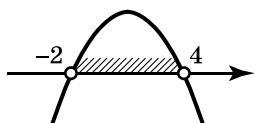
КВАДРАТНА НЕРІВНІСТЬ

Приклад 1. $x^2 + 5x - 6 \geq 0$;



$$\begin{aligned} x^2 + 5x - 6 &= 0; \\ x_1 &= -6; \quad x_2 = 1. \\ x &\in (-\infty; -6] \cup [1; +\infty) \end{aligned}$$

Приклад 2. $-x^2 + 2x + 8 > 0$;



$$\begin{aligned} -x^2 + 2x + 8 &= 0; \\ x_1 &= -2; \quad x_2 = 4. \\ x &\in (-2; 4) \end{aligned}$$

АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ (a_n)

(a_1 – перший член; d – різниця; n – кількість членів;
 a_n – n -й член; S_n – сума n перших членів)

$$\begin{aligned} d &= a_{n+1} - a_n \\ a_n &= a_1 + d(n - 1) \\ a_n &= \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \\ S_n &= \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n \end{aligned}$$

ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ (b_n)

(b_1 – перший член; q – знаменник; n – кількість членів;
 b_n – n -й член; S_n – сума n перших членів)

$$\begin{aligned} q &= \frac{b_{n+1}}{b_n} \\ b_n &= b_1 q^{n-1} \\ b_n^2 &= b_{n-1} b_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \\ S_n &= \frac{b_n q - b_1}{q - 1} \end{aligned}$$