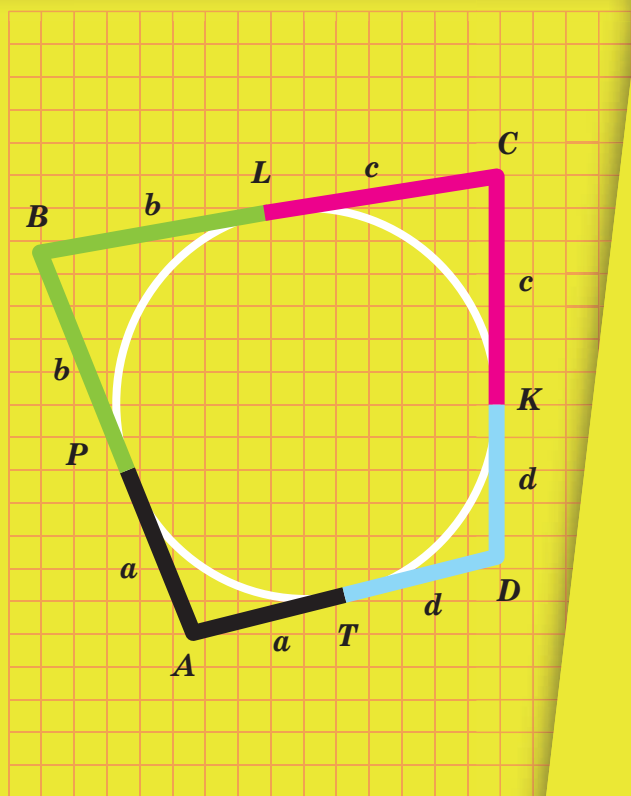


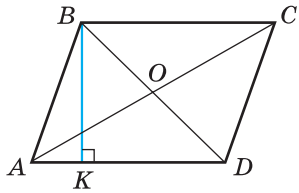
Олександр Істер

ГЕОМЕТРІЯ



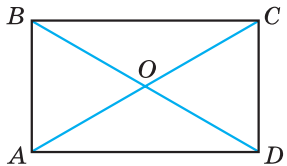
ЧОТИРИКУТНИКИ

Паралелограм



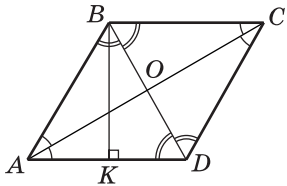
1. $AB = CD, AD = BC$
2. $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$
3. $AO = OC, BO = OD$
4. $P = 2(AB + AD)$
5. $S = AD \cdot BK$

Прямокутник



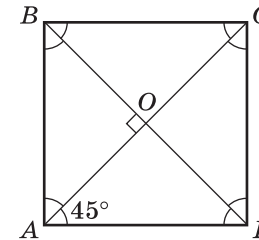
1. $AB = CD, AD = BC$
2. $AC = BD$
3. $AO = BO = CO = DO$
4. $P = 2(AB + AD)$
5. $S = AD \cdot AB$

Ромб



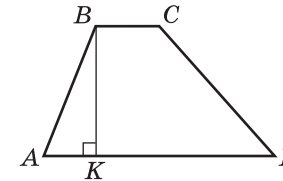
1. $AB = BC = CD = DA$
2. $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$
3. $AC \perp BD$
4. $AO = OC, BO = OD$
5. $\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA,$
 $\angle ABD = \angle DBC = \angle BDA = \angle BDC$
6. $P = 4AB$
7. $S = AD \cdot BK = \frac{AC \cdot BD}{2}$

Квадрат



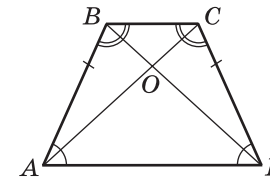
1. $AB = BC = CD = DA$
2. $AC = BD$
3. $AO = BO = CO = DO$
4. $AC \perp BD$
5. Діагоналі утворюють зі сторонами кути по 45°
6. $P = 4AB$
7. $S = AB^2$

Трапеція



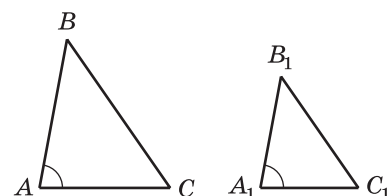
1. $\angle A + \angle B = 180^\circ,$
 $\angle C + \angle D = 180^\circ$
2. $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK$

Рівнобічна трапеція

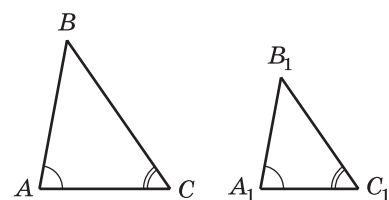


1. $AB = CD$
2. $\angle A = \angle D, \angle B = \angle C$
3. $AC = BD$
4. $OA = OD, OB = OC$

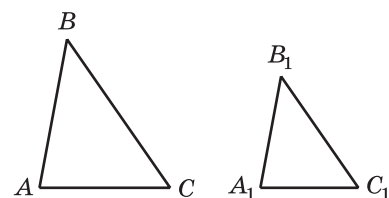
ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



1. Якщо $\angle A = \angle A_1$,
 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$,
 то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

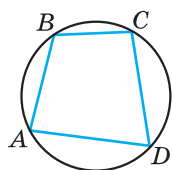


2. Якщо $\angle A = \angle A_1$,
 $\angle C = \angle C_1$,
 то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.



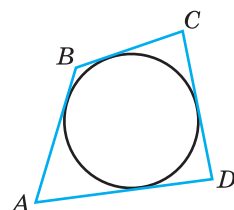
3. Якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$,
 то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

ВПИСАНИЙ ЧОТИРИКУТНИК



$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$

ОПИСАНИЙ ЧОТИРИКУТНИК



$$AB + CD = AD + BC$$

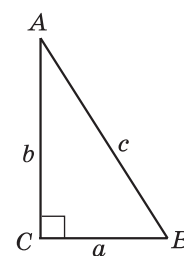
ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

Довільний трикутник $S = \frac{AC \cdot BH}{2}$	Прямокутний трикутник $S = \frac{AC \cdot BC}{2}$	Рівносторонній трикутник $S = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

ЗНАЧЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА І ТАНГЕНСА ДЕЯКИХ КУТІВ

A	30°	45°	60°
sin A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg A	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

СПІВВІДНОШЕННЯ У ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ



1. $\angle A + \angle B = 90^\circ$

2. Теорема Піфагора: $a^2 + b^2 = c^2$

3. $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$, $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

4. $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$, $\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$

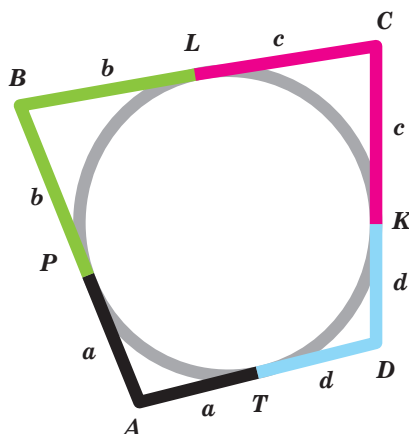
5. $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

Олександр Істер

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*



Київ
«ГЕНЕЗА»
2025

УДК 514(075.3)
І-89

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 21.02.2025 р. № 347)*

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Відповідає модельній навчальній програмі «Геометрія. 7–9 класи»
для закладів загальної середньої освіти
(авт. Істер О. С.)

Інтерактивний електронний додаток до підручника

<https://faino.school/>

Усі матеріали інтерактивного електронного додатка
розміщено на відкритому ресурсі

<https://cutt.ly/BrfFX4cP>



Істер О. С.

І-89 Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. осві-
ти / Олександр Істер. — Київ : Генеза, 2025. — 216 с.

ISBN 978-617-8353-99-5.

УДК 514(075.3)

ISBN 978-617-8353-99-5

© Істер О. С., 2025
© ТОВ «Генеза»,
оригінал-макет, 2025

Шановні восьмикласниці та восьмикласники!

У цьому навчальному році ви продовжите вивчати геометрію, а підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам у цьому. Вивчаючи теоретичний матеріал, зверніть увагу на текст, надрукований **жирним шрифтом**. Так виділено нові, незнайомі поняття.

У підручнику є такі умовні позначення:



– пригадай (раніше вивчене);



– зверни особливу увагу;



– запитання і завдання до теоретичного матеріалу;

113

– завдання для класної і 115 – домашньої роботи;



– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв'язування інших задач);



– теорема;



– наслідок з теореми;



– кінець доведення теореми або задачі;



– рубрика «Україна – це ми»;



– рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;



– рубрика «Життєва математика»;



– вправи для повторення;



– вправи для підготовки до вивчення нової теми;



– рубрика «Головне в розділі».

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так: з позначок **1**, **2**, **3**, **4**, ***** починаються вправи відповідно початкового, середнього, достатнього, високого рівнів та підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «**Домашньої самостійної роботи**», які подано в тестовій формі, та «**Завдання для перевірки знань**». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, стисло теоретичний матеріал (рубрика «**Головне в розділі**»), а в кінці підручника – «**Завдання для перевірки знань за курс геометрії 8 класу**» та «**Задачі підвищеної складності**». Заняття геометрією стануть ще цікавішими, якщо ви розв'язуватимете вправи рубрики «**Цікаві задачі – поміркуй одначе**».

У рубриці  «**Життєва математика**» зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, – усім

тим, що знадобиться кожному в повсякденному житті. У рубриці



«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу» пропонується вико-

нати вправи, які допоможуть актуалізувати знання, потрібні для вивчення наступної теми.

Пригадати раніше вивчене вам допоможуть **«Відомості з курсу геометрії 7 класу»**, які розміщено в кінці підручника, та **«Вправи на повторення курсу геометрії 7 класу»** на початку підручника.

Автор намагався подати теоретичний матеріал підручника простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно доопрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість із них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У кінці підручника в додатку під назвою **«Готуємося до ЗНО (НМТ)»** подано добірку задач, що в різні роки пропонувалися абітурієнтам на зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, для розв'язання яких достатньо знань з геометрії за 8-й клас. Розв'язавши ці задачі, ви зробите ще один крок уперед для успішної підготовки до майбутніх випробувань, які чекатимуть на вас під час вступу до омріяного закладу вищої освіти.

Цікаві факти з історії розвитку геометрії як науки ви знайдете в рубриці **«А ще раніше...»**.

Бажаю успіхів на шляху до знань!

Шановні вчительки та вчителі!

Підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації тощо. Вправи, що не розглядалися на уроці, можна використати на факультативних та індивідуальних заняттях, під час підготовки до математичних змагань.

Додаткові вправи в **«Завданнях для перевірки знань»** призначено для учнів/учениць, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Правильне їх розв'язання вчитель/вчителька може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів та задачі з додатка **«Готуємося до ЗНО (НМТ)»** можна запропонувати учням, наприклад, під час уроків узагальнення або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року. Організувати повторення курсу геометрії 7 класу на початку навчального року та пригадати відповідний теоретичний матеріал можна, запропонувавши учням розв'язати **«Вправи на повторення курсу геометрії 7 класу»** та прочитавши відповідні теоретичні відомості, які розміщено в кінці підручника.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати цей матеріал за підручником удома. Спочатку бажано, щоб вона прочитала теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього – розв'язати задачі та вправи, що їй під силу, з розглянутого параграфа.

Упродовж опрацювання дитиною курсу геометрії 8-го класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

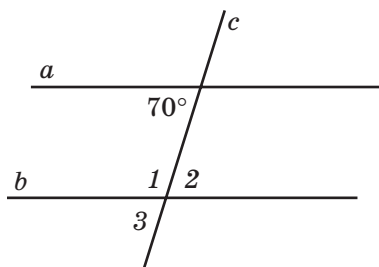
Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

У кінці підручника *«Задачі підвищеної складності»* допоможуть вашій дитині поглибити знання з геометрії та підготуватися до математичних змагань.

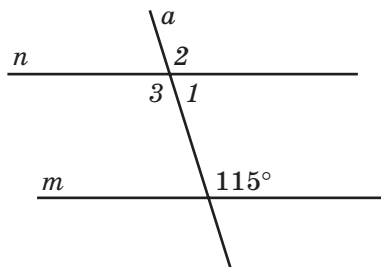
ПОВТОРЮЄМО ГЕОМЕТРІЮ ЗА 7 КЛАС

Елементарні геометричні фігури та їхні властивості. Взаємне розміщення прямих на площині

- 1** 1. (Усно.) Який із поданих кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:
- 1) $\angle A = 32^\circ$; 2) $\angle B = 90^\circ$; 3) $\angle C = 150^\circ$;
4) $\angle D = 59^\circ 30'$; 5) $\angle K = 180^\circ$; 6) $\angle N = 120^\circ$;
7) $\angle L = 89^\circ$; 8) $\angle M = 113^\circ 20'$
2. Знайдіть кут, суміжний з кутом:
1) 25° ; 2) 90° ; 3) 116° .
3. Знайдіть кут, суміжний з кутом: 1) 140° ; 2) 83° .
4. $a \parallel b$, c – січна (мал. 1). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.



Мал. 1



Мал. 2

5. $m \parallel n$, a – січна (мал. 2). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.
- 2** 6. Точка K належить відрізку CD . Знайдіть:
- 1) CD , якщо $CK = 28$ мм, $KD = 4$ см;
2) KD , якщо $CD = 5$ дм, $CK = 2$ дм 6 см.
7. Точка M належить відрізку AB . Знайдіть:
- 1) AM , якщо $AB = 5$ см, $MB = 34$ мм;
2) AB , якщо $AM = 3$ дм, $MB = 2$ дм 5 см.
8. Промінь OM проходить між сторонами кута BOC . Знайдіть градусну міру кута BOM , якщо $\angle BOC = 118^\circ$, $\angle MOC = 72^\circ$.
9. Промінь OK проходить між сторонами кута AOD . Знайдіть градусну міру цього кута, якщо $\angle AOK = 42^\circ$, $\angle KOD = 37^\circ$.
10. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 115° . Знайдіть інші кути та кут між прямими.
11. Накресліть відрізки KL і AB та промінь CD так, щоб відрізок KL був паралельний променю CD і перпендикулярний до відрізка AB .
12. Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 75° . Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

13. Один з кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 130° . Знайдіть інші сім кутів.

14. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них:

- 1) на 40° менший від іншого; 2) становить 80 % від іншого.

15. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них:

- 1) удвічі більший за інший; 2) становить $\frac{2}{7}$ від іншого.

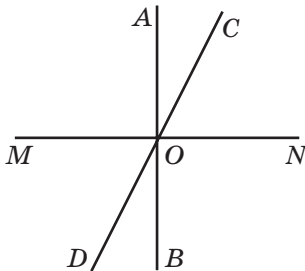
16. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте назву обласного центра України.

Точка K належить відрізку AB завдовжки 20 см. Знайдіть довжини відрізків AK і KB , якщо:	AK	KB
AK утричі менший від KB	В	Я
KB становить $\frac{2}{3}$ від відрізку AK	И	Н
$AK : KB = 3 : 7$	І	Ц

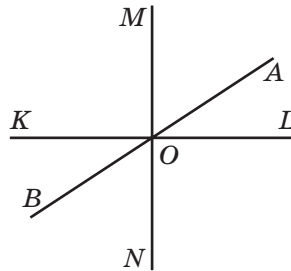
5 см	6 см	8 см	8 см	12 см	14 см	15 см

17. Прямі AB , MN і CD перетинаються в точці O , причому $AB \perp MN$ (мал. 3). Знайдіть:

- 1) $\angle DOB$, якщо $\angle CON = 70^\circ$;
2) $\angle AOC$, якщо $\angle DON = 105^\circ$.



Мал. 3



Мал. 4

18. Прямі MN , KL і AB перетинаються в точці O , причому $MN \perp KL$ (мал. 4). Знайдіть:

- 1) $\angle KOB$, якщо $\angle NOA = 120^\circ$;
2) $\angle KOA$, якщо $\angle BON = 40^\circ$.

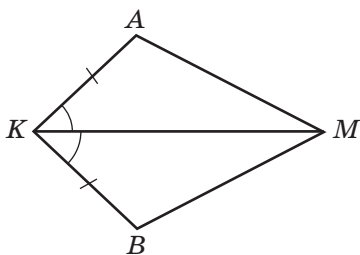
19. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

- 1) один із них утричі більший за другий;
2) один із них на 25 % більший за другий.

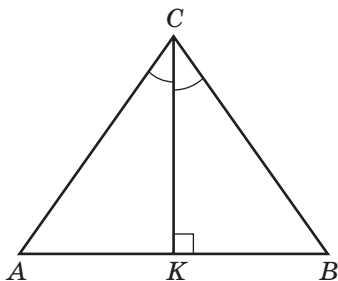
20. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох прямих січною, якщо:
- 1) один із них на 30° менший від другого;
 - 2) їхні градусні міри відносяться як 3 : 2.
21. Кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими a і m . Чи можна стверджувати, що прямі b і m паралельні?

Трикутники. Ознаки рівності трикутників

22. (Усно.) Чи існує трикутник з кутами:
- 1) $60^\circ, 60^\circ, 61^\circ$;
 - 2) $20^\circ, 70^\circ, 90^\circ$;
 - 3) $10^\circ, 100^\circ, 70^\circ$;
 - 4) $50^\circ, 60^\circ, 80^\circ$?
23. (Усно.) Чи існує трикутник зі сторонами:
- 1) 7 см, 2 см, 9 см;
 - 2) 12 см, 10 см, 8 см;
 - 3) 3 см, 4 см, 6 см;
 - 4) 8 см, 8 см, 15 см?
24. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 5 см, а бічна сторона на 2 см більша за основу.
25. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 10 см, а основа на 3 см менша від бічної сторони.
26. У трикутнику ABC відрізок BK – медіана, $AK = 5$ см. Знайдіть KC і AC .
27. У трикутнику ABC відрізок CM – бісектриса, $\angle ACB = 80^\circ$. Знайдіть градусні міри кутів ACM і BCM .
28. Доведіть, що $\triangle AKM = \triangle BKM$ (мал. 5), якщо $AK = BK$ і $\angle AKM = \angle BKM$.



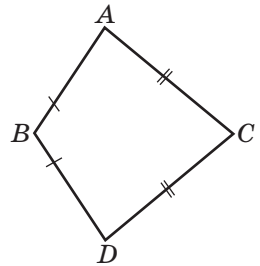
Мал. 5



Мал. 6

29. Доведіть, що $\triangle ACK = \triangle BCK$ (мал. 6), якщо $CK \perp AB$ і $\angle ACK = \angle BCK$.
30. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70° . Знайдіть кут при вершині цього трикутника.
31. Знайдіть кут при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при його вершині дорівнює 100° .
32. Зовнішній кут при вершині C трикутника ABC дорівнює 110° . Знайдіть кут A , якщо $\angle B = 60^\circ$.

33. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 130° . Знайдіть внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, якщо другий внутрішній кут, не суміжний з ним, дорівнює 80° .
34. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = 60^\circ$. Знайдіть:
1) AC , якщо $AB = 10$ см; 2) AB , якщо $AC = 4$ дм.
35. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = 30^\circ$. Знайдіть:
1) AB , якщо $BC = 8$ дм; 2) BC , якщо $AB = 18$ см.
36. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,7 см і 6,3 см. Якому найменшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?
37. Дві сторони трикутника дорівнюють 4,8 см і 2,6 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона трикутника?
38. Одна зі сторін трикутника утричі менша від другої і на 10 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 45 см.
39. Одна зі сторін трикутника на 3 см менша від другої і удвічі менша від третьої. Периметр трикутника дорівнює 35 см. Знайдіть сторони трикутника.
40. На малюнку 7 $AB = BD$, $AC = CD$. Доведіть, що BC – бісектриса кута ABD .
41. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте ім'я та прізвище видатного українського політичного, державного і військового діяча. Дізнайтеся з інтернету про його біографію та досягнення.



Мал. 7

У $\triangle ABC$: $\angle A = 60^\circ$. Визначте градусні міри кутів B і C , якщо:	$\angle B$	$\angle C$
кут B на 20° менший від кута C	Л	О
кут B удвічі більший за кут C	Р	И
$\angle B : \angle C = 1 : 3$	П	К

30°	40°	50°	40°	30°

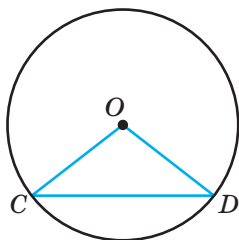
70°	80°	50°	40°	90°

42. Один із кутів трикутника на 20° менший від другого й удвічі менший від третього. Знайдіть кути трикутника.
43. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один із них на 26° більший за інший;
2) один із них становить 80 % від іншого.
44. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один із них у 5 разів більший за інший;
2) їхні градусні міри відносяться як 3 : 2.

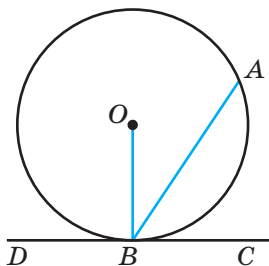
45. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено висоту CK . Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо периметр трикутника ACK дорівнює 30 см і $CK = 12$ см.
46. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено медіану AM . Знайдіть периметр трикутника ABM , якщо периметр трикутника ABC дорівнює 32 см і $AM = 8$ см.
47. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них на 24° більший за інший. Скільки випадків слід розглянути?
48. Чи існує трикутник із периметром 20 см, одна сторона якого на 4 см більша за другу і на 3 см менша від третьої?

Коло і круг

49. (Усно.) Знайдіть:
- 1) діаметр кола, якщо його радіус дорівнює 6 см; 7 дм;
 - 2) радіус кола, діаметр якого дорівнює 4 дм; 5 см.
50. Знайдіть градусну міру кута, вписаного у коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:
- 1) 80° ;
 - 2) 200° .
51. Визначте градусну міру центрального кута, якщо відповідний йому вписаний кут дорівнює:
- 1) 50° ;
 - 2) 110° .
52. На малюнку 8 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:
- 1) кута O , якщо $\angle C = 46^\circ$;
 - 2) кута D , якщо $\angle O = 96^\circ$.



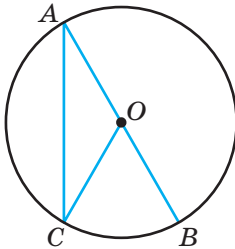
Мал. 8



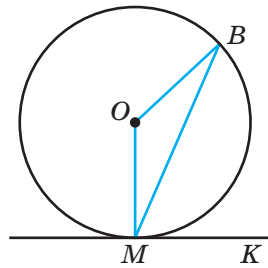
Мал. 9

53. На малюнку 8 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:
- 1) кута C , якщо $\angle O = 94^\circ$;
 - 2) кута O , якщо $\angle D = 44^\circ$.
54. На малюнку 9 точка O – центр кола, CD – дотична до кола, точка B – точка дотику. Знайдіть:
- 1) $\angle OBA$, якщо $\angle ABC = 62^\circ$;
 - 2) $\angle DBA$, якщо $\angle OBA = 30^\circ$.
55. На малюнку 9 точка O – центр кола, CD – дотична до кола, точка B – точка дотику. Знайдіть:
- 1) $\angle ABC$, якщо $\angle OBA = 32^\circ$;
 - 2) $\angle OBA$, якщо $\angle DBA = 136^\circ$.
56. Точки A і B належать колу і лежать по різні боки від хорди CD , $\angle CAD = 76^\circ$. Знайдіть $\angle CBD$.

57. Радіуси двох кіл дорівнюють 8 см і 5 см. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо кола мають:
- 1) внутрішній дотик;
 - 2) зовнішній дотик.
58. Радіуси двох кіл дорівнюють 4 см і 7 см. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо кола мають:
- 1) зовнішній дотик;
 - 2) внутрішній дотик.
- 3** 59. На малюнку 10 точка O – центр кола, $\angle COB = 40^\circ$. Знайдіть $\angle CAB$.

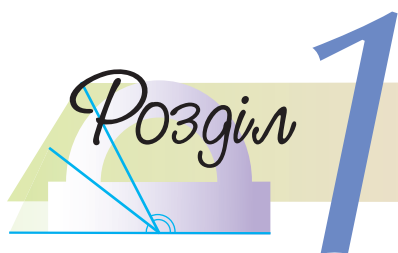


Мал. 10



Мал. 11

60. На малюнку 10 точка O – центр кола, $\angle ACO = 21^\circ$. Знайдіть $\angle COB$.
61. Прямая MK – дотична до кола, точка O – центр кола, точка M – точка дотику (мал. 11). Знайдіть $\angle BMK$, якщо $\angle BOM = 130^\circ$.
62. Прямая MK – дотична до кола, точка O – центр кола, точка M – точка дотику (мал. 11). Знайдіть $\angle MOB$, якщо $\angle KMB = 70^\circ$.
63. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 16 см, а їх радіуси відносяться як 5 : 3. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони мають:
- 1) внутрішній дотик;
 - 2) зовнішній дотик.
- 4** 64. Прямі AB і AC дотикаються до кола із центром O в точках B і C . Знайдіть BC , якщо $AB = 4$ см, $\angle OAC = 30^\circ$.
65. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 2 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр цього трикутника.
66. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 4 см і 3 см, починаючи від вершини, що протилежна основі. Знайдіть периметр цього трикутника.
67. Рівнобедрений трикутник ABC з основою AB вписано у коло із центром у точці O , $\angle AOB = 100^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC . Скільки розв'язків має задача?

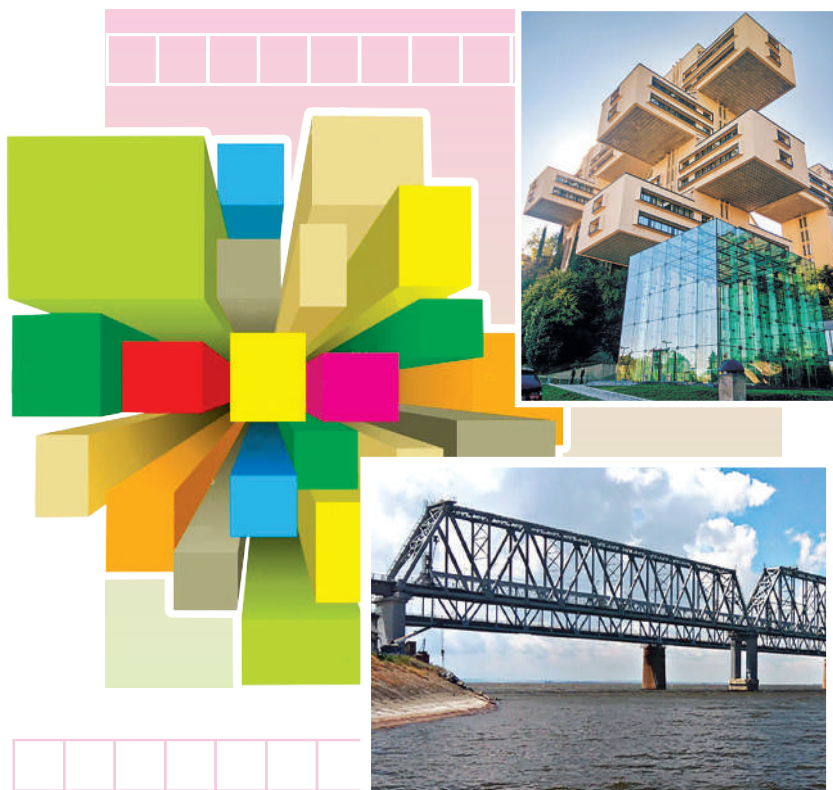


1

ЧОТИРИКУТНИКИ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** поняття прямокутника і квадрата;
- **дізнаєтеся** про паралелограм та його властивості, трапецію; вписані та описані чотирикутники; середню лінію трикутника та середню лінію трапеції; теорему Фалеса;
- **навчитесь** обґрунтовувати належність чотирикутника до певного виду, застосовувати вивчені означення і властивості до розв'язування задач.

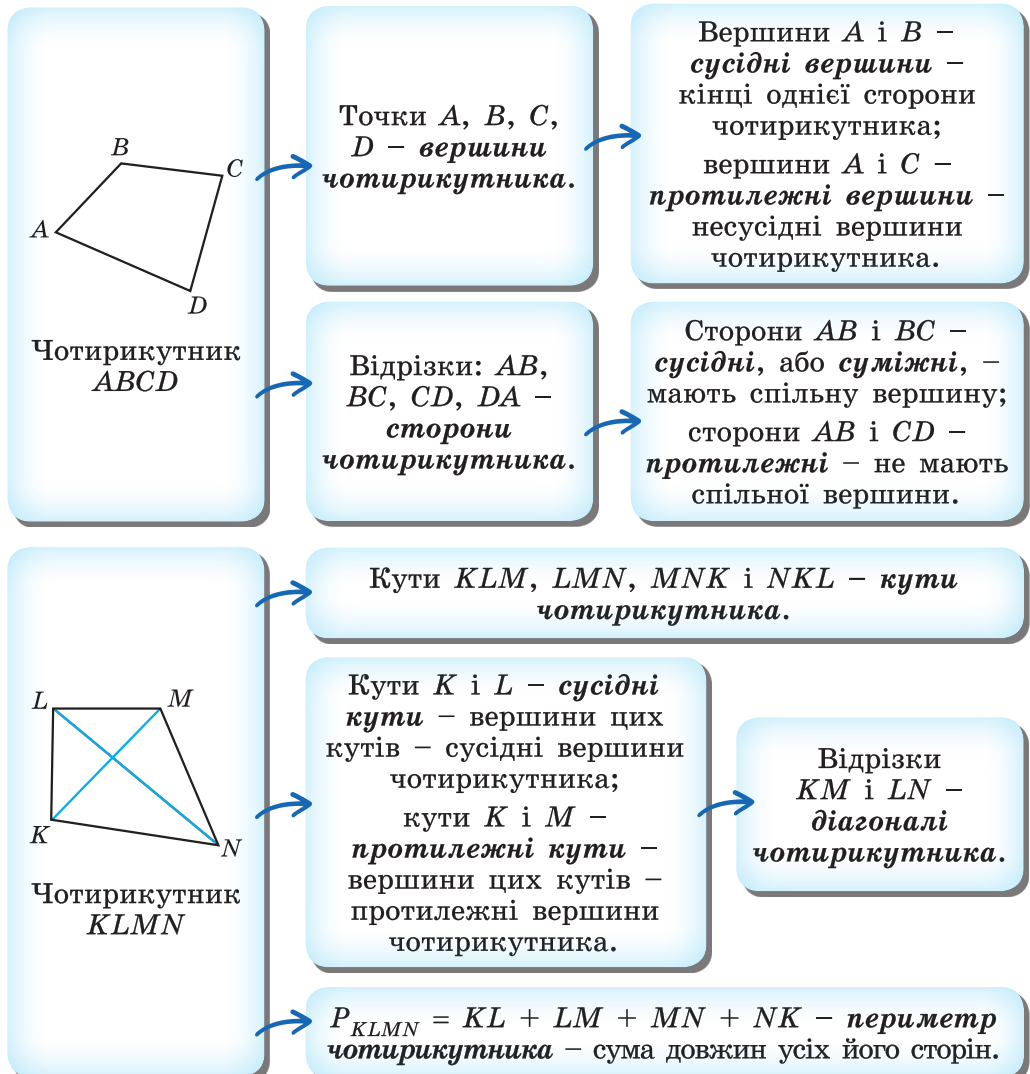


§ 1. Чотирикутник, його елементи. Сума кутів чотирикутника

1. Чотирикутник та його елементи

Чотирикутником називають фігуру, що складається із чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають. При цьому жодні три із цих точок не лежать на одній прямій, а відрізки, які їх сполучають, не мають жодних інших спільних точок, крім даних.

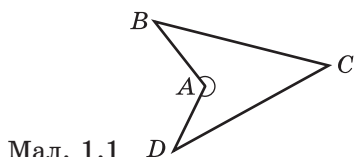
Будь-який чотирикутник обмежує певну частину площини, яка є внутрішньою областю чотирикутника.



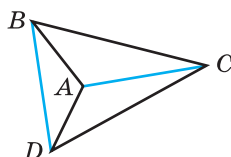
Зауважимо, що при позначенні чотирикутника букви, які стоять поруч, відповідають сусіднім вершинам чотирикутника. Наприклад, чотирикутник $ABCD$ (мал. на с. 13) можна позначити ще так: $BCDA$, або $ADCB$, або $CBAD$ тощо.

2. Види чотирикутників

Один з кутів чотирикутника може бути більшим за розгорнутий. Наприклад, на малюнку 1.1 кут A чотирикутника $ABCD$ є більшим за розгорнутий. Такий чотирикутник називають **неопуклим**. Якщо всі кути чотирикутника менші від 180° , то його називають **опуклим**. Діагоналі опуклого чотирикутника перетинаються (див. мал. с. 11), а неопуклого – не перетинаються (мал. 1.2).



Мал. 1.1



Мал. 1.2

3. Сума кутів чотирикутника

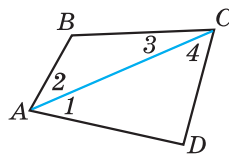


Теорема (про суму кутів чотирикутника). Сума кутів чотирикутника дорівнює 360° .

Доведення. Розглянемо випадок, коли чотирикутник є опуклим. Нехай $ABCD$ – деякий чотирикутник.

1) Проведемо в ньому діагональ AC (мал. 1.3). Тоді $\angle A = \angle 1 + \angle 2$, $\angle C = \angle 3 + \angle 4$.

2) Враховуючи, що $\angle 2 + \angle B + \angle 3 = 180^\circ$ (як сума кутів $\triangle ABC$), $\angle 1 + \angle D + \angle 4 = 180^\circ$ (як сума кутів $\triangle ADC$), матимемо: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle 3 + \angle 4 + \angle D = (\angle 2 + \angle B + \angle 3) + (\angle 1 + \angle D + \angle 4) = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$. ■



Мал. 1.3

Приклад. Знайти кути чотирикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як $3 : 10 : 4 : 1$. Опуклим чи неопуклим є цей чотирикутник?

Розв'язання. Нехай кути чотирикутника дорівнюють $3x$, $10x$, $4x$ і x . Маємо рівняння $3x + 10x + 4x + x = 360^\circ$, звідки $x = 20^\circ$. Отже, кути чотирикутника дорівнюють $3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$, $10 \cdot 20^\circ = 200^\circ$, $4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$ і 20° . Оскільки один з кутів чотирикутника більший за 180° , то цей чотирикутник – неопуклий.

Відповідь: 60° , 200° , 80° , 20° ; неопуклий.

Переконайтеся у справедливості цієї теореми для неопуклого чотирикутника (мал. 1.2). Порівняйте кроки доведення цієї теореми для опуклого та неопуклого чотирикутника. Зробіть висновок.



Яку фігуру називають чотирикутником? ○ Що називають вершинами чотирикутника, сторонами чотирикутника? ○ Які вершини чотирикутника називають сусідніми, які – протилежними? ○ Що таке діагоналі чотирикутника? ○ Які сторони чотирикутника називають сусідніми, які – протилежними? ○ Що називають периметром чоти-

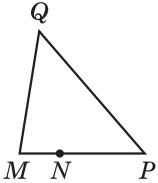
- рикутника? ○ Що називають кутами чотирикутника? ○ Які кути чотирикутника називають протилежними, а які – сусідніми? ○ Який чотирикутник називають неопуклим, а який – опуклим? ○ Сформулюйте й доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.



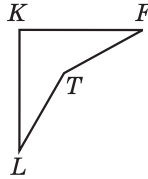
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

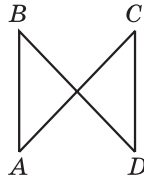
1.1. (Усно.) Які з фігур (мал. 1.4–1.7) є чотирикутниками? Назвіть опуклі та неопуклі чотирикутники.



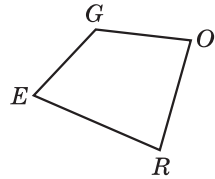
Мал. 1.4



Мал. 1.5



Мал. 1.6

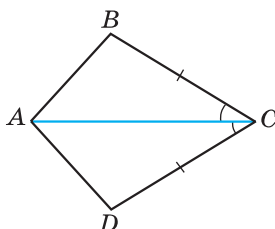


Мал. 1.7

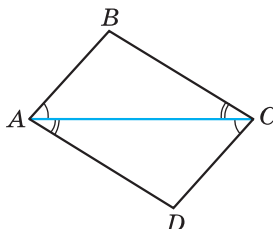
- 1.2. Назвіть пари протилежних сторін чотирикутника $EGOR$ (мал. 1.7), пари сусідніх сторін. Назвіть пари сусідніх вершин цього чотирикутника, пари протилежних вершин.
- 1.3. Накресліть чотирикутник $KLMN$. Назвіть пари його протилежних сторін, сусідніх сторін, протилежних вершин, сусідніх вершин. Проведіть діагоналі цього чотирикутника.
- 1.4. Накресліть опуклий чотирикутник $ABCD$ і неопуклий $PMLK$. Проведіть діагональ у кожному з них.
- 1.5. Чи існує чотирикутник з кутами:
 - 1) $70^\circ, 90^\circ, 100^\circ$ і 120° ; 2) $130^\circ, 60^\circ, 70^\circ$ і 100° ?
- 1.6. Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати:
 - 1) $140^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ і 70° ; 2) $120^\circ, 110^\circ, 80^\circ$ і 60° ?
- 2 1.7. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють: 1) $150^\circ, 110^\circ$ і 80° ; 2) $80^\circ, 60^\circ$ і 30° .
Яким – опуклим чи неопуклим – є кожний чотирикутник?
- 1.8. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють: 1) $20^\circ, 70^\circ$ і 80° ; 2) $120^\circ, 50^\circ$ і 40° .
Яким – опуклим чи неопуклим – є кожний чотирикутник?
- 1.9. Знайдіть периметр чотирикутника, сторони якого дорівнюють 34 мм, 2,5 см, 0,4 дм і 0,07 м.
- 1.10. Знайдіть периметр чотирикутника, сторони якого дорівнюють 0,08 м, 0,7 дм, 6,3 см і 52 мм.
- 1.11. Чи можуть усі кути чотирикутника бути:
 - 1) гострими; 2) прямими; 3) тупими?
- 1.12. Один з кутів чотирикутника дорівнює 120° , а інші – між собою рівні. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.
- 1.13. Периметр чотирикутника дорівнює 60 см, а одна з його сторін – 24 см. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника, якщо вони між собою рівні.

1.14. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 1.8) $BC = CD$ і $\angle ACB = \angle ACD$. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

1.15. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 1.9) $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle CAD$. Доведіть, що $AB = CD$.



Мал. 1.8



Мал. 1.9

3 1.16. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 4, 5, 8 і 9, а периметр чотирикутника дорівнює 65 см.

1.17. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 4, 5, 7 і 8.

1.18. Знайдіть невідомі кути чотирикутника, якщо перший з них дорівнює 90° , другий і третій відносяться як 7 : 5, а четвертий дорівнює півсумі другого та третього.

1.19. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника, периметр якого дорівнює 54 см, одна зі сторін 18 см, друга та третя відносяться як 7 : 3, а четверта дорівнює піврізниці другої та третьої.

1.20. Доведіть, що в кожному чотирикутнику є кут, не більший за 90° .

1.21. Доведіть, що в кожному чотирикутнику є кут, не менший від 90° .

1.22. Чи може кут чотирикутника бути більшим за суму інших його кутів?

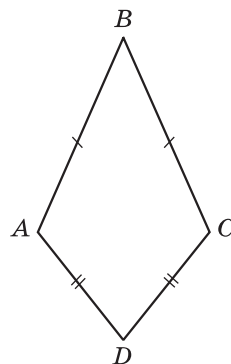
4 1.23. Побудуйте чотирикутник зі сторонами 6 см, 6 см, 3 см, 4 см та кутом 50° між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?

1.24. Побудуйте чотирикутник зі сторонами 5 см, 5 см, 4 см, 3 см та кутом 70° між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?

1.25. Опуклий чотирикутник називають *дельтоїдом*, якщо він має дві пари рівних сусідніх сторін (мал. 1.10). Доведіть, що:

- 1) діагональ BD ділить навпіл і кут B , і кут D ;
- 2) діагоналі дельтоїда взаємно перпендикулярні.

1.26. Периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 29 см, периметр трикутника ADB – 20 см, а трикутника CDB – 21 см. Знайдіть довжину діагоналі BD .



Мал. 1.10



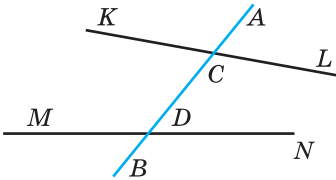
Вправи для повторення

- 1.27. Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 70° . Знайдіть градусні міри решти семи кутів.
- 1.28. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює 70° . Скільки розв'язків має задача?
- 1.29. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює 60° , а сума меншого катета й медіани, проведеної до гіпотенузи, – 10 см. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.

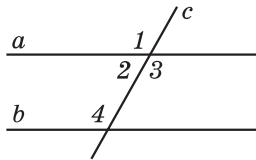


Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

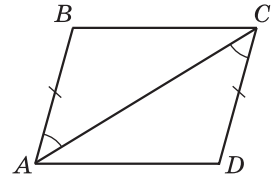
- 1.30. Прямая AB є січною для прямих KL і MN (мал. 1.11). Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів, внутрішніх різносторонніх кутів та відповідних кутів.



Мал. 1.11



Мал. 1.12



Мал. 1.13

- 1.31. Яким є взаємне розміщення прямих a і b (мал. 1.12), якщо:
- 1) $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$; 2) $\angle 1 > \angle 4$;
 - 3) $\angle 3 = 120^\circ$, $\angle 4 = 121^\circ$; 4) $\angle 2 = 60^\circ$, $\angle 4 = 119^\circ$;
 - 5) $\angle 1 = \angle 4 = 122^\circ$; 6) $\angle 3 = \angle 4$?
- 1.32. 1) Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 1.13), якщо $AB = CD$ і $\angle BAC = \angle ACD$.
- 2) Доведіть, що $BC = AD$ і $\angle BCA = \angle CAD$.
- 3) Чи паралельні прямі BC і AD ?



Життєва математика

- 1.33. Тарас і його старша сестра Аліса ведуть здоровий спосіб життя. Кілька разів на тиждень вони пробігають доріжкою навколо парку, який має форму прямокутника зі сторонами 150 і 200 м. Дівчина пробігає доріжкою 4 рази, а хлопець – тричі. Швидкість бігу Тараса – 14 км/год, Аліси – 16 км/год. Хто витрачає більше часу на тренування та на скільки? Відповідь дайте з точністю до секунди.





Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 1.34. (Всеукраїнська олімпіада з математики, 1964 р.) Знайдіть найбільше значення n , для якого n точок можна розмістити на площині так, щоб кожні три з них були вершинами прямокутного трикутника.

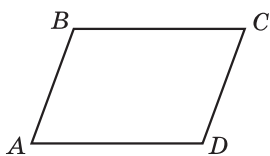
§ 2. Паралелограм, його властивості й ознаки

1. Означення паралелограма та його властивості

Паралелограмом називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.

На малюнку 2.1 зображено паралелограм $ABCD$, де $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Розглянемо властивості паралелограма.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180° .



Мал. 2.1

Справді, наприклад, кути A і B паралелограма $ABCD$ (мал. 2.1) є внутрішніми односторонніми кутами для паралельних прямих AD і BC та січної AB . Тому $\angle A + \angle B = 180^\circ$. Аналогічно цю властивість можна довести для будь-якої іншої пари сусідніх кутів паралелограма.

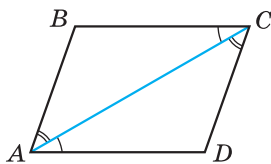
2. Паралелограм є опуклим чотирикутником.

Оскільки $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то $\angle A < 180^\circ$, $\angle B < 180^\circ$. Аналогічно $\angle C < 180^\circ$, $\angle D < 180^\circ$. Тому паралелограм – опуклий чотирикутник. ■

3. У паралелограмі протилежні сторони рівні й протилежні кути рівні.

Доведення. Розглянемо паралелограм $ABCD$ (мал. 2.2).

1) Діагональ AC розбиває його на два трикутники ABC і ADC . AC – спільна сторона цих трикутників і $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle CAB = \angle ACD$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині січною AC паралельних прямих AD і BC , AB і CD відповідно).



Мал. 2.2

2) Тоді $\triangle ABC = \triangle CDA$ (за стороною і двома прилеглими кутами). Отже, $AB = CD$, $BC = AD$ і $\angle B = \angle D$ (як відповідні елементи рівних трикутників).

3) Оскільки $\angle BAC + \angle CAD = \angle BCA + \angle DCA$, то $\angle BAD = \angle BCD$. ■

4. Периметр паралелограма $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.

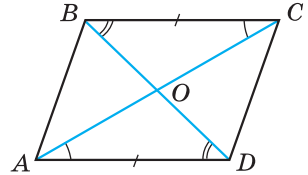
5. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Доведення. Нехай O – точка перетину діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$ (мал. 2.3).

1) $AD = BC$ (як протилежні сторони паралелограма), $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle BDA = \angle DBC$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січними AC і BD відповідно).

2) Отже, $\triangle AOD = \triangle COB$ (за стороною і двома прилеглими кутами).

3) Тоді $AO = OC$, $BO = OD$ (як відповідні сторони рівних трикутників). ■



Мал. 2.3

Приклад 1. Дано: $ABCD$ – паралелограм, AK – бісектриса кута A ,

$BK = 5$ см, $KC = 3$ см (мал. 2.4). Знайти: P_{ABCD} .

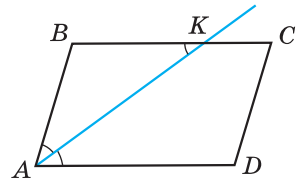
Розв'язання. 1) $BC = BK + KC = 5 + 3 = 8$ (см).

2) $\angle KAD = \angle BKA$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AK).

3) $\angle KAD = \angle KAB$ (за умовою), тоді $\angle BKA = \angle KAB$. Отже, за ознакою рівнобедреного трикутника: $\triangle ABK$ – рівнобедрений, $AB = BK = 5$ (см).

4) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(5 + 8) = 26$ (см).

Відповідь: 26 см.

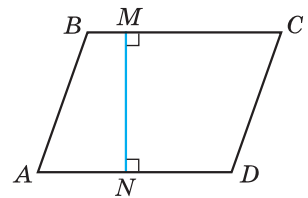


Мал. 2.4

2. Означення висоти паралелограма

Висотою паралелограма називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки сторони паралелограма до прямої, що містить протилежну сторону.

На малюнку 2.5 MN – висота паралелограма; $MN \perp AD$, $MN \perp BC$.

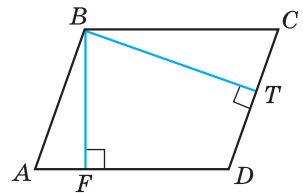


Мал. 2.5



З кожної вершини паралелограма можна провести дві висоти.

Наприклад, на малюнку 2.6 BF і BT – висоти паралелограма, проведені відповідно до сторін AD і CD .



Мал. 2.6

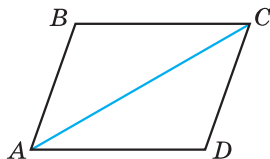
3. Ознаки паралелограма

Розглянемо ознаки паралелограма.

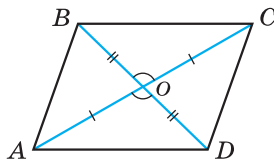
Теорема (ознаки паралелограма). Якщо в чотирикутнику: 1) дві сторони рівні й паралельні, або 2) протилежні сторони попарно рівні, або 3) діагоналі перетинаються й точкою перетину діляться навпіл, або 4) протилежні кути попарно рівні, — то чотирикутник є паралелограмом.

Доведення. 1) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$ і $AD \parallel BC$ (мал. 2.7). Проведемо діагональ AC . Розглянемо $\triangle CAD$ і $\triangle ACB$. $\angle CAD = \angle BCA$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AC). AC — спільна сторона, $AD = BC$ (за умовою). Отже, $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за двома сторонами й кутом між ними). Тоді $\angle ACD = \angle CAB$ (як відповідні). Але це різносторонні кути, що утворилися при перетині прямих AB і CD січною AC . Тому $AB \parallel CD$ (за ознакою паралельності прямих). Отже, у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно паралельні. Тому $ABCD$ — паралелограм.

2) Нехай у чотирикутнику $ABCD$: $AD = BC$ і $AB = CD$ (мал. 2.7). Проведемо діагональ AC . Тоді $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за трьома сторонами). Тому $\angle ACD = \angle CAB$, а отже, $AB \parallel CD$ (за ознакою паралельності прямих). Аналогічно доводимо, що $AD \parallel BC$. Отже, $ABCD$ — паралелограм.



Мал. 2.7



Мал. 2.8

3) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O і $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 2.8). $\angle AOD = \angle COB$ (як вертикальні). Тому $\triangle AOD = \triangle COB$ (за двома сторонами та кутом між ними). Звідси $AD = BC$. Аналогічно доводимо, що $AB = CD$. Зважаючи на п. 2 цієї теореми, приходимо до висновку, що $ABCD$ — паралелограм.

4) Нехай у паралелограмі $ABCD$: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (мал. 2.1). Оскільки $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$, то $\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360^\circ$, $2(\angle A + \angle B) = 360^\circ$; $\angle A + \angle B = 180^\circ$. Але $\angle A$ і $\angle B$ — внутрішні односторонні кути для прямих AD і BC та січної AB . Тому $AD \parallel BC$ (за ознакою паралельності прямих). Аналогічно доводимо, що $AB \parallel CD$. Отже, $ABCD$ — паралелограм. ■

Приклад 2. У чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$. Довести, що $ABCD$ — паралелограм.

Доведення. Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник (мал. 2.7).

1) Розглянемо $\triangle CAD$ і $\triangle ACB$. AC — їхня спільна сторона, $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$ (за умовою).

2) Отже, $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за двома сторонами та кутом між ними).

- 3) Тому $AB = CD$. Але тоді в чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно рівні, тому він є паралелограмом. ■

Знайдіть кілька інших способів доведення цієї задачі.

А ще раніше...

Про деякі види чотирикутників (квадрати, прямокутники, рівнобічні та прямокутні трапеції) знали ще давньоєгипетські та вавилонські математики.

Термін «паралелограм» – грецького походження, вважають, що його ввів Евклід (близько 300 р. до н. е.). Про паралелограм і деякі його властивості знали учні школи Піфагора («піфагорійці»).

У «Началах» Евкліда доведено таку теорему: *у паралелограмі протилежні сторони рівні і протилежні кути рівні, а діагональ поділяє його навпіл*, – але не згадується про те, що точка перетину діагоналей паралелограма ділить кожну з них навпіл.

Евклід також не згадує ані про прямокутник, ані про ромб.

Повну теорію паралелограмів було розроблено лише в кінці середньовіччя, а в підручниках вона з'явилася в XVII ст. Усі теореми та властивості паралелограма в цих підручниках ґрунтувалися на аксіомі паралельності Евкліда.

Термін «діагональ» (з грец. «діа» – «через», «гоніос» – «кут») – відрізок, що сполучає вершини кутів.

Евклід, як і більшість математиків того часу, для назви відрізка, що сполучає протилежні вершини чотирикутника, зокрема прямокутника, використовував інший термін – «діаметр». Це можна пояснити тим, що перші геометри свої міркування ґрунтували на вписаних у коло прямокутниках. У середні віки для назви згаданого відрізка використовували обидва терміни. Лише у XVIII ст. термін «діагональ» став загальноживим.

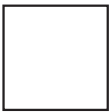
- Яку фігуру називають паралелограмом? ○ Сформулюйте й доведіть властивості паралелограма. ○ Що називають висотою паралелограма? ○ Сформулюйте й доведіть ознаки паралелограма.



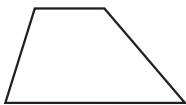
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

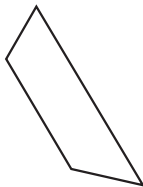
2.1. Серед чотирикутників, зображених на малюнках 2.9–2.14, укажіть паралелограми.



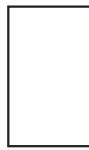
Мал. 2.9



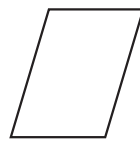
Мал. 2.10



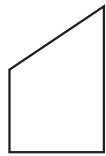
Мал. 2.11



Мал. 2.12



Мал. 2.13



Мал. 2.14

2.2. Накресліть паралелограм $ABCD$, у якого кут D тупий.

2.3. Накресліть паралелограм $KLMN$, у якого кут K гострий.

2.4. (Усно.) Одна зі сторін паралелограма дорівнює 6 см. Яка довжина сторони, що їй протилежна?

2.5. Один з кутів паралелограма дорівнює 50° . Знайдіть інші його кути.

2.6. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них дорівнює 110° .

2 2.7. Знайдіть периметр паралелограма, у якого одна сторона дорівнює 12 см, а друга – на 3 см більша за неї.

2.8. Знайдіть периметр паралелограма, у якого одна сторона дорівнює 18 см, а друга – удвічі від неї менша.

2.9. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище видатної української жінки-математика, науковиці, докторки фізико-математичних наук. Дізнайтеся з інтернету про її життєвий і творчий шлях.



Знайдіть кути A і B паралелограма $ABCD$, якщо:	$\angle A$	$\angle B$
$\angle A + \angle C = 120^\circ$	І	К
кут A на 20° більший за кут B	Е	Ч
кут A утричі менший від кута B	В	О
$\angle A : \angle B = 3 : 2$	Н	Р

45°	60°	72°	80°	100°	108°	120°	135°

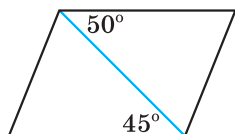
2.10. Знайдіть усі кути паралелограма, якщо:

- сума двох з них дорівнює 200° ;
- один з них на 40° менший від другого;
- один з них удвічі більший за другий;
- градусні міри двох з них відносяться як $4 : 5$.

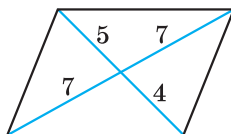
2.11. У паралелограмі $ABCD$ $\angle BAD = 80^\circ$, $\angle ACD = 50^\circ$. Знайдіть $\angle ACB$ і $\angle ABC$.

2.12. У паралелограмі $ABCD$ $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle BCA = 40^\circ$. Знайдіть кути паралелограма.

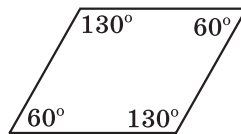
2.13. (Усно.) Які помилки допущено в зображенні паралелограма на малюнках 2.15–2.17?



Мал. 2.15



Мал. 2.16



Мал. 2.17

2.14. Периметр паралелограма дорівнює 40 см. Знайдіть його сторони, якщо:

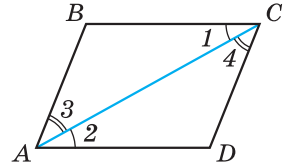
- одна з них на 4 см більша за другу;
- вони відносяться як $3 : 7$.

2.15. Периметр паралелограма дорівнює 36 дм. Знайдіть його сторони, якщо:

- 1) одна з них на 2 дм менша від другої;
- 2) одна з них у 5 разів більша за другу.

2.16. O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайдіть діагональ AC , якщо $BD = 20$ см, $AB = 15$ см, а периметр трикутника AOB дорівнює 32 см.

2.17. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 2.18) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 2.18

2.18. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 2.18). Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.

2.19. Побудуйте паралелограм за двома сторонами й кутом між ними.

2.20. Побудуйте паралелограм за двома сторонами та діагоналлю.

3 **2.21.** Бісектриса кута паралелограма перетинає його сторону під кутом 48° . Знайдіть кути паралелограма.

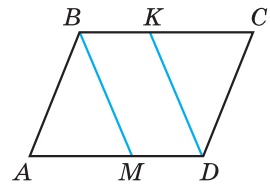
2.22. У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A ділить сторону BC на відрізки $BM = 5$ см і $MC = 7$ см. Знайдіть периметр паралелограма.

2.23. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 4$ см, $BC = 12$ см. Бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці P . Знайдіть BP і PC .

2.24. Побудуйте паралелограм за стороною і діагоналями.

2.25. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями і кутом між ними.

2.26. На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ (мал. 2.19) позначено точки M і K так, що $\angle ABM = \angle CDK$. Доведіть, що $BMDK$ – паралелограм.



Мал. 2.19

2.27. На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ (мал. 2.19) позначено точки M і K так, що $AM = KC$. Доведіть, що $BMDK$ – паралелограм.

2.28. Доведіть, що бісектриси двох сусідніх кутів паралелограма взаємно перпендикулярні.

2.29. У паралелограмі гострий кут дорівнює 60° . Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, ділить протилежну сторону на відрізки 3 см і 5 см, починаючи від вершини гострого кута. Знайдіть периметр паралелограма.

2.30. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 6$ см, $\angle B = 120^\circ$. Висота BK ділить сторону AD на два однакових відрізки. Знайдіть периметр паралелограма.

2.31. У паралелограмі $ABCD$ з вершини гострого кута A проведено висоти AL і AK , $\angle LAK = 140^\circ$. Знайдіть кут C паралелограма.

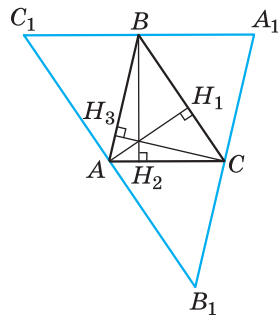
2.32. У паралелограмі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BM і BN , $\angle MBN = 70^\circ$. Знайдіть кут D паралелограма.

- 4** 2.33. Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ ділить сторону AD на два відрізки AK і KD так, що $AK - KD = 1$ см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.
- 2.34. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на два відрізки BK і KC так, що $BK : KC = 3 : 7$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 78 см.
- 2.35. Два кути паралелограма відносяться як $5 : 7$. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини:
1) тупого кута; 2) гострого кута.
- 2.36. Один з кутів паралелограма на 12° більший за другий. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини:
1) гострого кута; 2) тупого кута.



- 2.37. Доведіть, що три висоти трикутника або їхні продовження перетинаються в одній точці (ортоцентрі трикутника).

Доведення. 1) Нехай AH_1 , BH_2 , CH_3 – висоти гострокутного трикутника ABC (мал. 2.20). Проведемо через вершини трикутника прямі, паралельні протилежним сторонам. Одержимо трикутник $A_1B_1C_1$. Чотирикутник ABA_1C – паралелограм (за побудовою). Тому $BA_1 = AC$. Аналогічно ACB_1C_1 – паралелограм і $C_1B = AC$. Отже, $C_1B = BA_1$, точка B – середина A_1C_1 . Оскільки $BH_2 \perp AC$ і $AC \parallel A_1C_1$, то $BH_2 \perp A_1C_1$. Тому BH_2 належить серединному перпендикуляру до сторони A_1C_1 трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно AH_1 і CH_3 належать серединним перпендикулярам до двох інших сторін цього трикутника. Як відомо, серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці. Отже, AH_1 , BH_2 і CH_3 перетинаються в одній точці.



Мал. 2.20

2) Якщо $\triangle ABC$ – прямокутний, наприклад $\angle C = 90^\circ$, то очевидно, що три висоти перетинаються в точці C .

3) Якщо $\triangle ABC$ – тупокутний, то продовження трьох висот трикутника перетинаються в одній точці. Доведення аналогічне до доведення у п. 1. ■



Вправи для повторення

- 2.38. Знайдіть другий гострий кут прямокутного трикутника, якщо перший дорівнює: 1) 20° ; 2) 65° .
- 2.39. Дві сторони трикутника дорівнюють 7,2 см і 2,5 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?
- 2.40. Зовнішній кут трикутника у 2 рази більший за один з внутрішніх кутів, не суміжний з ним. Доведіть, що трикутник є рівнобедреним.
- 2.41. Чи можна побудувати чотирикутник зі сторонами 6 см, 6 см, 4 см і 2 см та кутом 60° між рівними сторонами?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 2.42. Знайдіть периметр і площу прямокутника, сторони якого дорівнюють: 1) 5 см і 7 см; 2) 2 дм і 14 см.



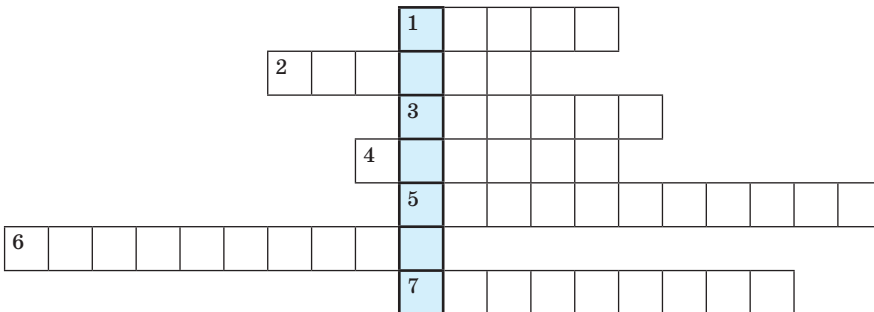
Життєва математика

- 2.43. 1) Фермерка зібрала урожай зерна та засипала його в засік, що має форму прямокутного паралелепіпеда 12 м завдовжки і 8 м завширшки. Зерно насипано в засік до висоти 2,5 м. Щоб дізнатися, скільки важить усе зерно, зважили ящик 0,5 м завдовжки, 0,5 м завширшки і 0,4 м заввишки, ущерть наповнений зерном. Скільки важило зерно в засіку, якщо зерно в ящику важило 80 кг?
2) Яким буде виторг фермерки від продажу всього зерна за гуртовою ціною, що складає 6000 грн за 1 т?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 2.44. Видатні українці. Запишіть по горизонталях прізвища видатних українців (за потреби використайте додаткову літературу та інтернет), й отримаєте у виділеному стовпчику ім'я давньогрецького філософа, математика, релігійного та політичного діяча.



1. Видатний український науковець у галузі зварювальних процесів, доктор технічних наук, Герой України.
2. Українська поетеса, публіцистка, діячка ОУН, жінка-борець за незалежність України у XX столітті.
3. Український письменник, поет, публіцист, перекладач, учений, громадський і політичний діяч (1856–1916).
4. Відома спортсменка, рекордсменка України за кількістю олімпійських нагород.
5. Політичний діяч і публіцист, організатор української науки; Голова Центральної Ради Української Народної Республіки.
6. Українська народна художниця в жанрі «наївного мистецтва», національна легенда України.
7. Українська акторка театру та кіно. Народна артистка України, почесна громадянка Києва.

§ 3. Прямокутник і його властивості

1. Означення та властивості прямокутника

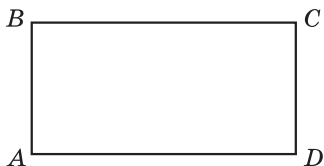
Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі (мал. 3.1).

Оскільки прямокутник є паралелограмом, то він має всі *властивості паралелограма*.

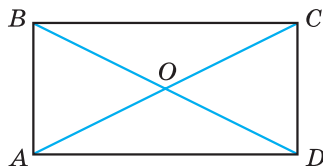
1. У прямокутнику протилежні сторони рівні.
2. Периметр прямокутника $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
3. Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл.

Крім цього, прямокутник має ще *властивості*.

4. Діагоналі прямокутника рівні.



Мал. 3.1



Мал. 3.2

Доведення. Нехай дано прямокутник $ABCD$ (мал. 3.2). $\triangle ACD = \triangle DBA$ (за двома катетами). Тому $AC = BD$. ■

5. Точка перетину діагоналей прямокутника рівновіддалена від усіх його вершин.

Оскільки $AC = BD$, а $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 3.2), то очевидно, що $AO = BO = OC = OD$.

Приклад 1. Діагональ ділить кут прямокутника у відношенні 2 : 3.

- Знайти кут між діагоналями цього прямокутника.
- **Розв'язання.** 1) Нехай $\angle ADO : \angle ODC = 2 : 3$ (мал. 3.2).
- Позначимо $\angle ADO = 2x$, $\angle ODC = 3x$.
- Тоді $2x + 3x = 90^\circ$, $x = 18^\circ$.
- Тому $\angle ADO = 2 \cdot 18 = 36^\circ$; $\angle ODC = 3 \cdot 18 = 54^\circ$.
- 2) $\triangle OCD$ – рівнобедрений (бо $DO = OC$). Тому $\angle OCD = \angle ODC = 54^\circ$.
- У $\triangle OCD$: $\angle COD = 180^\circ - 2 \cdot 54^\circ = 72^\circ$. Отже, кут між діагоналями цього прямокутника дорівнює 72° .
- **Відповідь:** 72° .

2. Ознаки прямокутника

Розглянемо ознаки прямокутника.



Теорема (ознаки прямокутника). Якщо в паралелограмі: 1) усі кути рівні, або 2) один кут прямий, або 3) діагоналі рівні, – то паралелограм є прямокутником.

Доведення. 1) Оскільки всі кути паралелограма рівні, а їхня сума дорівнює 360° , то кожний з них дорівнює $360^\circ : 4 = 90^\circ$. А тому паралелограм є прямокутником.

2) Нехай кут A паралелограма $ABCD$ прямий (мал. 3.1). Тоді $\angle C = \angle A = 90^\circ$, $\angle B = \angle D = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Отже, усі кути паралелограма прямі, а тому він є прямокутником.

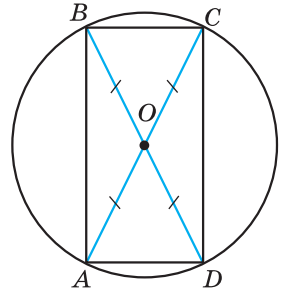
3) Нехай у паралелограма $ABCD$ діагоналі AC і BD рівні (мал. 3.2). AD – спільна сторона трикутників ABD і DCA . Отже, $\triangle ABD = \triangle DCA$ (за трьома сторонами). Тому $\angle BAD = \angle CDA$. Але ж $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BCD = \angle BAD$. У паралелограма всі кути рівні між собою. Тому він є прямокутником (за п. 1 цієї теореми). ■

Приклад 2. У колі із центром O проведено діаметри AC і BD (мал. 3.3). Визначити вид чотирикутника $ABCD$.

Розв'язання. 1) Оскільки $AO = OC$, $BO = OD$ (як радіуси), то, за ознакою паралелограма, маємо, що $ABCD$ – паралелограм.

2) Оскільки $AC = BD$ (як діаметри), то, використовуючи ознаку прямокутника, маємо, що паралелограм $ABCD$ є прямокутником.

Відповідь: прямокутник.



Мал. 3.3



Яку фігуру називають прямокутником? ○ Сформулюйте й доведіть властивості прямокутника. ○ Сформулюйте й доведіть ознаки прямокутника.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

3.1. Які із чотирикутників, зображених на малюнках 3.4–3.8, є прямокутниками?



Мал. 3.4



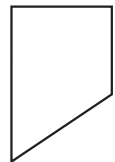
Мал. 3.5



Мал. 3.6



Мал. 3.7



Мал. 3.8

3.2. У прямокутнику $ABCD$ діагональ AC дорівнює 5 см. Яка довжина діагоналі BD ?

3.3. Сторони прямокутника дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть його периметр.

3.4. Знайдіть периметр прямокутника, сторони якого дорівнюють 3 см і 4 см.

3.5. Якщо чотирикутник є прямокутником, то його діагоналі між собою рівні. Чи правильне обернене твердження? Наведіть приклад.

2 3.6. Сторона BC прямокутника $ABCD$ дорівнює 8 см, а діагональ BD – 12 см. Знайдіть периметр трикутника BOC , де O – точка перетину діагоналей прямокутника.

3.7. O – точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. $AC = 12$ см, периметр трикутника AOB дорівнює 16 см. Знайдіть сторону AB .

3.8. (Усно.) Що можна сказати про вид паралелограма, якщо відомо, що:
1) жоден з його кутів не є гострим;
2) жоден з його кутів не є тупим;
3) він має три рівних між собою кутів?

 3.9. Доведіть, що коли в чотирикутнику три кути прямі, то цей чотирикутник – прямокутник.

 3.10. Доведіть, що коли в чотирикутнику всі кути рівні, то цей чотирикутник – прямокутник.

3.11. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище першої олімпійської чемпіонки незалежної України.



Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 40 см. Знайдіть сторони AB і BC цього прямокутника, якщо:	AB	BC
AB на 2 см більша за BC	А	Ю
$AB : BC = 2 : 3$	Л	Б

12 см	11 см	9 см	8 см

3.12. Периметр прямокутника дорівнює 50 см. Знайдіть його сторони, якщо відомо, що:

- одна з них на 5 см менша від другої;
- сторони відносяться як 4 : 1.

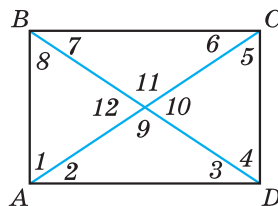
3.13. (Усно.) На малюнку 3.9 зображено прямокутник $ABCD$. Знайдіть усі рівні між собою кути.

3.14. Знайдіть за малюнком 3.9:

- $\angle 3$, якщо $\angle 8 = 50^\circ$;
- $\angle 2$, якщо $\angle 10 = 41^\circ$.

3.15. Знайдіть за малюнком 3.9:

- $\angle 5$, якщо $\angle 2 = 40^\circ$;
- $\angle 12$, якщо $\angle 3 = 32^\circ$.



Мал. 3.9

3.16. Діагональ прямокутника ділить кут прямокутника на два кути, один з яких на 20° більший за другий. Знайдіть ці кути.



3.17. Доведіть, що навколо прямокутника можна описати коло.

3.18. Знайдіть кут між меншою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він:

- 1) на 15° менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони;
- 2) на 50° менший від кута між діагоналями, який лежить проти більшої сторони.

3.19. Знайдіть кут між більшою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він:

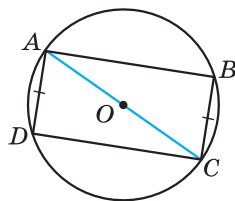
- 1) на 90° менший від кута між діагоналями, який лежить проти більшої сторони;
- 2) на 40° менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони.

3.20. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O , E – середина AB , $\angle CAB = 70^\circ$. Знайдіть $\angle DOE$.

3.21. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O . OP – бісектриса трикутника AOB , $\angle DOP = 130^\circ$. Знайдіть $\angle CAB$.

3.22. У паралелограмі $ABCD$ з гострим кутом A діагоналі перетинаються в точці O . На відрізках AO і OC позначено точки M і N так, що $OM = OB$, $ON = OD$. Доведіть, що $BMDN$ – прямокутник.

3.23. Точки B і D належать колу із центром O , AC – діаметр кола, $AD = BC$ (мал. 3.10). Доведіть, що $ABCD$ – прямокутник.



Мал. 3.10

3.24. Перпендикуляри, проведені з точки перетину діагоналей прямокутника до двох його сусідніх сторін, дорівнюють 4 см і 9 см. Визначте периметр прямокутника.

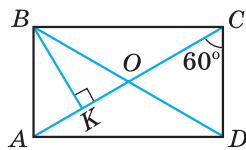
3.25. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону навпіл. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його більша сторона дорівнює 20 см.

3.26. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону навпіл. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його менша сторона дорівнює 8 дм.



3.27. На малюнку 3.11 $ABCD$ – прямокутник, $BK \perp AC$, $\angle ACD = 60^\circ$.

- 1) $OK = a$. Знайдіть: DB і AB ;
- 2) $AC = m$. Знайдіть: AK і CD .



Мал. 3.11

3.28. На малюнку 3.11 $ABCD$ – прямокутник, $BK \perp AC$, $\angle ACD = 60^\circ$, $AB = b$. Знайдіть BD і OK .

3.29. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою $BC = 35$ см вписано прямокутник $KLMN$ так, що точки K і L лежать на гіпотенузі трикутника, а точки M і N – на катетах. $KL : KN = 3 : 2$. Знайдіть периметр прямокутника.

- 3.30.** У рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 20 см, вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут, а вершина протилежного кута належить гіпотенузі. Знайдіть периметр прямокутника.



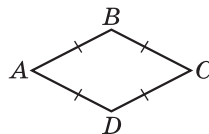
Вправи для повторення

- 3.31.** З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ проведено висоту BK . Знайдіть кути паралелограма, якщо $BK = \frac{1}{2} AB$.
- 3.32.** 1) Градусна міра одного з кутів трикутника є середнім арифметичним двох інших кутів. Знайдіть цей кут.
2) Градусна міра одного з кутів чотирикутника є середнім арифметичним трьох інших кутів. Знайдіть цей кут.
- 3.33.** Через точку P , що належить внутрішній області кута ABC , проведіть пряму так, щоб її відрізок, який лежить між сторонами кута, ділився точкою P навпіл.



Піготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 3.34.** Дано: $AB = BC = CD = DA$ (мал. 3.12).
Довести: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

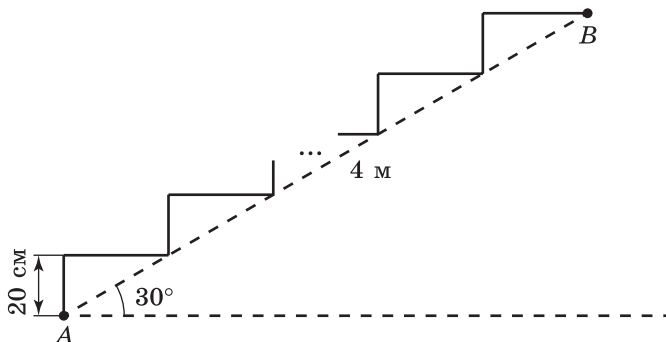


Мал. 3.12



Життєва математика

- 3.35.** Сходовий марш сполучає точки A і B , відстань між якими – 4 м. Скільки сходінок на сходовому марші, якщо кут нахилу сходів дорівнює 30° , висота сходинки – 20 см?



Цікаві задачі – поміркують одначе

- 3.36.** Чи можна розрізати квадрат розміром 6×6 на прямокутники розміром 1×4 ?

§ 4. Ромб і його властивості

1. Означення ромба та його властивості

Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні (мал. 4.1).

Оскільки ромб є паралелограмом, то він має всі *властивості паралелограма*.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів ромба дорівнює 180° .
2. У ромба протилежні кути рівні.
3. Діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл.
4. Периметр ромба $P_{ABCD} = 4AB$.

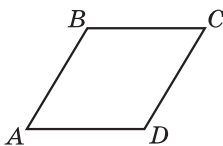
Крім того, ромб має ще таку *властивість*.

5. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні й ділять його кути навпіл.

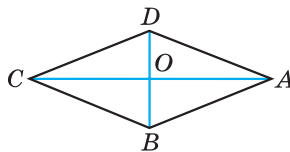
Доведення. Нехай AC і BD – діагоналі ромба $ABCD$ (мал. 4.2), O – точка перетину діагоналей.

1) Оскільки $AB = AD$ і $DO = OB$, то AO – медіана рівнобедреного трикутника ABD , проведена до основи BD . Тому AO є також висотою і бісектрисою трикутника ABD .

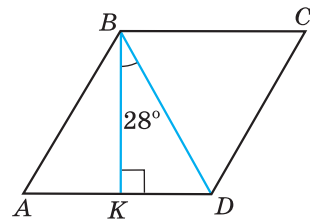
2) Отже, $AC \perp BD$ і $\angle DAO = \angle BAO$. ■



Мал. 4.1



Мал. 4.2



Мал. 4.3

Аналогічно можна довести, що діагональ AC ділить навпіл кут DCB , а діагональ BD ділить навпіл кути ABC і ADC .

Приклад 1. Кут між висотою і діагоналлю ромба, проведеними з однієї вершини, дорівнює 28° . Знайти кути ромба.

Розв'язання. BD – діагональ ромба $ABCD$, а BK – його висота (мал. 4.3), $\angle KBD = 28^\circ$ (за умовою).

- 1) У $\triangle BKD$ $\angle BDK = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$.
 - 2) Оскільки DB ділить кут $\angle ADC$ навпіл, то $\angle ADC = 2 \cdot 62^\circ = 124^\circ$.
 - 3) Тоді $\angle ABC = \angle ADC = 124^\circ$; $\angle A = \angle C = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$.
- Відповідь:* $124^\circ, 56^\circ, 124^\circ, 56^\circ$.

2. Ознаки ромба

Розглянемо *ознаки ромба*.

Т Теорема (ознаки ромба). Якщо в паралелограмі: 1) дві сусідні сторони рівні, або 2) діагоналі перетинаються під прямим кутом, або 3) діагональ ділить навпіл кути паралелограма, – то паралелограм є ромбом.

Доведення. 1) Нехай $ABCD$ – паралелограм (див. мал. 4.2). Оскільки $AB = AD$ (за умовою) і $AB = CD$, $AD = BC$ (за властивістю паралелограма), то $AB = AD = BC = CD$. Отже, $ABCD$ – ромб.

2) Нехай $AC \perp BD$ (мал. 4.2). Оскільки $OB = OD$ (за властивістю паралелограма), то $\triangle AOB = \triangle AOD$ (за двома катетами). Тому $AB = AD$. За п. 1 цієї теореми $ABCD$ – ромб.

3) Діагональ DB ділить навпіл кут D паралелограма $ABCD$, тобто $\angle ADB = \angle BDC$ (за умовою). Оскільки паралельні прямі AB і DC перетнули січною DB , то $\angle ABD = \angle BDC$ (як внутрішні різносторонні). Отже, $\angle ADB = \angle ABD$. Тому, за ознакою рівнобедреного трикутника, $\triangle ABD$ – рівнобедрений і $AD = AB$. За п. 1 цієї теореми $ABCD$ – ромб. ■

Приклад 2. Довести, що коли в чотирикутнику всі сторони рівні, то цей чотирикутник – ромб.

Доведення. Нехай $AB = BC = CD = DA$ (див. мал. 4.1).

1) Оскільки в чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно рівні, то, за ознакою паралелограма, маємо, що $ABCD$ – паралелограм.

2) У паралелограма $ABCD$ сусідні сторони рівні. Тому $ABCD$ – ромб (за ознакою ромба). ■

А ще раніше...

Слово «ромб» грецького походження, у давнину воно означало тіло, що обертається, – веретено, дзигу. Ромб тоді пов'язували з перерізом веретена, на яке намотано нитки.

У «Началах» Евкліда термін «ромб» трапляється лише один раз, а властивості ромба Евклід узагалі не розглянув.



В українській вишивці ромб – один із десяти головних символів, які наші предки споконвіку вишивали на своїх сорочках.

У давніх віруваннях ромб – це символ родючості, адже за формою він нагадує два трикутники, чоловічого та жіночого начал.

Ромб (із крапкою посередині) є символом засіяного поля, означає багатство, достаток і добробут. Головний реманент українців-хліборобів – борона, якою саме й готували поле до сівби, має форму ромба. Ромбоподібні узори вишивали на весільних рушниках і на весільному одязі. Одяг із вишитими ромбами молоді жінки при надії мала носити аж до народження дитини. Адже цей символ слугував сильним оберегом.

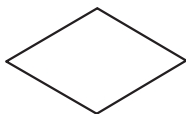


- Яку фігуру називають ромбом? ○ Сформулюйте й доведіть властивості ромба.
○ Сформулюйте й доведіть ознаки ромба.

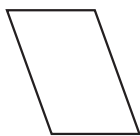


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 4.1. (Усно.) Які із чотирикутників на малюнках 4.4–4.8 є ромбами?



Мал. 4.4



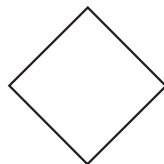
Мал. 4.5



Мал. 4.6

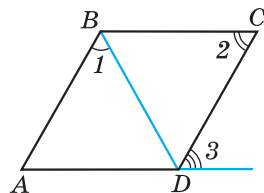


Мал. 4.7



Мал. 4.8

- 4.2. Накресліть ромб $ABCD$, у якого кут B тупий.
4.3. Накресліть ромб $ABCD$, у якого кут A гострий.
4.4. Периметр ромба дорівнює 24 см. Знайдіть його сторону.
4.5. Сторона ромба дорівнює 4 дм. Знайдіть його периметр.
4.6. Гострий кут ромба дорівнює 40° . Який кут утворює діагональ, проведена із цього кута, зі стороною ромба?
4.7. Тупий кут ромба дорівнює 130° . Який кут утворює діагональ, проведена із цього кута, зі стороною ромба?
4.8. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 60° . Знайдіть тупий кут ромба.
4.9. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 20° . Знайдіть гострий кут ромба.
- 2** 4.10. У ромбі $ABCD$ кут A дорівнює 36° . Знайдіть кути трикутника AOB , де O – точка перетину діагоналей.
4.11. O – точка перетину діагоналей ромба $ABCD$, $\angle B = 118^\circ$. Знайдіть кути трикутника BOC .
4.12. Сума довжин трьох сторін ромба дорівнює 21 см. Знайдіть його периметр.
4.13. Сума довжин двох сторін ромба дорівнює 16 см. Знайдіть периметр ромба.
4.14. $ABCD$ – ромб, $\angle 2 = 66^\circ$ (мал. 4.9). Знайдіть $\angle 1$.
4.15. $ABCD$ – ромб, $\angle 1 = 58^\circ$ (мал. 4.9). Знайдіть $\angle 2$.
4.16. $ABCD$ – ромб, $\angle 1 = 55^\circ$ (мал. 4.9). Знайдіть $\angle 3$.
4.17. $ABCD$ – ромб, $\angle 3 = 50^\circ$ (мал. 4.9). Знайдіть $\angle 1$.
4.18. У ромбі $ABCD$ $AB = BD$. Знайдіть кути ромба.
4.19. (Усно.) Які спільні властивості мають ромб і паралелограм?
4.20. Знайдіть кути ромба, якщо:
1) сума двох його кутів дорівнює 80° ;
2) один з них на 20° більший за другий.



Мал. 4.9

4.21. Знайдіть кути ромба, якщо:

- 1) сума двох його кутів дорівнює 210° ;
- 2) один з них на 50° менший від другого.

4.22. (Усно.) Чи правильні твердження:

- 1) якщо в чотирикутнику діагоналі перпендикулярні, то він є ромбом;
- 2) якщо в чотирикутнику діагоналі не перпендикулярні, то він не може бути ромбом;
- 3) існує ромб, який є прямокутником;
- 4) жоден прямокутник не є ромбом?

3 4.23. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 10° .

4.24. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, які відносяться як $2 : 3$.

4.25. Побудуйте ромб:

- 1) за стороною і діагоналлю; 2) за діагоналями.

4.26. Побудуйте ромб за стороною і кутом.

4.27. У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BM і BN . Доведіть, що $BM = BN$.

4.28. У ромбі $ABCD$ з вершин тупих кутів проведено висоти BK і DL . Доведіть, що $BK = DL$.

4.29. Висоти, проведені з вершини гострого кута ромба, утворюють між собою кут 110° . Знайдіть кути ромба.

4.30. Висоти, проведені з вершини тупого кута ромба, утворюють між собою кут 50° . Знайдіть кути ромба.

4 4.31. Діагональ ромба, проведена з вершини тупого кута, утворює з висотою, проведеною із цієї самої вершини, кут 30° . Менша діагональ ромба дорівнює a см. Знайдіть:

- 1) кути ромба; 2) периметр ромба.

4.32. У ромбі висота, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону ромба навпіл. Знайдіть: 1) кути ромба;

- 2) периметр ромба, якщо його менша діагональ дорівнює b см.

4.33. На діагоналі AC ромба $ABCD$ позначено точки M і N такі, що $AM = CN$. Доведіть, що чотирикутник $DMBN$ є ромбом (розгляньте два випадки розміщення точок M і N).

4.34. Доведіть, що середини сторін прямокутника є вершинами ромба.

4.35. У рівносторонній трикутник ABC вписано ромб $AMNK$ так, що трикутник і ромб мають спільний кут A , а точка N лежить на стороні BC . Знайдіть периметр трикутника, якщо периметр ромба дорівнює 40 см.



Вправи для повторення

4.36. Сторони паралелограма відносяться як $5 : 2$. Знайдіть периметр паралелограма, якщо різниця цих сторін дорівнює 15 см.

- 4.37. Один з кутів трикутника дорівнює сумі двох інших. Знайдіть найбільшу сторону цього трикутника, якщо медіана, проведена до неї, дорівнює 5 см.
- 4.38. Периметр трикутника дорівнює $2p$ см. Чи може одна з його сторін дорівнювати:
1) $(p - 1)$ см; 2) p см; 3) $(p + 1)$ см?
- 4.39. У чотирикутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає бісектриси кутів B і D під прямим кутом. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 4.40. Знайдіть периметр і площу квадрата, сторона якого дорівнює:

- 1) 5 см; 2) 2,1 дм; 3) $\frac{3}{4}$ м; 4) $1\frac{1}{2}$ дм.



Життєва математика

- 4.41. Кімната в будинку Іщуків має 5 м завдовжки, 3,5 м завширшки і 3 м заввишки. Площа дверей і вікон становить $\frac{1}{6}$ частину від усієї площі стін.
- 1) Скільки рулонів шпалер потрібно, щоб обклеїти цю кімнату, якщо довжина рулону становить 10 м, а ширина – 0,5 м?
- 2) Скільки коштів витратить родина на шпалери, якщо один рулон коштує 180 грн? Врахуйте, що, якщо купувати шпалери на суму понад 1000 грн, магазин робить знижку 5 %.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

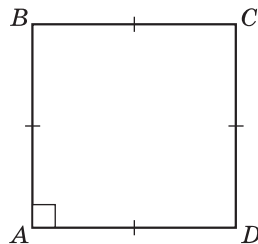
- 4.42. (Київська міська олімпіада, 1987 р.) Вписане в трикутник ABC коло дотикається до сторони BC у точці K . Доведіть, що відрізок AK довший за діаметр кола.

§ 5. Квадрат і його властивості

1. Означення та властивості квадрата

Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні.

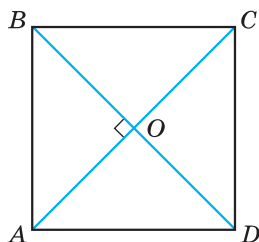
На малюнку 5.1 зображено квадрат $ABCD$. Прямокутник є паралелограмом, тому і квадрат – паралелограм, у якого всі сторони рівні, тобто він є і ромбом. Отже, квадрат має властивості прямокутника та ромба.



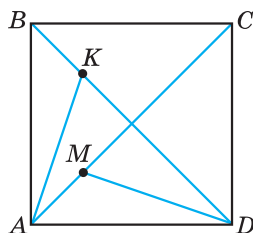
Мал. 5.1

Сформулюємо властивості квадрата.

1. Усі кути квадрата прямі.
2. Периметр квадрата $P_{ABCD} = 4AB$.
3. Діагоналі квадрата між собою рівні (мал. 5.2).
4. Діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні й точкою перетину діляться навпіл (мал. 5.2).
5. Діагоналі квадрата ділять його кути навпіл, тобто утворюють кути 45° зі сторонами квадрата (мал. 5.2).
6. Точка перетину діагоналей квадрата рівновіддалена від усіх його вершин: $AO = BO = CO = DO$.



Мал. 5.2



Мал. 5.3

Приклад 1. Точки K і M належать відповідно діагоналям BD і AC квадрата $ABCD$, причому $AM = \frac{1}{4}AC$, $BK = \frac{1}{4}BD$. Доведіть, що

$\triangle ADM = \triangle BAK$ (мал. 5.3).

Доведення. 1) $\angle MAD = \angle ABK = 45^\circ$, $AD = AB$ (як сторони квадрата).

2) Оскільки $AC = BD$ (як діагоналі квадрата) і $AM = \frac{1}{4}AC$, $BK = \frac{1}{4}BD$, то $AM = BK$.

3) Тому $\triangle ADM = \triangle BAK$ (за двома сторонами та кутом між ними). ■

2. Ознаки квадрата

Розглянемо ознаки квадрата.



Теорема (ознаки квадрата). 1) Якщо діагоналі прямокутника взаємно перпендикулярні, то він є квадратом. 2) Якщо діагоналі ромба між собою рівні, то він є квадратом.

Доведення. 1) Прямокутник є паралелограмом, а паралелограм із взаємно перпендикулярними діагоналями є ромбом. Отже, у заданого прямокутника всі сторони рівні, а тому він є квадратом.

2) Ромб є паралелограмом, а паралелограм з рівними діагоналями є прямокутником. Отже, у розглядуваного ромба всі кути прямі, а тому він є квадратом. ■

- Приклад 2.** Доведіть, що коли в чотирикутнику всі сторони рівні й усі кути рівні, то цей чотирикутник – квадрат.
- Доведення.** 1) Оскільки в чотирикутнику всі кути рівні, то, за ознакою прямокутника, він є прямокутником.
- 2) Оскільки в прямокутника всі сторони рівні, то він є квадратом. ■

А ще раніше...

Термін «квадрат» походить від латинського *quadratum* (*quadrate* – зробити чотирикутним).

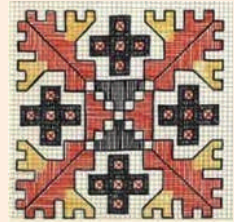
Відомий історик математики Д. Д. Мордухай-Болтовський (1876–1952) писав: «Першим чотирикутником, з яким ознайомилася геометрія, був квадрат».



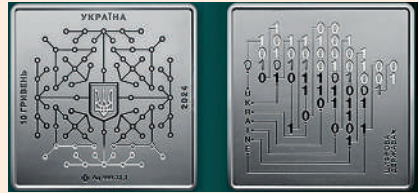
Часто в українській вишивці трапляється й квадрат.

Наші предки ототожнювали квадрат із земним началом, із символом родючості. Квадрат популярний надто в чоловічих вишиванках, перехрещений квадрат означає енергію землі.

Це символ магічного числа 4, що позначає матерію. Символізує чотири пори року, сторони світу, частини доби, життєві цикли. Це символ Сонця, Творця, чоловічого начала. Квадрат є символом простору, ізольованого від лихих помислів. Він мав захищати господарів від різних зурочень.



Національний банк України 13 грудня 2024 року ввів у обіг пам'ятну срібну монету «Цифрова держава». Це монета, номіналом 10 гривень, має форму квадрата і присвячена досягненням України у сфері цифрових технологій та інновацій. На аверсі монети зображено малий Державний Герб України, оточений електронною мережею. На реверсі – схематична карта України, створена із цифр двійкового коду, у якому зашифрована назва *Ukraine*.



Яку фігуру називають квадратом? ○ Сформулюйте властивості квадрата. ○ Сформулюйте й доведіть ознаки квадрата.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 5.1. Периметр квадрата дорівнює 24 см. Знайдіть його сторону.
- 5.2. Сторона квадрата дорівнює 5 дм. Знайдіть його периметр.
- 5.3. (Усно.) На малюнку 5.2 зображено квадрат $ABCD$. Назвіть рівні між собою відрізки на цьому малюнку.
- 5.4. Якщо чотирикутник є квадратом, то його діагоналі рівні та взаємно перпендикулярні. Чи правильне обернене твердження? Наведіть приклад.
- 2** 5.5. Точка перетину діагоналей квадрата міститься на відстані 3 см від однієї з його вершин. Знайдіть суму довжин діагоналей цього квадрата.

- 5.6.** Сума довжин діагоналей квадрата дорівнює 16 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до однієї з його вершин.
- 5.7.** Сума довжин двох сторін квадрата дорівнює 12 см. Знайдіть периметр квадрата.
- 5.8.** Сума довжин трьох сторін квадрата дорівнює 15 дм. Знайдіть периметр квадрата.
- 5.9.** (Усно.) Які спільні властивості мають квадрат і ромб?
- 5.10.** (Усно.) Які спільні властивості мають квадрат і прямокутник?
- 5.11.** Різниця між периметром квадрата і його стороною дорівнює 18 см. Знайдіть сторону квадрата та його периметр.



- 5.12.** Сусідні сторони прямокутника рівні. Доведіть, що він є квадратом.



- 5.13.** Один з кутів ромба – прямий. Доведіть, що цей ромб є квадратом.

- 5.14.** (Усно.) Чи правильні твердження:

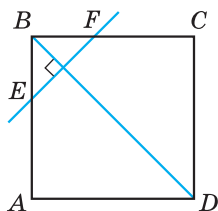
- 1) кожен квадрат є прямокутником;
- 2) існує квадрат, який не є ромбом;
- 3) кожен ромб є квадратом;
- 4) кожен квадрат є ромбом;
- 5) будь-який прямокутник є квадратом;
- 6) відношення периметра квадрата до його сторони є сталим для всіх квадратів?

- 5.15.** $ABCD$ – квадрат, $EF \perp BD$ (мал. 5.4). Знайдіть $\angle BFE$.

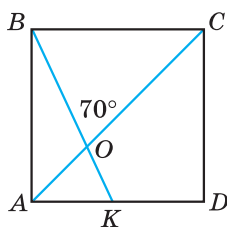
- 5.16.** $ABCD$ – квадрат, $\angle BOC = 70^\circ$ (мал. 5.5). Знайдіть $\angle OKA$.

- 3** **5.17.** Побудуйте квадрат за його:

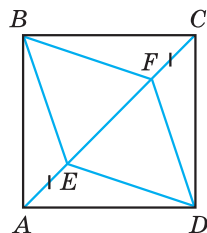
- 1) периметром;
- 2) діагоналлю.



Мал. 5.4



Мал. 5.5



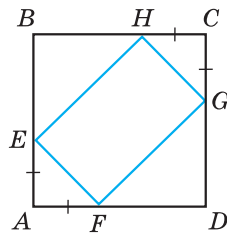
Мал. 5.6

- 5.18.** Побудуйте квадрат за сумою його діагоналей.

- 5.19.** Точка перетину діагоналей квадрата віддалена від його сторони на 3 см. Знайдіть периметр квадрата.

- 5.20.** Периметр квадрата дорівнює 32 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторін.

- 5.21.** $ABCD$ – квадрат, $AE = FC$ (мал. 5.6). Доведіть, що $BEDF$ – ромб.



Мал. 5.7

- 5.22. $ABCD$ – квадрат, $AE = AF = CG = CH$ (мал. 5.7). Доведіть, що $EFGH$ – прямокутник.
- 5.23. До кола із центром у точці O з точки A проведено дві взаємно перпендикулярні дотичні AB і AC , B і C – точки дотику. Доведіть, що $ABOC$ – квадрат.
- 4** 5.24. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано квадрат $CMNK$ так, що прями́й кут у них спільний, а точка N належить стороні AB . Катет трикутника дорівнює b см. Знайдіть периметр квадрата.
- 5.25. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано квадрат $KMNL$ так, що точки K і M лежать на гіпотенузі трикутника, а точки L і N – на катетах AC і BC відповідно. Периметр квадрата дорівнює 12 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.
- 5.26. На сторонах квадрата зовні побудовано рівносторонні трикутники. Доведіть, що вершини трикутників, які не є вершинами заданого квадрата, є вершинами іншого квадрата.



Вправи для повторення

- 5.27. У ромбі $ABCD$ діагональ утворює з однією зі сторін кут 30° . Знайдіть кути ромба.
- 5.28. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 1 : 3 : 4 : 10$. Знайдіть кути чотирикутника. Опуклим чи неопуклим є цей чотирикутник?
- 5.29. Бісектриса кута B прямокутника $ABCD$ ділить сторону AD на відрізки AK і KD так, що $AK : KD = 3 : 5$. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 110 см.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 5.30. 1) Накресліть чотирикутник, дві сторони якого між собою паралельні, а дві інші – непаралельні.
2) Яка найбільша кількість гострих кутів може бути в такому чотирикутнику?



Життєва математика

- 5.31. Згідно із санітарними нормами відношення площі вікон до площі підлоги в класній кімнаті має бути не менше ніж 0,2. Чи дотримано цих норм у класній кімнаті, довжина якої – 12 м, а ширина становить 35 % від довжини, якщо в класі три вікна розміром 2 м $\times$ 1,7 м?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 5.32. О 12-й годині годинна та хвилинна стрілки збігаються. Через яку найменшу кількість хвилин стрілки знову збігаються?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1 (§§ 1–5)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. Укажіть відрізок, що є діагоналлю чотирикутника $ABCD$.

- А. AB Б. BD В. BC Г. AD

2. Знайдіть тупий кут паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 35° .

- А. 125° Б. 135° В. 145° Г. 155°

3. Знайдіть сторону квадрата, якщо його периметр дорівнює 36 см.

- А. 4 см Б. 6 см В. 9 см Г. 12 см

2 4. Периметр прямокутника дорівнює 24 см, а одна з його сторін на 2 см більша за другу. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.

- А. 5 см Б. 6 см В. 7 см Г. 8 см

5. $ABCD$ – ромб, $\angle A = 50^\circ$ (мал. 1). Знайдіть $\angle ABD$.

- А. 55° Б. 50° В. 75° Г. 65°

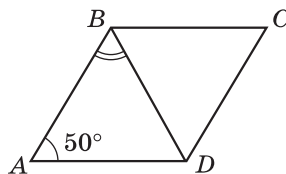
6. Укажіть правильне твердження:

А. Якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні, то він є ромбом

Б. Відношення периметра ромба до його сторони є сталим для всіх ромбів

В. Якщо діагоналі чотирикутника рівні, то він є прямокутником

Г. Відношення периметра прямокутника, який не є квадратом, до його найбільшої сторони є незмінним для всіх прямокутників



Мал. 1

3 7. Знайдіть найбільший кут чотирикутника, у якого градусні міри кутів пропорційні числам 2; 3; 5 і 8.

- А. 120° Б. 130° В. 150° Г. 160°

8. Висоти, які проведено з вершини тупого кута паралелограма, утворюють між собою кут 30° . Знайдіть тупий кут паралелограма.

- А. 120° Б. 130° В. 150° Г. 160°

9. Знайдіть гострий кут ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 40° .

- А. 25° Б. 30° В. 50° Г. 60°

4 10. Бісектриса кута D паралелограма $ABCD$ ділить сторону AB на відрізки AK і KB так, що $AK : KB = 1 : 3$. Знайдіть AB , якщо периметр паралелограма дорівнює 60 см.

- А. 26 см Б. 24 см В. 20 см Г. 15 см

11. З вершини тупого кута A ромба $ABCD$ проведено висоту AK . $\angle CAK = 30^\circ$, $AC = 6$ см. Знайдіть периметр ромба.

- А. 18 см Б. 24 см В. 30 см Г. 36 см

12. У $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$) вписано квадрат $KLMN$ так, що $K \in AB$, $L \in AB$, $M \in CB$, $N \in AC$. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AB = 12$ см.

А. 24 см Б. 20 см В. 12 см Г. 16 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

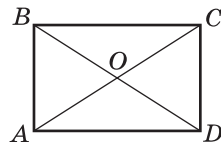
13. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O (мал. 2). Кут ABO на 18° менший від кута AOB . Установіть відповідність між кутами (1–3) та їхніми градусними мірами (А–Г).

Кут

1. $\angle ABO$
2. $\angle AOB$
3. $\angle OAD$

Градусна міра кута

- А. 36°
- Б. 48°
- В. 54°
- Г. 72°



Мал. 2

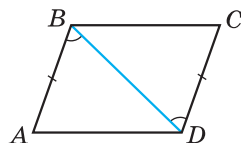
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–5

1. Накресліть чотирикутник $MNPL$ і проведіть його діагоналі.
2. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них дорівнює 80° .
3. Знайдіть периметр квадрата, якщо його сторона дорівнює 7 см.

4. Периметр прямокутника дорівнює 18 см. Знайдіть його сторони, якщо одна з них на 1 см більша за другу.

5. $ABCD$ – ромб, $\angle ABD = 50^\circ$. Знайдіть кути ромба.

6. На малюнку 1 $\angle ABD = \angle BDC$, $AB = DC$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 1

7. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 4, 6. Опуклим чи неопуклим він є?

8. Висоти, проведені з вершини гострого кута ромба, утворюють між собою кут 120° . Знайдіть кути ромба.

9. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки BK і KC так, що $BK : KC = 4 : 3$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 88 см.

Додаткові завдання

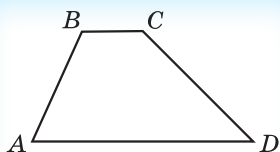
10. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою $BC = 23$ см вписано прямокутник $KLMN$ так, що точки K і L належать гіпотенузі трикутника, а точки M і N – катетам. Сторона KL прямокутника на 2 см більша за сторону LM . Знайдіть периметр прямокутника.

11. З вершини тупого кута B ромба $ABCD$ проведено висоту BM , $\angle DBM = 30^\circ$. Периметр ромба дорівнює 40 см. Знайдіть меншу діагональ ромба.

§ 6. Трапеція

1. Означення трапеції, її елементи та властивості

Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні.



Трапеція $ABCD$

AD і BC – **основи трапеції** – це паралельні сторони;
 AB і CD – **бічні сторони трапеції** – це непаралельні сторони.

Розглянемо деякі властивості трапеції.

1. Сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180° .

Оскільки $AD \parallel BC$, то $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (як сума внутрішніх односторонніх кутів). Аналогічно $\angle C + \angle D = 180^\circ$. ■

2. Трапеція є опуклим чотирикутником.

Оскільки $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то $\angle A < 180^\circ$, $\angle B < 180^\circ$. Аналогічно $\angle C < 180^\circ$, $\angle D < 180^\circ$. Отже, трапеція – опуклий чотирикутник.

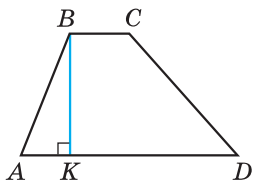
2. Висота трапеції

Висотою трапеції називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки основи трапеції до прямої, що містить протилежну основу.

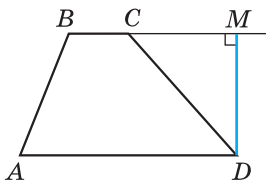
Зазвичай висоту трапеції проводять з її вершини. На малюнку 6.1 BK – висота трапеції $ABCD$, а на малюнку 6.2 DM – висота трапеції $ABCD$.

3. Прямокутна трапеція

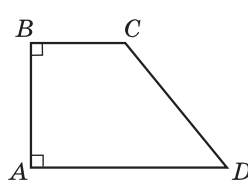
Трапецію називають **прямокутною**, якщо один з її кутів – прямий. На малюнку 6.3 – прямокутна трапеція $ABCD$ ($\angle A = 90^\circ$). Очевидно, що $\angle B = 90^\circ$. AB є меншою бічною стороною прямокутної трапеції і її висотою.



Мал. 6.1



Мал. 6.2



Мал. 6.3

Приклад 1. У прямокутній трапеції гострий кут на 30° менший від тупого. Знайти ці кути трапеції.

Розв'язання. Розглянемо прямокутну трапецію $ABCD$ (мал. 6.3).

1) Позначимо $\angle D = x$, тоді $\angle C = x + 30^\circ$.

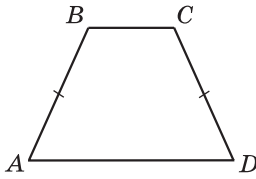
2) Оскільки сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180° , то маємо $\angle C + \angle D = 180^\circ$; $x + x + 30^\circ = 180^\circ$; $x = 75^\circ$.

3) Отже, $\angle D = 75^\circ$; $\angle C = 75^\circ + 30^\circ = 105^\circ$.

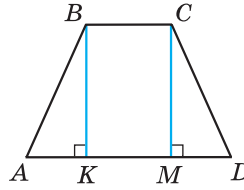
Відповідь: 75° ; 105° .

4. Рівнобічна трапеція та її властивості

Трапецію називають **рівнобічною**, якщо її бічні сторони рівні. На малюнку 6.4 – рівнобічна трапеція $ABCD$.



Мал. 6.4



Мал. 6.5

Розглянемо деякі важливі *властивості рівнобічної трапеції*.

1. У рівнобічній трапеції кути при основі між собою рівні.

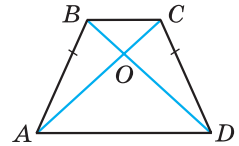
Доведення. 1) Нехай у трапеції $ABCD$ $AB = CD$. Проведемо висоти трапеції BK і CM з вершин її тупих кутів B і C (мал. 6.5). Утворився прямокутник $BKMC$. Тому $BK = CM$.

2) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (за катетом і гіпотенузою). Тому $\angle BAD = \angle CDA$.

3) Також $\angle ABK = \angle DCM$. Оскільки $\angle KBC = \angle MCB = 90^\circ$, то $\angle ABC = \angle ABK + 90^\circ$ і $\angle DCB = \angle DCM + 90^\circ$. Тому $\angle ABC = \angle DCB$. ■

2. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

Доведення. Розглянемо малюнок 6.6. $\angle BAD = \angle CDA$ (як кути при основі рівнобічної трапеції), $AB = DC$, AD – спільна сторона трикутників ABD і DCA . Тому $\triangle ABD = \triangle DCA$ (за двома сторонами та кутом між ними). Отже, $AC = BD$. ■



Мал. 6.6

Приклад 2. O – точка перетину діагоналей рівнобічної трапеції $ABCD$ з основами AD і BC (мал. 6.6). Довести, що $AO = OD$, $BO = OC$.

Доведення. 1) $\triangle ABD = \triangle DCA$ (доведено вище).

2) Тому $\angle ODA = \angle OAD$. За ознакою рівнобедреного трикутника – трикутник AOD – рівнобедрений. Тому $AO = OD$.

3) Оскільки $AC = BD$ і $AO = OD$, то $OC = BO$ (бо $OC = AC - AO$, $BO = BD - OD$). ■



Приклад 3. BK і CM – висоти рівнобічної трапеції $ABCD$, проведені з вершин її тупих кутів, $AD = a$, $BC = b$ (мал. 6.5). Довести, що $AK = MD = \frac{a-b}{2}$; $AM = KD = \frac{a+b}{2}$.

Доведення. 1) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (за катетом і гіпотенузою), тому $AK = MD$.

2) $BKMC$ – прямокутник, тому $KM = BC = b$.

$$3) AK = MD = \frac{AD - KM}{2} = \frac{AD - BC}{2} = \frac{a - b}{2}.$$

$$4) AM = AD - DM = a - \frac{a - b}{2} = \frac{2a - a + b}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

$$5) KD = AD - AK = a - \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Отже, довели, що $AK = MD = \frac{a - b}{2}$; $AM = KD = \frac{a + b}{2}$. ■

5. Ознака рівнобічної трапеції



Теорема (ознака рівнобічної трапеції). Якщо в трапеції кути при одній основі рівні, то трапеція – рівнобічна.

Доведення. 1) Нехай у трапеції $ABCD$ кути при більшій основі AD рівні (мал. 6.5), тобто $\angle BAD = \angle CDA$. Проведемо висоти BK і CM , які рівні між собою.

2) Тоді $\triangle BAK = \triangle CDM$ (за катетом і протилежним кутом). Тому $AB = DC$. Трапеція рівнобічна, що й треба було довести. ■

А ще раніше...

Термін «трапеція» грецького походження (грецькою мовою «трапедзіон» означає «столік», зокрема столік для обіду; слова «трапеція» і «трапеза» – спільнокореневі).

У своїй праці «Начала» Евклід під терміном «трапеція» розумів будь-який чотирикутник, який не є паралелограмом. Більшість математиків середньовіччя використовували термін «трапеція» з тим самим змістом.

Трапеція в сучасному розумінні вперше трапляється в давньогрецького математика Посидонія (I ст.). Проте лише починаючи з XVIII ст., цей термін став загально-вживаним для чотирикутників, у яких дві сторони паралельні, а дві інші – непаралельні.



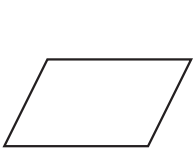
Яку фігуру називають трапецією? ○ Що називають основами трапеції, бічними сторонами трапеції? ○ Сформулюйте властивості трапеції. ○ Що таке висота трапеції? ○ Яку трапецію називають прямокутною, яку – рівнобічною? ○ Сформулюйте й доведіть властивості рівнобічної трапеції. ○ Сформулюйте й доведіть ознаку рівнобічної трапеції.



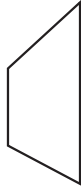
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

6.1. На яких малюнках (6.7–6.11) зображено трапецію?



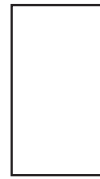
Мал. 6.7



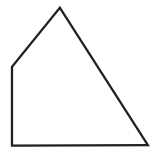
Мал. 6.8



Мал. 6.9



Мал. 6.10



Мал. 6.11

- 6.2. Накресліть трапецію $PKML$ ($PK \parallel ML$). Укажіть основи трапеції, бічні сторони трапеції.
- 6.3. Накресліть трапецію $DMFK$ ($DM \parallel FK$). Укажіть основи трапеції, бічні сторони трапеції.
- 6.4. Накресліть прямокутну трапецію $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90^\circ$).
- 6.5. Накресліть рівнобічну трапецію $ABCD$ ($AB = CD$).
- 6.6. Два кути трапеції дорівнюють 30° і 110° . Знайдіть два інших її кути.
- 6.7. Два кути трапеції дорівнюють 100° і 50° . Знайдіть два інших кути трапеції.
- 2 6.8. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 10 см, а периметр 28 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.
- 6.9. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 7 см і 5 см, а бічна сторона – 3 см. Знайдіть периметр трапеції.
- 6.10. Чи існує трапеція, у якої два протилежних кути:
1) гострі; 2) прямі; 3) тупі?
У разі ствердної відповіді накресліть таку трапецію.
- 6.11. Чи існує трапеція, у якої:
1) основи між собою рівні;
2) три сторони між собою рівні?
У разі ствердної відповіді накресліть таку трапецію.
- 6.12. Чи існує трапеція, у якої:
1) три кути прямі;
2) два протилежних кути рівні?
У разі ствердної відповіді накресліть таку трапецію.
- 6.13. Сторони AD і BC – основи трапеції $ABCD$. Доведіть, що $\angle CAD = \angle ACB$.
- 6.14. Чи можуть кути трапеції, узяті в послідовному порядку, відноситись як:
1) $2 : 3 : 4 : 1$; 2) $2 : 3 : 5 : 2$
- 6.15. Чи можуть кути трапеції, узяті в послідовному порядку, відноситись як:
1) $3 : 1 : 2 : 2$; 2) $3 : 1 : 2 : 4$

- 6.16. У трапеції, яка не є рівнобічною, два кути дорівнюють 40° і 140° . Чи можна знайти два інших її кути?
- 6.17. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини гострого кута, утворює з бічною стороною кут 42° . Знайдіть кути трапеції.
- 6.18. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, утворює з бічною стороною кут 54° . Знайдіть кути трапеції.
- 6.19. У трапеції $ABCD$ AB – більша основа. Прямі BC і AD перетинаються в точці E , $\angle ECD = 40^\circ$, $\angle BEA = 70^\circ$. Знайдіть кути трапеції.
- 6.20. У трапеції $ABCD$ BC – менша основа. На відрізку AD взято точку E так, що $BE \parallel CD$, $\angle ABE = 60^\circ$, $\angle BEA = 40^\circ$. Знайдіть кути трапеції.
- 6.21. У прямокутній трапеції гострий кут удвічі менший від тупого. Знайдіть кути трапеції.
- 6.22. У прямокутній трапеції тупий кут на 40° більший за гострий. Знайдіть кути трапеції.
- 6.23. У рівнобічній трапеції бічна сторона вдвічі більша за висоту. Знайдіть кути трапеції.
-  6.24. У трапеції $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Визначте вид трапеції.
- 6.25. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 60° . Більша бічна сторона й більша основа дорівнюють по 16 см. Знайдіть меншу основу.
- 6.26. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 45° . Менша бічна сторона й менша основа дорівнюють по 18 см. Знайдіть більшу основу.
- 6.27. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі й утворює з нею кут 40° . Знайдіть кути трапеції.
- 6.28. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює меншій основі, а діагональ утворює із цією основою кут 20° . Знайдіть кути трапеції.
-  6.29. Діагональ AC трапеції $ABCD$ ділить кут A навпіл. Доведіть, що бічна сторона AB дорівнює основі BC .
- 6.30. O – точка перетину бісектрис кутів A і B трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Доведіть, що $\angle AOB = 90^\circ$.
- 6.31. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу трапеції на відрізки 2 см і 7 см. Знайдіть основи трапеції.
-   6.32. (Ознака рівнобічної трапеції.) Якщо у трапеції діагоналі між собою рівні, то вона – рівнобічна. Доведіть це.
- 6.33. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть кути трапеції.
- 6.34. У рівнобічній трапеції $ABCD$ AD – більша основа, $AD = CD$, $\angle BAC = 18^\circ$. Знайдіть кути трапеції.



6.35. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b , а її діагоналі взаємно перпендикулярні. Доведіть, що висота трапеції дорівнює $\frac{a+b}{2}$.

6.36. У прямокутній трапеції гострий кут і кут, який утворює менша діагональ з меншою основою, дорівнюють 60° . Знайдіть відношення основ трапеції.

6.37. У прямокутній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони, а тупий кут утричі більший за гострий. Знайдіть відношення основ.

6.38. Побудуйте трапецію за основами a і b ($a > b$) та бічними сторонами c і d .



Вправи для повторення

6.39. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 75° . Знайдіть зовнішній кут при вершині кута між бічними сторонами.

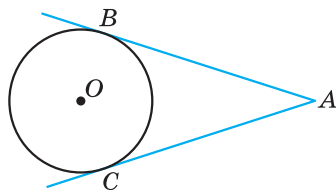
6.40. Тупий кут ромба дорівнює 120° , а його менша діагональ – 5 см. Знайдіть периметр ромба.

6.41. Доведіть, що паралелограм, у якого всі висоти рівні, є ромбом.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

6.42. З точки A до кола проведено дві дотичні, B і C – точки дотику (мал. 6.12). Знайдіть довжини відрізків AB і AC дотичних, якщо їхня сума дорівнює 16 см.



Мал. 6.12



Життєва математика

6.43. Тренажерний зал у формі прямокутника має розміри $3,8 \text{ м} \times 5,2 \text{ м}$, у ньому є двері 80 см завширшки.

1) Скільки метрів плінтуса потрібно придбати для цього залу?

2) Скільки коштуватиме ця покупка, якщо ціна одного погонного метра плінтуса 50 грн?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

6.44. Чотири магазини підприємниці розташовані у вершинах опуклого чотирикутника. Де їй слід розмістити товарний склад, щоб сума відстаней від складу до всіх магазинів була найменшою?

§ 7. Вписані та описані чотирикутники

1. Чотирикутник, вписаний у коло, та його властивість

Чотирикутник називають **вписаним у коло**, якщо всі його вершини лежать на колі. **Коло** при цьому називають **описаним навколо чотирикутника** (мал. 7.1).

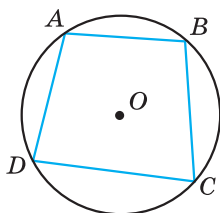
Т **Теорема 1** (властивість кутів вписаного чотирикутника). Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180° .

Доведення. Нехай у коло із центром O вписано чотирикутник $ABCD$ (мал. 7.1).

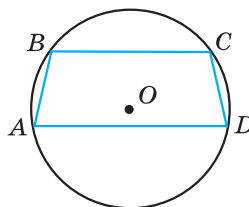
1) Тоді $\angle A = \frac{1}{2}\widehat{DCB}$, $\angle C = \frac{1}{2}\widehat{DAB}$ (за теоремою про вписаний кут).

2) Тому $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\widehat{DCB} + \widehat{DAB}) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

3) Тоді $\angle B + \angle D = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$. ■



Мал. 7.1



Мал. 7.2

Н **Наслідок 1.** Якщо навколо трапеції можна описати коло, то вона рівнобічна.

Доведення. Нехай трапеція $ABCD$ вписана в коло, $AD \parallel CB$ (мал. 7.2).

1) Тоді $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

2) Але ж у трапеції $\angle D + \angle C = 180^\circ$. Тому $\angle A = \angle D$.

Отже, $ABCD$ – рівнобічна трапеція (за ознакою рівнобічної трапеції). ■

Н **Наслідок 2.** Якщо чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло, то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

Приклад 1. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло (мал. 7.1).
 : $\angle A : \angle C = 3 : 2$, а градусна міра кута D на 10° більша за градусну
 : міру кута C . Знайти кути чотирикутника $ABCD$.

Розв'язання.

- 1) Оскільки чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло, то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$.
 - 2) Оскільки $\angle A : \angle C = 3 : 2$, то позначимо $\angle A = 3x$, $\angle C = 2x$. Тоді $3x + 2x = 180^\circ$; $x = 36^\circ$; $\angle A = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$; $\angle C = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$.
 - 3) Можемо далі знайти градусну міру кута $\angle D$: $\angle D = \angle C + 10^\circ = 72^\circ + 10^\circ = 82^\circ$.
 - 4) $\angle B = 180^\circ - \angle D = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$.
- Відповідь: $\angle A = 108^\circ$; $\angle B = 98^\circ$; $\angle C = 72^\circ$; $\angle D = 82^\circ$.

2. Ознака вписаного чотирикутника



Ви знаєте з курсу геометрії 7 класу: навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Про чотирикутники те саме сказати не можна.



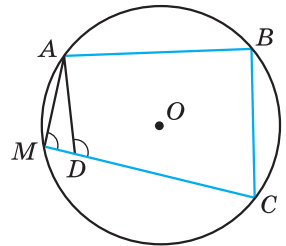
Теорема 2 (ознака вписаного чотирикутника). Якщо в чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180° , то навколо нього можна описати коло.

Доведення. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Проведемо через точки A , B і C коло. Доведемо, що вершина D чотирикутника також лежатиме на цьому колі (методом від супротивного).

1) Припустимо, що вершина D лежить усередині кола (мал. 7.3). Продовжимо CD до перетину з колом у точці M . Тоді $\angle B + \angle D = 180^\circ$ (за умовою) і $\angle M + \angle B = 180^\circ$ (за властивістю кутів вписаного чотирикутника). Звідси $\angle D = \angle M$. Але ж $\angle ADC$ – зовнішній, а $\angle AMC$ – не суміжний з ним внутрішній кут трикутника ADM . Тому $\angle ADC$ має бути більшим за $\angle AMC$. Прийшли до протиріччя. Отже, наше припущення хибне і точка D не може лежати всередині кола.

2) Аналогічно можна довести, що вершина D не може лежати зовні кола.

3) Отже, точка D лежить на колі (мал. 7.1), а тому навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло. ■



Мал. 7.3



Наслідок 1. Якщо у чотирикутника $ABCD$ $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$, то навколо нього можна описати коло.



Наслідок 2. Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.



Наслідок 3. Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло.

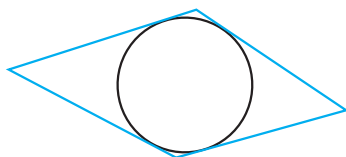


Як і для трикутника, центром кола, описаного навколо чотирикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

Так, наприклад, центр кола, описаного навколо прямокутника, збігається з точкою перетину його діагоналей.

3. Чотирикутник, описаний навколо кола, та його властивість

Чотирикутник називають **описаним навколо кола**, якщо всі його сторони дотикаються до кола. **Коло** при цьому називають **вписаним** у чотирикутник (мал. 7.4).



Мал. 7.4



Теорема 3 (властивість сторін описаного чотирикутника). В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін між собою рівні.

Доведення. Нехай чотирикутник $ABCD$ – описаний, P, L, K, T – точки дотику (мал. 7.5).

1) За властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола:

$$AP = AT = a, BP = BL = b, CK = CL = c, DK = DT = d.$$

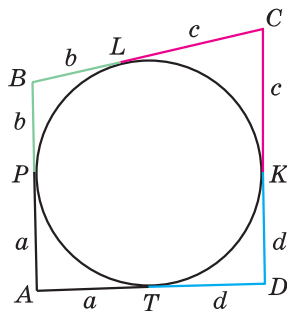
На малюнку 7.5 рівні між собою відрізки позначено однаковим кольором.

2) Тоді

$$AD + BC = AT + TD + BL + LC = a + d + b + c;$$

$$AB + CD = AP + PB + CK + KD = a + b + c + d.$$

3) Отже, $AD + BC = AB + CD$. ■



Мал. 7.5



Наслідок. Якщо чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола, то $AB + CD = AD + BC = \frac{P_{ABCD}}{2}$, де P_{ABCD} – периметр чотирикутника $ABCD$.

4. Ознака описаного чотирикутника



З геометрії 7 класу ви знаєте, що в будь-який трикутник можна вписати коло.

Про чотирикутник те саме сказати не можна.



Теорема 4 (ознака описаного чотирикутника). Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло.

Доведення цієї теореми є досить громіздким, тому його не наводимо.



Наслідок. У будь-який ромб можна вписати коло.



Як і для трикутника, центром кола, вписаного в чотирикутник, є точка перетину бісектрис його кутів.

Оскільки діагоналі ромба є бісектрисами його кутів, то центром кола, вписаного в ромб, є точка перетину діагоналей.

Приклад 2.

Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого в порядку слідування дорівнюють:

- 1) 5 см, 7 см, 6 см, 4 см; 2) 9 дм, 7 дм, 4 дм, 3 дм?

Розв'язання. 1) Оскільки $5 + 6 = 7 + 4$, то в цей чотирикутник можна вписати коло.

2) $9 + 4 \neq 7 + 3$. Тому в такий чотирикутник вписати коло неможливо.

Відповідь: 1) так; 2) ні.



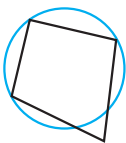
Який чотирикутник називають вписаним у коло? ○ Сформулюйте й доведіть властивість кутів вписаного чотирикутника. ○ Сформулюйте наслідки із цієї властивості. ○ Сформулюйте ознаку вписаного чотирикутника та наслідки з неї. ○ Який многокутник називають описаним навколо кола? ○ Сформулюйте й доведіть властивість сторін описаного чотирикутника. ○ Сформулюйте ознаку описаного чотирикутника та наслідок з неї.



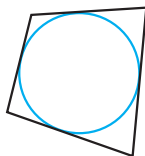
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

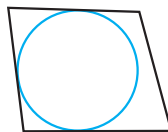
7.1. На яких малюнках (7.6–7.9) зображено вписані чотирикутники, а на яких – описані?



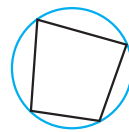
Мал. 7.6



Мал. 7.7



Мал. 7.8



Мал. 7.9

- 7.2.** Чи можна навколо чотирикутника $ABCD$ описати коло, якщо:
 1) $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 150^\circ$;
 2) $\angle B = 90^\circ$, $\angle D = 80^\circ$?
- 7.3.** Чи може чотирикутник $MNKL$ бути вписаним у коло, якщо:
 1) $\angle M = 20^\circ$, $\angle K = 150^\circ$;
 2) $\angle N = 90^\circ$, $\angle L = 90^\circ$?
- 2** **7.4.** Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого в порядку слідування відносяться як:
 1) $5 : 3 : 4 : 7$; 2) $3 : 2 : 4 : 5$?
- 7.5.** Чи може бути описаним чотирикутник, сторони якого в порядку слідування відносяться як:
 1) $7 : 3 : 2 : 6$; 2) $5 : 4 : 3 : 6$?
- 7.6.** Знайдіть кути A і B чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle C = 133^\circ$, $\angle D = 28^\circ$.
- 7.7.** Знайдіть кути C і D чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle A = 139^\circ$, $\angle B = 48^\circ$.
- 3** **7.8.** У рівнобічну трапецію, периметр якої дорівнює 16 см, вписано коло. Знайдіть бічну сторону трапеції.
- 7.9.** Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 5 дм. Знайдіть периметр трапеції.
- 7.10.** У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AH_1 і BH_2 , які перетинаються в точці H . Доведіть, що навколо чотирикутника CH_1HH_2 можна описати коло, діаметром якого буде відрізок CH .
- 7.11.** Точка M лежить на стороні AB гострокутного трикутника ABC . MP і MK – перпендикуляри до сторін AC і BC відповідно. Доведіть, що навколо чотирикутника $MPCK$ можна описати коло, діаметром якого буде відрізок CM .
- 4** **7.12.** Трапецію вписано в коло радіуса R так, що діаметр кола є її більшою основою. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює бічній стороні.



Вправи для повторення

- 7.13.** AB – основа рівнобедреного трикутника ABC , I – центр вписаного кола, $\angle AIB = \alpha$ ($\alpha > 90^\circ$). Знайдіть кути трикутника ABC .
- 7.14.** AB – основа рівнобедреного трикутника ABC , O – центр описаного кола. $\angle AOB = \alpha$ ($\alpha < 180^\circ$). Знайдіть кути трикутника ABC . Скільки випадків слід розглянути?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 7.15.** Пряма EK паралельна стороні AB трикутника ABC , $E \in AC$, $K \in BC$. Доведіть, що $\angle CKE = \angle CBA$, $\angle CEK = \angle CAB$.



Життєва математика

- 7.16. З року в рік лісівники Вінниччини залучають до акції «Майбутнє лісу – у твоїх руках!» школярів. Так, учасники та учасниці учнівських лісництв заклали для висаджування саджанців дуба ділянку прямокутної форми 15 м завдовжки і 8 м завширшки. Скільки мішків чорнозему знадобилося для її закладання, якщо на кожний квадратний метр ділянки потрібно 40 кг чорнозему, а мішок уміщує 100 кг?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 7.17. Побудуйте спільну зовнішню дотичну до двох кіл різних радіусів, які не мають спільних точок.

§ 8. Теорема Фалéса

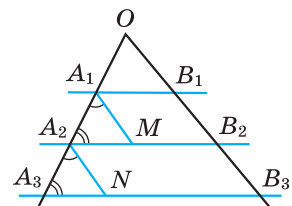
1. Теорема Фалéса та наслідок з неї



Теорема Фалеса. Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні між собою відрізки, то вони відтинають рівні між собою відрізки і на другій його стороні.

Доведення. Нехай паралельні прямі A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 8.1), причому $A_1A_2 = A_2A_3$. Доведемо, що $B_1B_2 = B_2B_3$.

1) Проведемо через точки A_1 і A_2 прямі A_1M і A_2N , паралельні прямій OB_3 . $A_1A_2 = A_2A_3$ (за умовою), $\angle A_2A_1M = \angle A_3A_2N$ (як відповідні кути при паралельних прямих A_1M і A_2N), $\angle A_1A_2M = \angle A_2A_3N$ (як відповідні кути при паралельних прямих A_2M і A_3N). Тому $\triangle A_1A_2M = \triangle A_2A_3N$ (за стороною і двома прилеглими кутами), а значить $A_1M = A_2N$ (як відповідні сторони рівних трикутників).



Мал. 8.1

2) Чотирикутник $A_1MB_2B_1$ – паралелограм (за побудовою). Тому $A_1M = B_1B_2$. Аналогічно $A_2NB_3B_2$ – паралелограм, тому $A_2N = B_2B_3$. Отже, $A_1M = A_2N$, $A_1M = B_1B_2$, $A_2N = B_2B_3$. Звідки $B_1B_2 = B_2B_3$, що й треба було довести. ■



Наслідок. Паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі та відтинають на одній з них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на другій прямій.

2. Поділ відрізка на кілька рівних частин

За теоремою Фалеса, можна поділити відрізок на будь-яку кількість рівних частин, використовуючи лінійку без поділок.

Приклад. Поділити відрізок AB на 6 рівних частин.

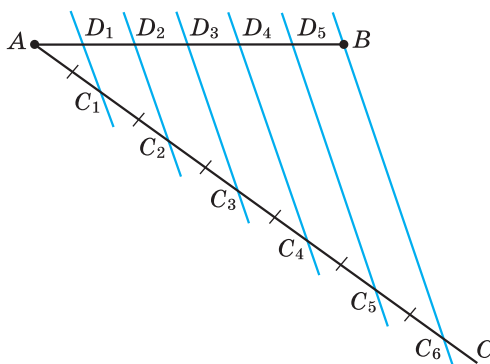
Розв'язання. 1) Нехай AB – даний відрізок (мал. 8.2). Проведемо довільний промінь AC і відкладемо на ньому циркулем послідовно 6 відрізків:

$$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5 = C_5C_6.$$

2) Через точки C_6 і B проведемо пряму.

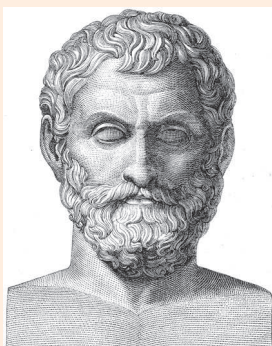
3) Через точки C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 проведемо за допомогою косинця і лінійки прямі, паралельні прямій BC_6 . За теоремою Фалеса, ці прямі поділять відрізок AB на 6 рівних між собою частин:

$$AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_3D_4 = D_4D_5 = D_5B.$$



Мал. 8.2

А ще раніше...



Фалес Мілетський
(бл. 625–548 рр.
до н. е.)

Фалес Мілетський – давньогрецький математик і астроном. Його вважають одним з так званих семи мудреців світу, адже він був одним з найвидатніших математиків свого часу.

Ще в молоді роки допитливий юнак вирушив у подорож до Єгипту, щоб ознайомитися з єгипетською культурою та вивчати природничі науки. Там здібний та обдарований Фалес не тільки швидко вивчив те, що на той час уже було відомо єгипетським ученим, а й зробив низку власних наукових відкриттів. Він самостійно визначив висоту єгипетських пірамід за їхньою тінню, чим дуже здивував єгипетського фараона Амазіса. А повернувшись на батьківщину, заснував у Мілеті філософську школу.

Історики вважають, що Фалес був першим, хто ознайомив греків з геометрією, і став першим грецьким астрономом. Фалес передбачив сонячне затемнення, яке відбулося 28 травня 585 року до н. е.

На гробниці Фалеса вирізьблено: «Наскільки є малою ця гробниця, настільки великою є слава цього царя астрономії в царині зірок».

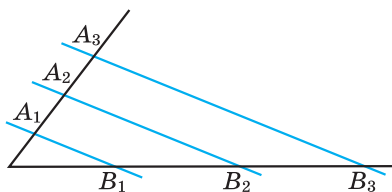


Сформулюйте й доведіть теорему Фалеса.

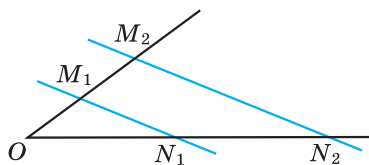


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 8.1. (Усно.) На малюнку 8.3 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 4$ см, $A_2A_3 = 4$ см, $B_1B_2 = 7$ см. Знайдіть B_2B_3 .
- 8.2. На малюнку 8.3 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $B_1B_2 = B_2B_3$, $A_2A_3 = 5$ см. Знайдіть A_1A_2 .
- 8.3. На малюнку 8.4 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $OM_1 = M_1M_2$, $ON_1 = 6$ см. Знайдіть ON_2 .
- 8.4. На малюнку 8.4 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 = 7$ см, $N_1N_2 = 7$ см, $OM_1 = 4$ см. Знайдіть OM_2 .



Мал. 8.3



Мал. 8.4

- 2** 8.5.¹ Поділіть заданий відрізок на 5 рівних частин.
- 8.6. Поділіть заданий відрізок на 7 рівних частин.
- 3** 8.7. Поділіть заданий відрізок на дві частини, відношення яких дорівнює 2 : 5.
- 8.8. Поділіть заданий відрізок на дві частини у відношенні 3 : 2.
- 8.9. На малюнку 8.3 $A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 : B_1B_2 = 3 : 5$, $B_2B_3 - A_2A_3 = 8$ см. Знайдіть A_1A_2 , A_2A_3 , B_1B_2 , B_2B_3 .
- 8.10. На малюнку 8.4 $ON_1 = N_1N_2$, $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 : OM_1 = 7 : 4$, $N_1N_2 + M_1M_2 = 33$ см. Знайдіть ON_2 і OM_2 .
- 4** 8.11. M і N – відповідно середини сторін AB і CD паралелограма $ABCD$. Відрізки MD і BN перетинають діагональ AC у точках L і K відповідно. Доведіть, що $AL = LK = KC$.
- 8.12. Точки E , F і G ділять медіану AD трикутника ABC на чотири рівні частини ($AE = EF = FG = GD$). Доведіть, що пряма CG ділить сторону AB у відношенні 3 : 2, починаючи від вершини A .
- 8.13. Точки M і N ділять медіану AD трикутника ABC на три рівні частини ($AM = MN = ND$). Доведіть, що пряма BN містить медіану трикутника.
- 8.14. Точка K – середина медіани AD трикутника ABC . Промінь BK перетинає сторону AC у точці M . Знайдіть $AM : MC$.

¹ Задачі 8.5–8.8 потрібно розв'язати із використанням лінійки без поділок.



Вправи для повторення

- 8.15. Побудуйте відрізок AB завдовжки 5 см та геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців.
- 8.16. З точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди, які віддалені від центра на відстані 5 см і 7 см. Знайдіть довжини цих хорд.



Життєва математика

- 8.17. Висота футбольних воріт – відстань від нижнього контура перекладини до поверхні землі – 8 футів. Ширина футбольних воріт – відстань між стійками – 8 ярдів. Знайдіть в інтернеті, як перевести фути та ярди в метри, й обчисліть площу футбольних воріт у m^2 . Результат округліть до десятих m^2 .



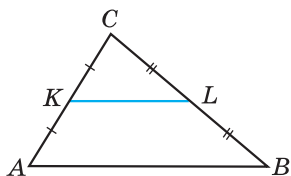
Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 8.18. (Всеукраїнська олімпіада з математики, 1976 р.) Усередині гострокутного трикутника ABC дано точку P таку, що $\angle APB = \angle ACB + 60^\circ$, $\angle BPC = \angle BAC + 60^\circ$, $\angle CPA = \angle CBA + 60^\circ$. Доведіть, що основи перпендикулярів, проведених з точки P до сторін трикутника ABC , є вершинами рівностороннього трикутника.

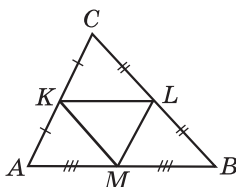
§ 9. Середня лінія трикутника, її властивість

1. Означення середньої лінії трикутника та її властивість

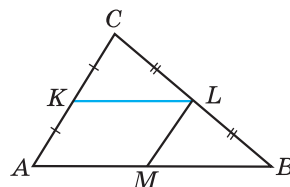
Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.



Мал. 9.1



Мал. 9.2



Мал. 9.3

На малюнку 9.1 KL – середня лінія трикутника ABC .

Кожний трикутник має три середні лінії. На малюнку 9.2 відрізки KL , LM , KM – середні лінії $\triangle ABC$.



Теорема 1 (властивість середньої лінії трикутника). Середня лінія трикутника, що сполучає середини двох сторін, паралельна третій стороні та дорівнює її половині.

Доведення. Нехай KL – середня лінія трикутника ABC (мал. 9.2).

Доведемо, що $KL \parallel AB$ і $KL = \frac{1}{2}AB$.

1) Проведемо через точку L пряму, паралельну AB . За теоремою Фалеса, вона перетинає сторону AC в її середині, тобто в точці K (мал. 9.3). Отже, ця пряма містить середню лінію KL . Тому $KL \parallel AB$.

2) Проведемо через точку L пряму, паралельну AC , яка перетинає AB у точці M (мал. 9.2). Тоді $AM = MB$ (за теоремою Фалеса). Чотирикутник $AKLM$ – паралелограм. $KL = AM$ (за властивістю паралелограма), але $AM = \frac{1}{2}AB$. Тому $KL = \frac{1}{2}AB$. ■



Приклад 1. Периметр трикутника ABC дорівнює P . Знайти периметр трикутника, сторонами якого є середні лінії трикутника ABC .

Розв'язання. Нехай ABC – заданий трикутник, KL , LM і MK – його середні лінії (мал. 9.2). За умовою $AB + BC + CA = P$.

1) Оскільки KL – середня лінія $\triangle ABC$, то $KL = \frac{AB}{2}$. Аналогічно

$$KM = \frac{BC}{2}, \quad ML = \frac{AC}{2}.$$

2) Знайдемо периметр $\triangle KLM$. Маємо:

$$P_{\triangle KLM} = KL + KM + ML = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{P}{2}.$$

Відповідь: $\frac{P}{2}$.



Приклад 2. Довести, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма, один з кутів якого дорівнює куту між діагоналями чотирикутника.

Доведення. Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, а точки K , L , M , N – середини його сторін (мал. 9.4).

1) KL – середня лінія трикутника ABC ,

тому $KL \parallel AC$ і $KL = \frac{1}{2}AC$.

Аналогічно $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

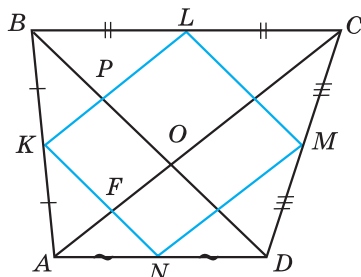
2) Отже, $KL \parallel MN$, $KL = MN$. Тоді $KLMN$ – паралелограм (за ознакою паралелограма).

3) KN – середня лінія трикутника ABD .

Тому $KN \parallel BD$.

Отже, $KFOP$ – також паралелограм, звідки:

$\angle NKL = \angle BOA$. ■



Мал. 9.4

2. Властивість медіан трикутника

Розглянемо властивість медіан трикутника.

Т Теорема 2 (властивість медіан трикутника). **Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожную з них у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.**

Доведення. Нехай M – точка перетину медіан AK і CN трикутника ABC (мал. 9.5).

1) Побудуємо чотирикутник $LDTK$, де D – середина AM , T – середина BM .

2) DT – середня лінія трикутника ABM , тому $DT \parallel AB$ і $DT = \frac{1}{2}AB$.

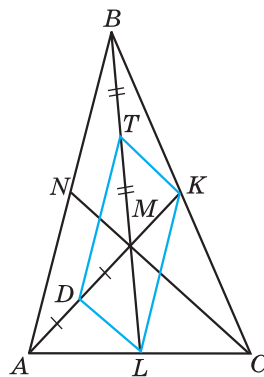
3) KL – середня лінія трикутника ABC , тому $KL \parallel AB$ і $KL = \frac{1}{2}AB$.

4) Отже, $DT \parallel KL$ і $DT = KL$. Тому $DTKL$ – паралелограм (за ознакою).

5) M – точка перетину діагоналей TL і DK паралелограма $DTKL$, тому $MT = ML$, $DM = MK$. Але $MT = BT$, $DM = AD$. Тоді $BT = TM = ML$ і $AD = DM = MK$. Отже, точка M ділить кожную з медіан AK і BL у відношенні 2 : 1, починаючи від вершин A і B відповідно.

6) Точка перетину медіан AK і CN має також ділити у відношенні 2 : 1 кожную медіану. Оскільки існує єдина точка – точка M , яка в такому відношенні ділить медіану AK , то медіана CN також проходить через цю точку.

7) Отже, три медіани трикутника перетинаються в одній точці й цією точкою діляться у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника. ■



Мал. 9.5

Точку перетину медіан ще називають *центроїдом трикутника*.

? Що називають середньою лінією трикутника? ○ Сформулюйте й доведіть властивість середньої лінії трикутника. ○ Сформулюйте властивість медіан трикутника.

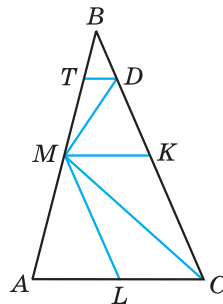


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 9.1. (Усно.) Які відрізки на малюнку 9.6 є середніми лініями трикутника ABC , де $AM = MB$, $BK = KC$, $AL = LC$?

9.2. Накресліть довільний тупокутний трикутник MNK і його найбільшу середню лінію.

9.3. Накресліть рівнобедрений трикутник ABC і його середню лінію, кінці якої належать бічним сторонам.



Мал. 9.6

- 9.4. KL – середня лінія трикутника ABC (мал. 9.2).
 1) $AB = 16$ см. Знайдіть KL ;
 2) $KL = 5$ дм. Знайдіть AB .
- 9.5. KL – середня лінія трикутника ABC (мал. 9.2).
 1) $AB = 18$ см. Знайдіть KL ;
 2) $KL = 3$ дм. Знайдіть AB .
- 2** 9.6. Відрізок, що сполучає середини бічних сторін рівнобедреного трикутника, дорівнює 7 см. Знайдіть основу трикутника.
- 9.7. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 14 дм. Знайдіть довжину відрізка, що сполучає середини бічних сторін трикутника.
- 9.8. Знайдіть периметр трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють 7 см, 8 см і 10 см.
- 9.9. Сторони трикутника дорівнюють 12 дм, 16 дм і 18 дм. Знайдіть периметр трикутника, сторонами якого є середні лінії цього трикутника.
- 9.10. Дано: ED – середня лінія трикутника ABC , $E \in AC$, $D \in BC$.
 Довести: $\angle CED = \angle CAB$.
- 9.11. (Усно.) Визначте вид трикутника, якщо:
 1) дві його середні лінії рівні між собою;
 2) три його середні лінії рівні між собою.
- 9.12. Дано трикутник, периметр якого дорівнює 24 см. Знайдіть периметр трикутника, вершини якого є серединами сторін цього трикутника.
- 9.13. Периметр трикутника, вершини якого – середини сторін заданого трикутника, дорівнює 18 см. Знайдіть периметр цього трикутника.
- 3** 9.14. Сторони трикутника відносяться як 4 : 3 : 5. Знайдіть його сторони, якщо периметр трикутника, утвореного середніми лініями заданого трикутника, дорівнює 60 см.
- 9.15. Периметр трикутника дорівнює 80 см. Сторони трикутника, утвореного середніми лініями заданого трикутника, відносяться як 4 : 9 : 7. Знайдіть сторони цього трикутника.
- 9.16. Сторона трикутника дорівнює 10 см, а одна із середніх ліній – 6 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо одна з них у 1,5 раза більша за другу. Скільки випадків слід розглянути?
- 9.17. E , F , G , H – середини сторін AB , BC , CD і DA опуклого чотирикутника $ABCD$. Знайдіть периметр чотирикутника $EFGH$, якщо $AC = 16$ см, $BD = 10$ см.
- 9.18. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін цього прямокутника.
- 9.19. O – точка перетину діагоналей ромба $ABCD$. Точки M і K – середини сторін AD і DC відповідно. Доведіть, що $MK \perp OD$.
- 9.20. AK – медіана рівнобедреного трикутника ABC з основою BC . Точки P і F – середини сторін AB і AC відповідно. Доведіть, що $PF \perp AK$.

9.21. Доведіть, що коли два трикутники рівні, то рівні й трикутники, вершинами яких є середини сторін цих трикутників.

4

9.22. Точка M – середина катета AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$). Відстань від точки M до гіпотенузи дорівнює a см. Знайдіть гіпотенузу.

9.23. Точка K – середина катета BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою $AB = 20$ см. Знайдіть відстань від точки K до гіпотенузи.

9.24. Доведіть, що середини сторін ромба є вершинами прямокутника.

9.25. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) M – точка перетину медіан. Відомо, що $AM = 8$ см. Знайдіть відстань від середини бічної сторони до основи трикутника.

9.26. Середина бічної сторони рівнобедреного трикутника KLM ($KL = KM$) віддалена від основи трикутника на 9 см. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до вершини K .



Вправи для повторення

9.27. У трикутнику ABC : $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, O – центр описаного кола. Знайдіть $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$.

9.28. Одна з діагоналей ромба утворює зі стороною кут 30° , а друга діагональ дорівнює 7 см. Знайдіть периметр ромба.

9.29. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють a і b ($a > b$), а гострий кут – 60° . Знайдіть:

- 1) бічну сторону трапеції;
- 2) периметр трапеції;
- 3) умову, за якої в трапецію можна вписати коло.



Життєва математика

9.30. Обчисліть, скільки кубічних метрів повітря очистять за рік від автомобільних вихлопних газів 50 каштанів, посаджених уздовж дороги. Відомо, що одне дерево за рік очищує зону 100 м завдовжки, 12 м завширшки, 10 м заввишки.



Цікаві задачі – поміркуй окремо

9.31. Чи існує трикутник, дві бісектриси якого взаємно перпендикулярні?

§ 10. Середня лінія трапеції, її властивість

Середньою лінією трапеції називають відрізок, що сполучає середини її бічних сторін.

Розглянемо властивість середньої лінії трапеції.



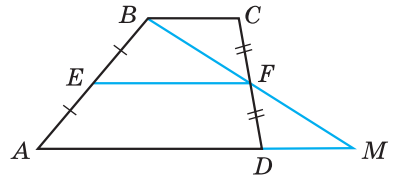
Теорема (властивість середньої лінії трапеції). Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їхній півсумі.

Доведення. Нехай $ABCD$ – дана трапеція, EF – її середня лінія (мал. 10.1). Доведемо, що $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$ і $EF = \frac{AD + BC}{2}$.

1) Проведемо промінь BF до його перетину з променем AD . Нехай M – точка їхнього перетину. Тоді $\angle BCF = \angle MDF$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AM та січній CD), $\angle CFB = \angle DFM$ (як вертикальні кути), $CF = FD$ (за умовою). Отже, $\triangle CFB = \triangle DFM$ (за стороною і двома прилеглими кутами), звідки $BF = FM$, $BC = DM$ (як відповідні сторони рівних трикутників).

2) Оскільки $BF = FM$, то EF – середня лінія трикутника ABM . Тоді, за властивістю середньої лінії трикутника, $EF \parallel AM$, отже, $EF \parallel AD$. А оскільки $AD \parallel BC$, то $EF \parallel BC$.

3) Окрім того, $EF = \frac{1}{2} AM = \frac{AD + DM}{2} = \frac{AD + BC}{2}$. ■



Мал. 10.1

Приклад 1. Довести, що відрізок середньої лінії трапеції, який міститься між її діагоналями, дорівнює піврізниці основ.

Доведення. Нехай EF – середня лінія трапеції $ABCD$, M – точка перетину AC і EF , N – точка перетину BD і EF (мал. 10.2). Нехай

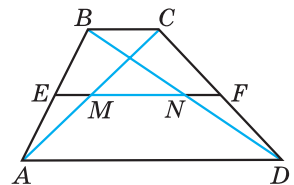
$AD = a$, $BC = b$. Доведемо, що $MN = \frac{a - b}{2}$.

1) Оскільки $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$ і $AE = BE$, то, за теоремою Фалеса: M – середина AC , N – середина BD . Тому EM – середня лінія трикутника ABC , NF – середня лінія трикутника DBC .

Тоді $EM = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}$, $NF = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}$.

2) EF – середня лінія трапеції, тому $EF = \frac{a + b}{2}$.

3) $MN = EF - (EM + NF) = \frac{a + b}{2} - \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \right) = \frac{a - b}{2}$. ■



Мал. 10.2

Приклад 2. У рівнобічній трапеції діагональ ділить гострий кут навпіл. Знайти середню лінію трапеції, якщо її основи відносяться як 3 : 7, а периметр – 48 см.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – дана трапеція, $BC : AD = 3 : 7$, $\angle CAD = \angle BAC$, EF – середня лінія (мал. 10.3).

1) Позначимо $BC = 3x$, $AD = 7x$. Тоді

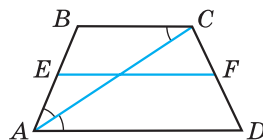
$$EF = \frac{AD + BC}{2} = \frac{7x + 3x}{2} = \frac{10x}{2} = 5x \text{ (см).}$$

2) $\angle CAD = \angle BCA$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AD і BC та січній AC). $\angle CAD = \angle BAC$ (за умовою). Тому $\angle BCA = \angle BAC$. Отже, $\triangle BAC$ – рівнобедрений (за ознакою рівнобедреного трикутника). Тоді $AB = BC$. Але $AB = CD$ (за умовою). Отже, $AB = BC = CD = 3x$ (см).

3) Оскільки $P_{ABCD} = 48$ см, маємо рівняння:

$$7x + 3x + 3x + 3x = 48, \text{ звідки } x = 3 \text{ (см).}$$

4) Тоді $EF = 5 \cdot 3 = 15$ (см).



Мал. 10.3

А ще раніше...

Те, що середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ, було відомо ще давнім єгиптянам; цю інформацію містив папірус Ахмеса (близько XVII ст. до н. е.).

Про властивість середньої лінії трапеції знали й вавилонські землеміри; про неї також згадується й у працях Герона Александрійського (перша половина I ст. н. е.).



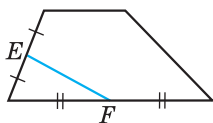
Що називають середньою лінією трапеції? Сформулюйте й доведіть властивість середньої лінії трапеції.



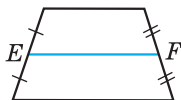
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

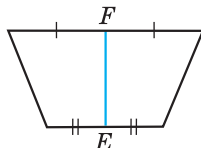
10.1. (Усно.) На яких малюнках (10.4–10.7) відрізок EF є середньою лінією трапеції?



Мал. 10.4



Мал. 10.5



Мал. 10.6



Мал. 10.7

10.2. Основи трапеції дорівнюють 7 см і 5 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

10.3. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її основи дорівнюють 8 см і 12 см.

2

10.4. Знайдіть основу трапеції, якщо її друга основа дорівнює 8 см, а середня лінія – 6 см.

- 10.5.** Одна з основ трапеції дорівнює 4 см, а середня лінія – 9 см. Знайдіть другу основу трапеції.
- 10.6.** Одна з основ трапеції дорівнює 8 см, а друга – удвічі більша за неї. Знайдіть відстань між серединами бічних сторін трапеції.
- 10.7.** Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище видатної української легкоатлетки, рекорд світу якої з потрійних стрибків тримався 26 років. Знайдіть в інтернеті інформацію про інші видатні досягнення українських спортсменок і спортсменів.



AB і CD — основи трапеції $ABCD$, середня лінія якої дорівнює 30 см. Знайдіть AB і CD , якщо:						AB	CD
$AB - CD = 8$ см						В	А
AB у 4 рази менша від CD						К	Ц
$AB : CD = 3 : 2$						Е	Р

12 см	24 см	26 см	34 см	36 см	48 см	
						Ь

- 10.8.** Середня лінія трапеції дорівнює 16 см. Знайдіть основи трапеції, якщо:
- одна з них на 2 см менша від іншої;
 - одна з них утричі більша за іншу;
 - їх відношення дорівнює 3 : 5.
-  **10.9.** K – точка перетину діагоналі BD трапеції $ABCD$ з її середньою лінією MN . Доведіть, що $BK = KD$.
- 10.10.** Бічні сторони трапеції дорівнюють 7 см і 9 см, а її середня лінія – 10 см. Знайдіть периметр трапеції.
- 10.11.** Бічні сторони трапеції дорівнюють 10 см і 12 см, а її периметр – 52 см. Знайдіть середню лінію трапеції.
- 3** **10.12.** Чи може середня лінія трапеції:
- дорівнювати одній з основ;
 - бути меншою від меншої основи;
 - бути більшою за більшу основу;
 - бути вдвічі меншою від більшої основи?
- 10.13.** EF – середня лінія трапеції $ABCD$, яка перетинає діагональ BD в точці N , $EN = 5$ см, $NF = 3$ см. Знайдіть основи трапеції.
- 10.14.** MN – середня лінія трапеції $ABCD$, яка перетинає діагональ AC в точці K . Знайдіть MK і KN , якщо основи трапеції дорівнюють 18 см і 12 см.
- 10.15.** У трапеції $ABCD$ $AD = 30$ см, $BC = 12$ см – основи, а точки E і T – середини AB і AE відповідно. Через E і T проведено прями, паралельні AD . Знайдіть відрізки цих прямих, що містяться між бічними сторонами трапеції.

- 10.16.** У трапеції $ABCD$ M – середина бічної сторони AB , N – середина MB . Через точки M і N проведено прямі, паралельні BC , які перетинають CD в точках K і L відповідно. $MK = 12$ см, $NL = 8$ см. Знайдіть основи трапеції.
- 10.17.** У рівнобічній трапеції $ABCD$ перпендикуляр, проведений з вершини B до більшої основи AD трапеції, ділить її на відрізки 3 см і 7 см. Знайдіть середню лінію трапеції.
- 10.18.** З вершини B тупого кута рівнобічної трапеції $ABCD$ проведено висоту BK до основи AD , $AK = 4$ см, $BC = 6$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.
- 10.19.** Точки A і B лежать по один бік від прямої l . Відстань до неї від точки A дорівнює 7 см, а від точки M , яка є серединою AB , – 5 см. Знайдіть відстань від точки B до прямої l .
- 10.20.** По один бік від прямої a на відстані 10 см і 16 см від неї позначено точки M і N . Знайдіть відстань від середини відрізка MN до прямої a .
- 10.21.** Основи трапеції дорівнюють 6 см і 14 см. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на три частини. Знайдіть довжини цих частин.
- 10.22.** Діагоналі ділять середню лінію трапеції на три частини, довжини яких 7 см, 8 см і 7 см. Знайдіть основи трапеції.
- 10.23.** У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 135^\circ$, $AB = 6$ см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її діагональ перпендикулярна до бічної сторони.
- 10.24.** Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл тупий кут трапеції, а її середню лінію – на відрізки 4 см і 6 см. Знайдіть периметр трапеції.
- 10.25.** Діагональ рівнобічної трапеції ділить її гострий кут навпіл, а середню лінію – на відрізки 3 см і 7 см. Знайдіть периметр трапеції.



Вправи для повторення

- 10.26.** Знайдіть кути M і N чотирикутника $MNKL$, вписаного в коло, якщо $\angle K = 37^\circ$, $\angle L = 119^\circ$.
- 10.27.** Коло вписано в рівнобічну трапецію, бічна сторона якої дорівнює a см. Знайдіть периметр трапеції.
- 10.28.** У прямокутній трапеції тупий кут дорівнює 120° , більша основа – 14 см, а більша бічна сторона – 8 см. Знайдіть меншу основу трапеції.



Життєва математика

- 10.29.** Ширина захвату сівалки становить 2 м, рухається вона зі швидкістю 6 км/год. Норма висіву насіння – 150 кг на 1 га.
- 1) Запишіть формулу залежності витрати насіння m (у кг) від часу t (у год).
 - 2) На який час роботи сівалки вистачить 270 кг насіння?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 10.30. Усі стінки й дно картонної коробки без кришки мають форму квадрата зі стороною a . Розріжте розгортку коробки двома розрізами так, щоб з отриманих частин можна було скласти квадрат, площа якого дорівнює $5a^2$.

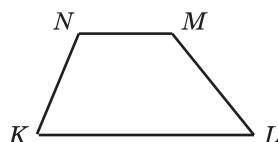
ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2 (§§ 6–10)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. На малюнку 1 зображено трапецію. Укажіть її основи.

- А. KN і ML Б. KL і MN
В. KN і MN Г. ML і MN



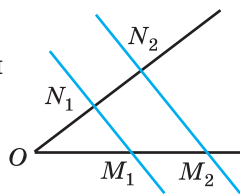
Мал. 1

2. Середня лінія рівностороннього трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть сторону цього трикутника.

- А. 3 см Б. 9 см В. 12 см Г. 18 см

3. На малюнку 2 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 = N_1N_2$, $OM_2 = 16$ см. Знайдіть M_1M_2 .

- А. 4 см Б. 8 см
В. 6 см Г. Знайти неможливо



Мал. 2

2

4. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло, $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 100^\circ$. Знайдіть кути C і D цього чотирикутника.

- А. $\angle C = 80^\circ$, $\angle D = 160^\circ$ Б. $\angle C = 150^\circ$, $\angle D = 80^\circ$
В. $\angle C = 20^\circ$, $\angle D = 100^\circ$ Г. $\angle C = 160^\circ$, $\angle D = 80^\circ$

5. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см, а бічна сторона – 10 см. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін заданого трикутника.

- А. 11 см Б. 12 см В. 14 см Г. 16 см

6. Середня лінія трапеції дорівнює 20 см, а її основи відносяться як 2 : 3. Знайдіть довжину меншої основи.

- А. 16 см Б. 24 см В. 18 см Г. 8 см

3

7. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі й утворює з нею кут 30° . Знайдіть тупий кут трапеції.

- А. 110° Б. 95° В. 105° Г. 115°

8. Коло вписано в рівнобічну трапецію, бічна сторона якої дорівнює 10 см. Знайдіть периметр трапеції.

- А. 50 см Б. 20 см В. 30 см Г. 40 см

9. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 60° , а більша бічна сторона й менша основа – по 18 см. Знайдіть більшу основу трапеції.

- А. 36 см Б. 24 см В. 27 см Г. 30 см

10. Діагональ рівнобічної трапеції ділить її гострий кут навпіл, а середню лінію – на відрізки 4 см і 5 см. Знайдіть периметр трапеції.

- А. 32 см Б. 34 см В. 36 см Г. 38 см

11. Точка N – середина медіани AD трикутника ABC . BN перетинає AC у точці F . Знайдіть AF , якщо $AC = 18$ см.

- А. 6 см Б. 9 см В. 3 см Г. 2 см

12. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 36 см. Знайдіть відстань від середини катета до гіпотенузи.

- А. 12 см Б. 6 см В. 18 см Г. 9 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

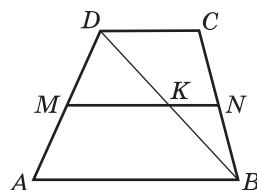
13. MN – середня лінія трапеції $ABCD$ (мал. 3), $MN = 8$ см, $AB = 10$ см. Установіть відповідність між відрізками (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).

Відрізок

Довжина відрізка

1. DC
2. MK
3. KN

- А. 3 см
Б. 4 см
В. 5 см
Г. 6 см



Мал. 3

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 6–10

1. Накресліть трапецію $MKPF$ ($MK \parallel PF$). Укажіть її основи та бічні сторони.

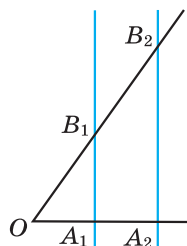
2. Середня лінія рівностороннього трикутника дорівнює 4 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

3. На малюнку 1 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $OB_1 = B_1B_2$, $OA_1 = 2$ см. Знайдіть OA_2 .

4. Знайдіть кути A і B чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle C = 140^\circ$, $\angle D = 70^\circ$.

5. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 12 см і 16 см. Знайдіть периметр трикутника, сторонами якого є середні лінії даного трикутника.

6. Середня лінія трапеції дорівнює 8 см. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них на 4 см більша за іншу.



Мал. 1

7. Коло вписано в рівнобічну трапецію, периметр якої 20 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

8. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 60° , а більша бічна сторона й більша основа дорівнюють по 12 см. Знайдіть меншу основу.

- 4 9. Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл її тупий кут, а середню лінію – на відрізки 9 см і 7 см. Знайдіть периметр трапеції.

Додаткові завдання

- 4 10. Точки K, L, M ділять медіану BD трикутника ABC на чотири рівні частини ($BK = KL = LM = MD$). AM перетинає BC в точці F . Знайдіть $CF : FB$.

11. Точка D – середина катета BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$). Відстань від точки D до гіпотенузи трикутника на 15 см менша від гіпотенузи. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

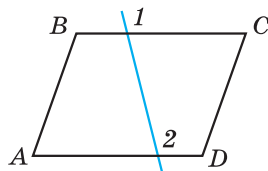
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1

- 1 1. Накресліть чотирикутник $AMCN$. Запишіть вершини, сторони та кути цього чотирикутника.
- 2 2. Чи можуть у чотирикутнику три кути бути прямими, а четвертий:
1) гострим; 2) тупим?
3. Два кути чотирикутника дорівнюють 40° і 80° , а два інших між собою рівні. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.
- 3 4. Запишіть усі можливі варіанти позначення чотирикутника $ABCD$.
5. Один з кутів чотирикутника на 10° менший від другого, на 50° менший від третього й удвічі менший від четвертого. Знайдіть кути чотирикутника.
- 4 6. Усі сторони чотирикутника між собою рівні. Доведіть, що сума будь-яких двох сусідніх кутів цього чотирикутника дорівнює 180° .

До § 2

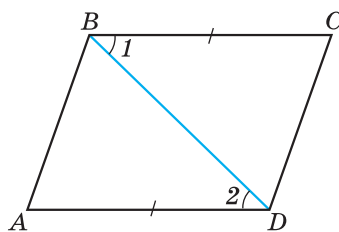
- 1 7. Накресліть паралелограм $KMTL$, у якого кут K – тупий. Проведіть діагоналі паралелограма й позначте їхню точку перетину через O . Укажіть на малюнку пари рівних між собою відрізків.



Мал. 1

8. На малюнку 1 $ABCD$ – паралелограм, $\angle 1 = 105^\circ$. Знайдіть $\angle 2$.
- 2 9. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle B + \angle C = 180^\circ$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ – паралелограм.

10. На малюнку 2 $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 2

3 11. Прямі a і b перетинаються. Побудуйте паралелограм так, щоб його діагоналі лежали на цих прямих.

12. Дано паралелограм $ABCD$ і трикутник ENM . Чи можливо, щоб одночасно виконувалися рівності $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle M$?

13. У паралелограмі $ABCD$ точка M – середина AD , N – середина BC . Доведіть, що відрізки AN і BM точкою перетину діляться навпіл.

14. Дано три точки, що не лежать на одній прямій. Скільки паралелограмів з вершинами в цих точках можна побудувати?

4 15. Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з однієї вершини, дорівнює куту паралелограма при сусідній вершині.

16. Доведіть, що бісектриси протилежних кутів паралелограма або паралельні, або збігаються.

17. Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 30° . Знайдіть ці висоти, якщо сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 20 см.

18. Побудуйте паралелограм за двома непаралельними сторонами й висотою, проведеною до однієї з них.

До § 3

1 19. Накресліть прямокутник зі сторонами 3 см і 5 см та знайдіть його периметр.

2 20. У чотирикутнику точка перетину діагоналей ділить діагоналі на чотири рівних між собою відрізки. З'ясуйте вид чотирикутника.

21. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає продовження сторони DC у точці N . Знайдіть $\angle AND$.

3 22. Побудуйте прямокутник за:

- 1) стороною і діагоналлю;
- 2) діагоналлю й кутом, який вона утворює з однією зі сторін;
- 3) діагоналлю й кутом між діагоналями.

23. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає сторону CD у точці M . Знайдіть периметр прямокутника, якщо $DM = 5$ см, $MC = 2$ см.

4 24. Точка перетину діагоналей прямокутника розміщена від меншої сторони на 2 см далі, ніж від більшої. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 56 см.

25. Перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута прямокутника до діагоналі, ділить її у відношенні 1 : 3. Знайдіть меншу сторону прямокутника, якщо діагональ дорівнює a см.

26. Бісектриси кутів A і D прямокутника $ABCD$ перетинають його сторону BC у точках L і K відповідно, $BL = 7$ см, $LK = 2$ см. Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$. Скільки випадків слід розглянути?

До § 4

- 1 27. Накресліть ромб $MKLN$ з тупим кутом M та проведіть у ньому висоти MA і MB .
- 2 28. У ромбі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O , $\angle BAO = 25^\circ$. Знайдіть кути ромба.
29. Знайдіть кути ромба, якщо відношення двох з них дорівнює $2 : 3$.
- 3 30. У ромбі $ABCD$ з вершини гострого кута A проведено висоти AM і AN . Доведіть, що $AM = AN$.
31. Діагоналі паралелограма взаємно перпендикулярні, а його периметр дорівнює m см. Знайдіть сторони паралелограма.
32. Кут між продовженням висоти ромба, проведеної з вершини гострого кута, і продовженням діагоналі, що сполучає вершини тупих кутів, дорівнює 40° . Знайдіть кути ромба.
- 4 33. Висота ромба дорівнює 10 см, а його периметр – 80 см. Знайдіть:
1) кути ромба;
2) кут між висотою, проведеною з вершини тупого кута ромба, і його меншою діагоналлю.
34. Побудуйте ромб за діагоналлю й висотою.
35. На сторонах прямокутника зовні нього побудовано рівносторонні трикутники. Доведіть, що вершини трикутників є вершинами ромба.

До § 5

- 1 36. Накресліть квадрат, сторона якого дорівнює 3 см. Знайдіть периметр квадрата.
- 2 37. Різниця між периметром квадрата та сумою трьох його сторін дорівнює 8 см. Знайдіть сторону квадрата і його периметр.
- 3 38. У задане коло, положення центра якого відоме, впишіть квадрат.
39. Діагональ прямокутника ділить його кут навпіл. Чи є прямокутник квадратом?
- 4 40. На сторонах AB , BC , CD , DA квадрата $ABCD$ позначено точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 так, що $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Визначте вид чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$.
41. У квадрат вписано прямокутник так, що на кожній стороні квадрата лежить по одній вершині прямокутника, а сторони прямокутника паралельні діагоналям квадрата. Знайдіть периметр прямокутника, якщо діагональ квадрата дорівнює d см.

До § 6

- 1** 42. Накресліть прямокутну трапецію $NMLK$ і рівнобічну $DCFH$. Укажіть основи трапецій та їхні бічні сторони.
- 2** 43. Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, основи якої 8 см і 5 см, а бічні сторони дорівнюють меншій основі.
44. У рівнобічній трапеції один з кутів на 20° більший за другий. Знайдіть кути трапеції.
45. У прямокутній трапеції більша бічна сторона вдвічі більша за висоту. Знайдіть кути трапеції.
46. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо протилежні її кути відносяться як 4 : 5.
- 3** 47. У трапеції $ABCD$ з більшою основою AD через точку K – середину CD – проведено пряму BK , що перетинає пряму AD у точці M . Доведіть, що $\triangle BKC = \triangle MKD$.
48. Висота прямокутної трапеції, проведена з вершини тупого кута, утворює з бічною стороною кут 30° і ділить навпіл більшу основу. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо більша бічна сторона дорівнює m см.
49. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута, а її основи дорівнюють 10 см і 6 см. Знайдіть периметр трапеції.
50. $ABCD$ – прямокутна трапеція, $\angle D = \angle C = 90^\circ$, AD – більша основа, $\angle BDC = 45^\circ$, $\angle ABD = 90^\circ$, $AD = 10$ см. Знайдіть BC і CD .
51. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює 5 см, бічна сторона – 3 см, а кут між бічною стороною і більшою основою дорівнює 60° . Знайдіть периметр трапеції.
- 4** 52. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі, а бічна сторона – меншій. Знайдіть кути трапеції.
53. Побудуйте трапецію за основами та діагоналями.
54. У трапеції $ABCD$ BC – менша основа. Через точку C проведено пряму, паралельну AB , що перетинає AD у точці E . Знайдіть периметр трикутника ECD , якщо периметр трапеції дорівнює 56 см, а $BC = 10$ см.

До § 7

- 1** 55. Чи можна вписати коло в чотирикутник $ABCD$, якщо:
1) $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $CD = 4$ см, $DA = 6$ см;
2) $AB = 3$ дм, $BC = 7$ дм, $CD = 8$ дм, $DA = 10$ дм?
- 2** 56. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого в порядку слідування відносяться як:
1) $2 : 7 : 10 : 5$; 2) $3 : 5 : 8 : 4$?
57. $ABCD$ – чотирикутник, описаний навколо кола, $AB = 3$ см, $BC = 9$ см, $CD = 10$ см. Знайдіть AD .
- 3** 58. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle ADC = 80^\circ$, $\angle BDC = 30^\circ$. Знайдіть $\angle BAC$.

59. Три кути чотирикутника, вписаного в коло, відносяться в порядку слідування як $3 : 4 : 6$. Знайдіть кути чотирикутника.

4 60. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло, причому AC є діаметром кола. Точка O – точка перетину діагоналей. Знайдіть $\angle AOD$, якщо $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle CAD = 58^\circ$.

61. Гострий кут прямокутної трапеції, описаної навколо кола, у 5 разів менший від тупого. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша бічна сторона дорівнює a см.

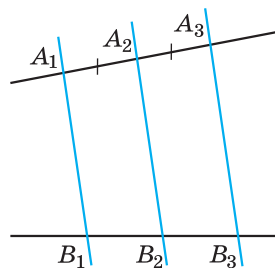
До § 8

1 62. На малюнку 3 прямі A_1B_1 , A_2B_2 і A_3B_3 – паралельні, $A_1A_2 = A_2A_3$. Знайдіть на цьому малюнку й іншу пару рівних між собою відрізків.

2 63. Поділіть даний відрізок на 9 рівних частин (не використовувати лінійку з поділками).

3 64. Поділіть даний відрізок на 3 частини, довжини яких відносяться як $3 : 1 : 2$ (не використовувати лінійку з поділками).

4 65. Точка K ділить медіану AN трикутника ABC у відношенні $2 : 1$, починаючи від точки A . Доведіть, що пряма CK ділить сторону AB навпіл.



Мал. 3

До § 9

1 66. Відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника, дорівнює 5 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

67. Побудуйте довільний прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) і його найбільшу середню лінію.

2 68. EF – середня лінія трикутника ABC ($E \in AC$, $F \in BC$), $CE = 3$ см, $CF = 5$ см, $EF = 7$ см. Знайдіть периметр трикутника ABC .

69. Одна із середніх ліній рівностороннього трикутника дорівнює 2 см. Знайдіть периметр трикутника.

70. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 7 см, а периметр – 20 см. Знайдіть середню лінію, кінці якої належать бічним сторонам.

71. Точки D , E , F – відповідно середини сторін AB , BC і CA трикутника ABC . Доведіть, що чотирикутник $DEFA$ – паралелограм.

3 72. Сторона трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо одна з його середніх ліній дорівнює 5 см, а периметр трикутника, утвореного його середніми лініями, дорівнює 18 см.

73. У трикутнику проведено середні лінії. Периметри паралелограмів, що утворилися при цьому, дорівнюють 22 см, 24 см і 26 см. Знайдіть периметр заданого трикутника та трикутника, який утворюють середні лінії.

4 74. Побудуйте трикутник за трьома точками – серединами його сторін.

75. Послідовно сполучили середини сторін квадрата, діагональ якого дорівнює d см. Визначте вид чотирикутника, що при цьому утворився, та обчисліть його периметр.

До § 10

1 76. Накресліть трапецію $ABCD$ та її середню лінію EF . Виміряйте основи трапеції та обчисліть довжину її середньої лінії.

2 77. Сума бічних сторін трапеції дорівнює 17 см, а середня лінія – 8 см. Знайдіть периметр трапеції.

78. Різниця основ трапеції дорівнює 2 см, а середня лінія – 14 см. Знайдіть основи трапеції.

3 79. Основи трапеції дорівнюють 20 см і 12 см. Бічну сторону трапеції поділено на 4 рівні частини й через точки поділу проведено прямі, паралельні основам. Знайдіть відрізки цих прямих, що містяться між сторонами трапеції.

80. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія, 18 см завдовжки, поділяється діагоналлю на відрізки, один з яких удвічі більший за другий.

81. Середня лінія трапеції втричі більша за меншу основу й на 12 см менша від більшої основи. Знайдіть основи трапеції.

4 82. Середня лінія трапеції діагоналями ділиться на відрізки, відношення яких дорівнює $2 : 3 : 2$. Знайдіть відношення основ трапеції.

83. Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то її висота дорівнює середній лінії.

84. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює a см, бічна сторона – c см, а гострий кут – 60° . Знайдіть середню лінію трапеції.



Головне в розділі I

ЧОТИРИКУТНИК, ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. СУМА КУТІВ ЧОТИРИКУТНИКА

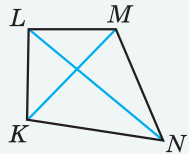
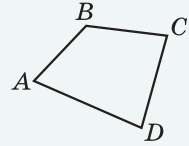
Чотирикутник – фігура, що складається із чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають.

Відрізки, які сполучають протилежні вершини чотирикутника, – **діагоналі** чотирикутника.

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360° .

Якщо всі кути чотирикутника менші від 180° , то він **опуклий**.

Якщо один з кутів чотирикутника більший за 180° , то він **неопуклий**.



ПАРАЛЕЛОГРАМ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ Й ОЗНАКИ

Паралелограм – чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180° .

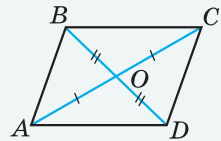
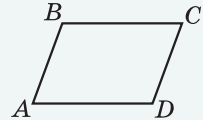
2. Паралелограм є опуклим чотирикутником.

3. У паралелограмі протилежні сторони рівні й протилежні кути рівні.

4. Периметр паралелограма

$$P_{ABCD} = 2(AB + BC).$$

5. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.



Висота паралелограма – перпендикуляр, проведений з будь-якої точки сторони паралелограма до прямої, що містить протилежну сторону.

Теорема (ознаки паралелограма). Якщо в чотирикутнику: 1) дві сторони рівні й паралельні, або 2) протилежні сторони попарно рівні, або 3) діагоналі перетинаються й точкою перетину діляться навпіл, або 4) протилежні кути попарно рівні, – то чотирикутник є паралелограмом.

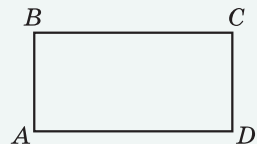
ПРЯМОКУТНИК І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Прямокутник – це паралелограм, у якого всі кути прямі.

1. У прямокутнику протилежні сторони рівні.

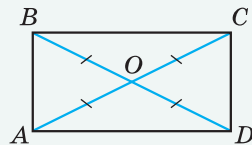
2. Периметр прямокутника $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.

3. Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл.



4. Діагоналі прямокутника рівні.
5. Точка перетину діагоналей прямокутника рівновіддалена від усіх його вершин.

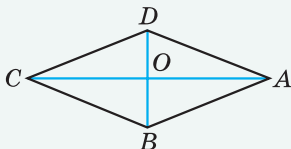
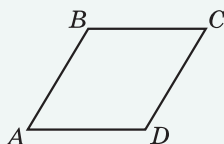
Теорема (ознаки прямокутника). Якщо в паралелограмі: 1) усі кути рівні, або 2) один кут прямий, або 3) діагоналі рівні, – то паралелограм є прямокутником.



РОМБ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів ромба дорівнює 180° .
2. У ромба протилежні кути рівні.
3. Діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл.
4. Периметр ромба $P_{ABCD} = 4AB$.
5. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні й ділять його кути навпіл.

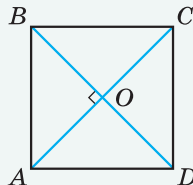
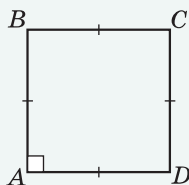


Теорема (ознаки ромба). Якщо в паралелограмі: 1) дві сусідні сторони рівні, або 2) діагоналі перетинаються під прямим кутом, або 3) діагональ ділить навпіл кути паралелограма, – то паралелограм є ромбом.

КВАДРАТ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні.

1. Усі кути квадрата прямі.
2. Периметр квадрата $P_{ABCD} = 4AB$.
3. Діагоналі квадрата між собою рівні.



4. Діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні й точкою перетину діляться навпіл.
5. Діагоналі квадрата ділять його кути навпіл, тобто утворюють кути 45° зі сторонами квадрата.
6. Точка перетину діагоналей квадрата рівновіддалена від усіх його вершин: $AO = BO = CO = DO$.

Теорема (ознаки квадрата). 1) Якщо діагоналі прямокутника взаємно перпендикулярні, то він є квадратом. 2) Якщо діагоналі ромба між собою рівні, то він є квадратом.

ТРАПЕЦІЯ

Трапеція – це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні.

Паралельні сторони трапеції – **основи**, а непаралельні – **бічні сторони**. На малюнку AD і BC – основи трапеції, AB і CD – її бічні сторони.

1. Сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180° .

2. Трапеція є опуклим чотирикутником.

Висота трапеції – це перпендикуляр, проведений з будь-якої точки основи трапеції до прямої, що містить протилежну основу.

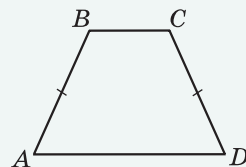
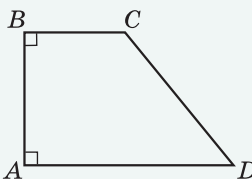
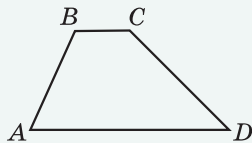
Трапеція **прямокутна**, якщо один з її кутів прямий.

Трапеція **рівнобічна**, якщо її бічні сторони рівні.

1. У рівнобічній трапеції кути при основі між собою рівні.

2. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

Теорема (ознака рівнобічної трапеції). Якщо в трапеції кути при одній основі рівні, то трапеція – рівнобічна.



ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ

Чотирикутник вписаний у коло, якщо всі його вершини лежать на колі. **Коло** при цьому – **описане** навколо чотирикутника.

Теорема 1 (властивість кутів вписаного чотирикутника). Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180° .

Наслідок 1. Якщо навколо трапеції можна описати коло, то вона рівнобічна.

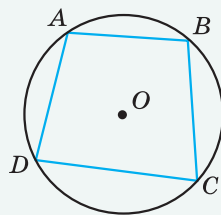
Наслідок 2. Якщо чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло, то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

Теорема 2 (ознака вписаного чотирикутника). Якщо в чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180° , то навколо нього можна описати коло.

Наслідок 1. Якщо у чотирикутника $ABCD$ $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$, то навколо нього можна описати коло.

Наслідок 2. Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.

Наслідок 3. Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло.

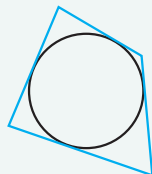


Чотирикутник описаний навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до кола. **Коло** при цьому – **вписане** в чотирикутник.

Теорема 3 (властивість сторін описаного чотирикутника). В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін між собою рівні.

Теорема 4 (ознака описаного чотирикутника). Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло.

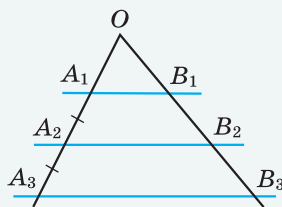
Наслідок. У будь-який ромб можна вписати коло.



ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні між собою відрізки, то вони відтинають рівні між собою відрізки й на другій його стороні.

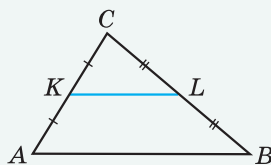
Наслідок. Паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі та відтинають на одній з них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки й на другій прямій.



СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА, ЇЇ ВЛАСТИВІСТЬ

Середня лінія трикутника – це відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

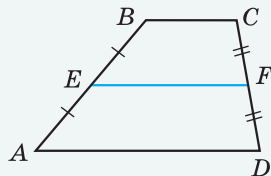
Теорема 1 (властивість середньої лінії трикутника). Середня лінія трикутника, що сполучає середини двох сторін, паралельна третій стороні та дорівнює її половині.



СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРАПЕЦІЇ, ЇЇ ВЛАСТИВІСТЬ

Середня лінія трапеції – це відрізок, що сполучає середини її бічних сторін.

Теорема (властивість середньої лінії трапеції). Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їхній півсумі.



Розділ 2

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

У цьому розділі ви:

- **дізнаєтеся** про подібні трикутники та їхні властивості; про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику та їхні властивості; про властивість бісектриси трикутника;
- **навчитеся** обґрунтовувати подібність трикутників, використовувати узагальнену теорему Фалеса та подібність трикутників для розв'язування задач.



§ 11. Узагальнена теорема Фалеса

1. Відношення та пропорційність відрізків



Відношенням відрізків AB і CD називають відношення їхніх довжин, тобто $\frac{AB}{CD}$.

Кажуть, що відрізки AB і CD пропорційні відрізкам A_1B_1 і C_1D_1 , якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

Наприклад, якщо $AB = 6$ см, $CD = 8$ см, $A_1B_1 = 3$ см, $C_1D_1 = 4$ см, то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, справді $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$.

Поняття пропорційності можна поширити й на більшу кількість відрізків. Наприклад, три відрізки AB , CD і MN пропорційні трьом відрізкам A_1B_1 , C_1D_1 і M_1N_1 , якщо

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MN}{M_1N_1}.$$

2. Узагальнена теорема Фалеса та наслідки з неї



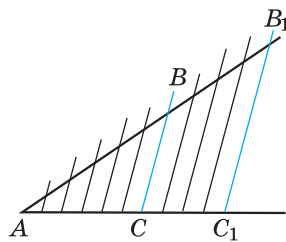
Узагальнена теорема Фалеса (теорема про пропорційні відрізки). Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки.

Доведення. Нехай паралельні прямі BC і B_1C_1 перетинають сторони кута A (мал. 11.1). Доведемо, що $\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}$.

1) Розглянемо випадок, коли довжини відрізків AC і CC_1 є раціональними числами (цілими або дробовими). Тоді існує відрізок завдовжки h , який можна відкласти ціле число разів і на відрізок AC , і на відрізок CC_1 . Нехай $AC = a$, $CC_1 = b$, a і b – раціональні числа. Запишемо їх у вигляді дробу з однаковим знаменником: $AC = \frac{p}{n}$,

$CC_1 = \frac{q}{n}$. Тому $h = \frac{1}{n}$. Маємо: $AC = ph$, $CC_1 = qh$.

2) Розіб'ємо відрізок AC на p рівних частин завдовжки h , а відрізок CC_1 – на q рівних частин завдовжки h . Проведемо через точки розбиття прямі, паралельні прямій BC (мал. 11.1). За теоремою Фалеса, вони розіб'ють відрізок AB_1 на $(p + q)$ рівних відрізків завдовжки h_1 , причому AB складатиметься з p таких відрізків, а BB_1 –



Мал. 11.1

з q таких відрізків. Маємо: $AB = ph_1$, $BB_1 = qh_1$.

3) Знайдемо відношення $\frac{AB}{BB_1}$ і $\frac{AC}{CC_1}$. Матимемо:

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{ph_1}{qh_1} = \frac{p}{q} \quad \text{і} \quad \frac{AC}{CC_1} = \frac{ph}{qh} = \frac{p}{q}.$$

Отже, $\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}$. ■

Враховуючи, що у пропорції середні члени можна поміняти місцями, з доведеної рівності приходимо до такого.

Н Наслідок 1. $\frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}$.

Н Наслідок 2. $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$.

Доведення. Оскільки $\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}$, то $\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}$. Додамо до обох частин цієї рівності по одиниці: $1 + \frac{BB_1}{AB} = 1 + \frac{CC_1}{AC}$, тобто $\frac{AB + BB_1}{AB} = \frac{AC + CC_1}{AC}$.

Враховуючи, що $AB + BB_1 = AB_1$, $AC + CC_1 = AC_1$, матимемо: $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$.

Звідки $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$. ■

3. Побудова четвертого пропорційного відрізка

Розглянемо, як побудувати один із чотирьох відрізків, що утворюють пропорцію, якщо відомо три з них.

Приклад. Дано відрізки a , b , c . Побудувати відрізок $x = \frac{bc}{a}$.

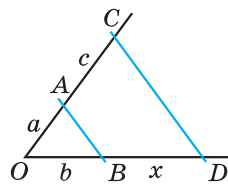
Розв'язання. Оскільки $x = \frac{bc}{a}$, то $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$ і $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Для побудови відрізка x можна використовувати й узагальнену теорему Фалеса, й один з її наслідків.

Використаємо, наприклад, наслідок 1.

1) Будуємо нерозгорнутий кут з вершиною O (мал. 11.2). Відкладаємо на одній з його сторін відрізок $OB = b$, а на другій – відрізки $OA = a$ і $AC = c$.

2) Проведемо пряму AB . Через точку C паралельно AB проведемо пряму, яка перетне сторону OB кута в точці D . Тому $CD \parallel AB$.



Мал. 11.2

3) За наслідком 1 з узагальненої теореми Фалеса, маємо: $\frac{a}{b} = \frac{c}{BD}$,

звідки $BD = \frac{bc}{a}$. Отже, $BD = x$.

Побудований відрізок x називають *четвертим пропорційним відрізком* a , b і c , оскільки справджується рівність $a : b = c : x$.

А ще раніше...

Відношення й пропорції в геометрії використовувалися з давніх-давен. Про це свідчать давньоєгипетські храми, деталі гробниці Менеса в Накаді, піраміди в Гізі (III ст. до н. е.), перські палаці, давньоіндійські пам'ятки тощо.



Гробниця Менеса



Піраміди в Гізі

У сьомій книзі «Начал» Евклід виклав *арифметичну* теорію вчення про відношення, яку застосував тільки до співрозмірних величин і цілих чисел. Теорія виникла на основі дій з дробами та застосовувалася для дослідження властивостей цілих чисел.

У п'ятій книзі Евклід виклав загальну теорію відношень і пропорцій, яку приблизно за 100 років до Евкліда розробив давньогрецький математик, механік і астроном Евдокс (408 р. до н. е. – 355 р. до н. е.). Ця теорія є основою вчення про подібність фігур, яку Евклід виклав у шостій книзі «Начал», де також було розв'язано задачу про ділення відрізка в заданому відношенні.

Пропорційність відрізків прямих, які перетнуто кількома паралельними прямими, була відома ще вавилонським ученим, хоча багато істориків математики вважають, що це відкриття належить Фалесу Мілетському.



Що називають відношенням відрізків? Сформулюйте узагальнену теорему Фалеса.
За якої умови відрізок x є четвертим пропорційним відрізків a , b і c ?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

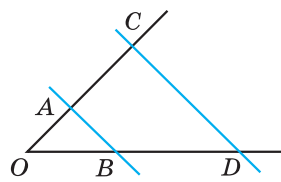
1

11.1. (Усно.) На малюнку 11.3 $AB \parallel CD$.

Які з пропорцій справджуються:

1) $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$; 2) $\frac{AC}{OA} = \frac{OB}{OD}$;

3) $\frac{AC}{OA} = \frac{OB}{BD}$; 4) $\frac{OB}{BD} = \frac{OA}{AC}$?



Мал. 11.3

11.2. На малюнку 11.3 $AB \parallel CD$, $OA = 3$, $AC = 5$, $BD = 10$. Знайдіть OB .

11.3. На малюнку 11.3 $AB \parallel CD$, $OB = 2$, $BD = 3$, $OA = 1$. Знайдіть AC .

2 11.4. Паралельні прямі AB , CD і EF перетинають сторони кута O (мал. 11.4). $AC = 6$ см, $CE = 2$ см, $BD = 5$ см. Знайдіть BF .

11.5. Паралельні прямі AB , CD і EF перетинають сторони кута O (мал. 11.4), $BD = 4$ см, $DF = 2$ см, $CE = 3$ см. Знайдіть AE .

11.6. Паралельні прямі AB , CD і EF перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 11.4). $OA = 3$ см, $AC = 4$ см, $BD = 5$ см, $DF = 2$ см. Знайдіть CE і OB .

11.7. Паралельні прямі AB , CD і EF перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 11.4). $OB = 5$, $BD = 7$, $AC = 4$, $CE = 3$. Знайдіть OA і DF .

3 11.8. Дано відрізки a , b , c . Побудуйте відрізок $x = \frac{ab}{c}$.

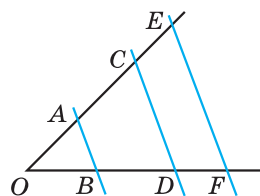
11.9. Дано відрізки l , n , m . Побудуйте відрізок $x = \frac{mn}{l}$.

11.10. На малюнку 11.3 $AB \parallel CD$, $OA = 4$, $AC = 6$. Знайдіть відрізки OB і BD , якщо $OD = 15$.

11.11. На малюнку 11.3 $AB \parallel CD$, $OB = 5$, $BD = 7$. Знайдіть відрізки OA і AC , якщо $AC - OA = 1$.

4 11.12. На стороні AB трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : MB = 1 : 3$. У якому відношенні відрізок CM ділить медіану AP трикутника ABC ?

11.13. AD – медіана трикутника ABC , точка M лежить на стороні AC , відрізок BM ділить AD у відношенні $5 : 3$, починаючи від точки A . Знайдіть $AM : MC$.



Мал. 11.4

Вправи для повторення

11.14. Діагональ чотирикутника дорівнює 5 см, а периметри трикутників, на які вона розбиває чотирикутник, дорівнюють 12 см і 14 см. Знайдіть периметр чотирикутника.

11.15. Тупий кут прямокутної трапеції дорівнює 120° , а менша діагональ трапеції дорівнює більшій бічній стороні. Знайдіть відношення середньої лінії трапеції до більшої бічної сторони.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

11.16. $\triangle ABC = \triangle MKL$. Заповніть пропуски:

- 1) $\angle A = \dots$; 2) $\angle B = \dots$; 3) $\angle C = \dots$;
4) $MK = \dots$; 5) $ML = \dots$; 6) $KL = \dots$.

11.17. Сторони одного трикутника вдвічі більші за відповідні сторони другого трикутника. У скільки разів периметр першого трикутника більший за периметр другого?

- 11.18. Дано: $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$. Відомо, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Чи можна стверджувати, що
 1) $\angle C = \angle C_1$; 2) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$?



Життєва математика

- 11.19. 1) Щоб залити один квадратний метр ковзанки, потрібно 40 л води. Скільки води знадобиться, щоб залити ковзанку прямокутної форми 30 м завдовжки і 20 м завширшки?
 2) Дізнайтеся, скільки коштує 1 м³ води у вашій місцевості. Обчисліть, яку суму потрібно буде сплатити муніципальній владі за спожиту воду.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 11.20. Дано квадрат $ABCD$. Скільки існує точок K у площині цього квадрата таких, що кожний із трикутників ABK , BCK , CDK і ADK – рівнобедрений?

§ 12. Подібні трикутники

У повсякденному житті трапляються предмети однакової форми, але різних розмірів, наприклад, футбольний м'яч та металева кулька, картина та її фотознімок, літак і його модель, географічні карти різного масштабу. У геометрії фігури однакової форми прийнято називати **подібними**. Так, подібними між собою є всі квадрати, усі круги, усі відрізки.

Два **трикутники** називають **подібними**, якщо їхні кути відповідно рівні й сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам іншого.

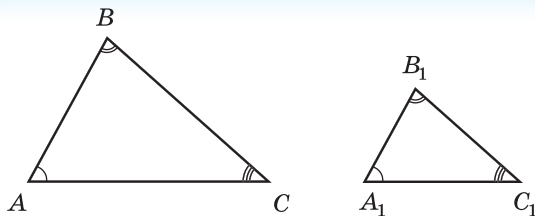
У $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$

$$\angle A = \angle A_1,$$

$$\angle B = \angle B_1,$$

$$\angle C = \angle C_1$$

$$\text{і } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$



Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні між собою, записують:
 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Нехай значення кожного з отриманих відношень відповідних сторін дорівнює k . Число k називають **коефіцієнтом подібності** трикутника ABC до трикутника $A_1B_1C_1$, або коефіцієнтом подібності трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

Зауважимо, якщо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то із співвідношення $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ слідує співвідношення $AB : BC : AC = A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1$.

Задача 1. Довести, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін цих трикутників.

Доведення. Нехай $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$.

1) Тоді $AB = kA_1B_1$, $BC = kB_1C_1$, $AC = kA_1C_1$.

2) Маємо: $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k = \frac{AB}{A_1B_1}$. ■

Задача 2. Сторони трикутника ABC відносяться як 4 : 7 : 9, а більша сторона подібного йому трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 27 см. Знайти інші сторони другого трикутника.

Розв'язання. 1) Оскільки за умовою $AB : BC : AC = 4 : 7 : 9$ і $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1 = 4 : 7 : 9$.

2) Позначимо $A_1B_1 = 4x$, $B_1C_1 = 7x$, $A_1C_1 = 9x$. За умовою $9x = 27$, тоді $x = 3$ (см).

3) Маємо: $A_1B_1 = 4 \cdot 3 = 12$ (см), $B_1C_1 = 7 \cdot 3 = 21$ (см).

Відповідь: 12 см, 21 см.

Зауважимо, що подібні трикутники легко створювати за допомогою сучасних комп'ютерних програм, зокрема графічних редакторів. Для цього достатньо побудований трикутник розтягнути або стиснути, «потягнувши» за один з кутових маркерів.

А ще раніше...

Однакові за формою, але різні за розміром фігури використовували ще у вавилонських та єгипетських пам'ятках архітектури. Так, наприклад, у гробниці батька фараона Рамзеса II є стіна, що вкрита сіткою квадратиків, за допомогою яких на цю стіну переносили в збільшеному вигляді малюнки маленьких розмірів.

Учення про подібні фігури, яке ґрунтувалося на теорії відношень і пропорцій, було створено в Давній Греції у V–IV ст. до н. е. завдяки працям Гіппократа Хіоського, Архита Тарентського, Евдокса та інших. Узагальнив ці відомості Евклід у шостій книзі «Начал». Починається теорія подібності з такого означення:

«Подібні прямолінійні фігури – це ті, які мають відповідно рівні кути й пропорційні сторони».

Наведіть з довкілля приклади предметів однакової форми. Які трикутники називають подібними? Що таке коефіцієнт подібності?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

12.1. (Усно.) Дано: $\triangle ABC \sim \triangle MNK$. Заповніть пропуски:

- 1) $\angle A = \angle \dots$; 2) $\angle B = \angle \dots$; 3) $\angle C = \angle \dots$.

12.2. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle KLM$, $\frac{AB}{KL} = 3$. Заповніть пропуски:

- 1) $\frac{AC}{KM} = \dots$; 2) $\frac{BC}{LM} = \dots$.

12.3. Дано: $\triangle MLF \sim \triangle PNK$. Складіть усі можливі пропорції для сторін трикутників.

2

12.4. Дано: $\triangle MNL \sim \triangle ABC$, $\angle M = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. Знайдіть невідомі кути обох трикутників.

12.5. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\angle A = 40^\circ$, $\angle F = 90^\circ$. Знайдіть невідомі кути обох трикутників.

12.6. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 12$ см, $A_1B_1 = 3$ см. Знайдіть:

- 1) $\frac{A_1C_1}{AC}$; 2) $\frac{B_1C_1}{BC}$.

12.7. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 10$, $BC = 8$, $CA = 6$, $A_1B_1 = 5$. Знайдіть: B_1C_1 , C_1A_1 .

12.8. Дано: $\triangle KLM \sim \triangle K_1L_1M_1$, $KL = 12$, $KM = 9$, $LM = 21$, $K_1L_1 = 4$. Знайдіть: K_1M_1 , L_1M_1 .

3

12.9. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, відтак прочитайте прізвище видатної української фахівчині в царині математики, котра стала другою жінкою у світі, яка отримала найпрестижнішу міжнародну премію для математиків — медаль Філдса.

У трикутнику ABC $AB : BC : CA = 7 : 8 : 9$. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть сторони трикутника $A_1B_1C_1$, якщо його:						A_1B_1	B_1C_1	C_1A_1
менша сторона дорівнює 21 см						В	Я	О
більша сторона на 5 см більша за середню						З	Ь	А
периметр дорівнює 48 см						В	С	К

14 см	24 см	35 см	27 см	21 см	16 см	40 см	18 см	45 см

12.10. Сторони трикутника відносяться як $5 : 6 : 9$. Знайдіть невідомі сторони подібного йому трикутника у випадках, якщо його:

- 1) більша сторона дорівнює 18 см;
2) менша сторона на 3 см менша від середньої;
3) периметр дорівнює 100 см.

12.11. Доведіть, що два рівносторонніх трикутники між собою подібні.

4

12.12. Периметри подібних трикутників відносяться як $2 : 3$, а сума їхніх найбільших сторін дорівнює 20 см. Знайдіть сторони кожного з трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як $2 : 3 : 4$.

12.13. Периметри подібних трикутників відносяться як $4 : 3$, а сума їхніх найменших сторін дорівнює 21 см. Знайдіть сторони кожного з трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як $3 : 4 : 5$.



Вправи для повторення

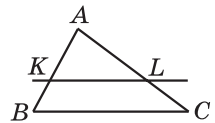
12.14. У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O . Знайдіть усі пари рівних трикутників, що при цьому утворилися.

12.15. Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, належить середній лінії трапеції.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

12.16. На малюнку 12.1 пряма KL паралельна стороні BC рівностороннього трикутника ABC . Знайдіть усі рівні між собою кути на цьому малюнку.



Мал. 12.1



Життєва математика

12.17. Скільки потрібно робітників для перенесення соснової балки розміром $4,5 \text{ м} \times 20 \text{ см} \times 55 \text{ см}$? Кожен робітник може підняти в середньому 70 кг . Щільність сосни – 520 кг/м^3 .



Цікаві задачі – поміркуй одначе

12.18. Точки K і L належать відповідно сторонам AB і AC трикутника ABC . Чи може точка перетину відрізків BL і KC ділити кожний з них навпіл?

§ 13. Ознаки подібності трикутників

1. Лема про властивість прямої, яка паралельна стороні трикутника

Подібність трикутників аналогічно до рівності трикутників можна встановлювати за допомогою ознак.

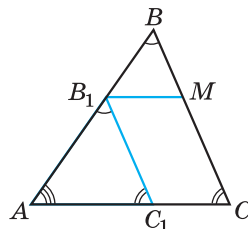
Перш ніж їх розглянути, сформулюємо й доведемо лему, тобто допоміжне твердження, яке є правильним і використовується для доведення однієї або кількох теорем.

Т Лема. Пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.

Доведення. Нехай пряма B_1C_1 перетинає сторони AB і AC трикутника ABC відповідно в точках B_1 і C_1 (мал. 13.1). Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$.

1) Кут A є спільним для обох трикутників, $\angle B = \angle B_1$ (як відповідні кути при паралельних прямих BC і B_1C_1 та січній AB), $\angle C = \angle C_1$ (аналогічно для січної AC). Отже, три кути трикутника ABC дорівнюють відповідним кутам трикутника AB_1C_1 .

2) За наслідком 2 з узагальненої теореми Фалеса маємо: $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$.



Мал. 13.1

3) Доведемо, що $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{AB_1}$. Проведемо через точку B_1 пряму, паралельну AC , що перетинає BC в точці M . Оскільки B_1MCC_1 – паралелограм, то $B_1C_1 = MC$. За узагальненою теоремою Фалеса: $\frac{BM}{MC} = \frac{BB_1}{AB_1}$.

Додамо число 1 до обох частин цієї рівності. Матимемо:

$$\frac{BM}{MC} + 1 = \frac{BB_1}{AB_1} + 1; \quad \frac{BM + MC}{MC} = \frac{BB_1 + AB_1}{AB_1}; \quad \frac{BC}{MC} = \frac{AB}{AB_1}.$$

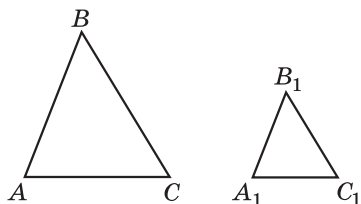
Але $MC = B_1C_1$. Отже, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{AB_1}$.

4) Остаточнo маємо: $\angle A = \angle A$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ і $\frac{AB}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Отже, $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$. ■

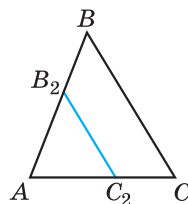
2. Ознака подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними

Т Теорема 1 (ознака подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними). Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого й кути, утворені цими сторонами, між собою рівні, то трикутники подібні.

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (мал. 13.2). Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.



Мал. 13.2



Мал. 13.3

1) Відкладемо на стороні AB трикутника ABC відрізок $AB_2 = A_1B_1$ і проведемо через B_2 пряму, паралельну BC (мал. 13.3). Тоді $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$ (за лемою).

2) За наслідком 2 з узагальненої теореми Фалеса: $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$.

Але $AB_2 = A_1B_1$ (за побудовою). Тому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2}$. За умовою $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, отже, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AC}{AC_2}$ і звідси $A_1C_1 = AC_2$.

3) Оскільки $\angle A = \angle A_1$, $AB_2 = A_1B_1$ і $AC_2 = A_1C_1$, то $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (за двома сторонами й кутом між ними).

4) Але $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$, отже, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ■



Наслідок 1. Прямокутні трикутники подібні, якщо катети одного з них пропорційні катетам другого.



Наслідок 2. Якщо кут при вершині одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при вершині другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.

3. Ознака подібності трикутників за двома кутами



Теорема 2 (ознака подібності трикутників за двома кутами). Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то ці трикутники подібні.

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (мал. 13.2).

1) Виконаємо побудови, аналогічні до тих, що й у доведенні теореми 1 (мал. 13.3). Маємо: $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$.

2) $\angle AB_2C_2 = \angle B$, але $\angle B = \angle B_1$. Тому $\angle AB_2C_2 = \angle B_1$.

3) Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (за стороною і двома прилеглими кутами).

4) Отже, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ■



Наслідок 1. Рівносторонні трикутники подібні.



Наслідок 2. Якщо кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при основі другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.



Наслідок 3. Якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то ці трикутники подібні.

Приклад 1. Сторони паралелограма дорівнюють 15 см і 10 см, а висота, проведена до більшої сторони, – 8 см. Знайти висоту, проведену до меншої сторони.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – паралелограм (мал. 13.4). $AD = 15$ см, $AB = 10$ см, $BM = 8$ см – висота паралелограма.

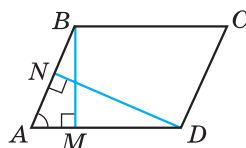
1) Проведемо DN – другу висоту паралелограма.

2) $\triangle ABM \sim \triangle ADN$ (як прямокутні зі спільним

гострим кутом). Тоді $\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{DN}$, тобто $\frac{10}{15} = \frac{8}{DN}$,

звідки $10 \cdot DN = 8 \cdot 15$, отже, $DN = 12$ (см).

Відповідь: 12 см.



Мал. 13.4

4. Ознака подібності трикутників за трьома сторонами



Теорема 3 (ознака подібності трикутників за трьома сторонами). Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то ці трикутники подібні.

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ (мал. 13.2).

1) Виконаємо побудови, аналогічні до тих, що й у доведенні теореми 1 (мал. 13.3). Маємо: $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$.

2) Тоді $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$, але $AB_2 = A_1B_1$, тому

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$. Враховуючи, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, маємо: $AC_2 = A_1C_1$, $B_2C_2 = B_1C_1$.

3) Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (за трьома сторонами).

4) Отже, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ■

Приклад 2. Сторони одного трикутника дорівнюють 9 см, 15 см і 18 см, а сторони другого трикутника відносяться як 3 : 5 : 6. Чи подібні ці трикутники?

Розв'язання. Позначимо сторони другого трикутника через $3x$, $5x$ і $6x$. Оскільки $\frac{9}{3x} = \frac{15}{5x} = \frac{18}{6x} = \frac{3}{x}$, то трикутники подібні (за трьома сторонами).

Відповідь: так.



Сформулюйте й доведіть ознаки подібності трикутників і наслідки з них.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

13.1. (Усно.) За яких умов два трикутники подібні:

- 1) у трикутників є спільний кут;
- 2) два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам іншого;
- 3) дві сторони одного трикутника дорівнюють двом сторонам іншого?

13.2. За яких умов $\triangle ABC \sim \triangle DEF$:

- 1) $\angle A = \angle D$;
- 2) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle D = 50^\circ$, $\angle E = 60^\circ$;
- 3) $AB = 3DE$, $BC = 3EF$;
- 4) $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle D = 40^\circ$, $\angle E = 90^\circ$?

13.3. За яких умов $\triangle ABC \sim \triangle MNK$:

- 1) $AB = MN = 15$ см, $BC = NK = 12$ см;
- 2) $\angle A = \angle M$, $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MK}$;
- 3) $\angle A = 100^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle M = 70^\circ$, $\angle N = 20^\circ$;
- 4) $\angle C = \angle K$, $CB = 5$, $CA = 2$, $KN = 10$, $KM = 4$?

13.4. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, якщо:

- 1) $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = 4$, $A_1B_1 = 4$, $B_1C_1 = 6$, $A_1C_1 = 8$;
- 2) $\angle A = 20^\circ$, $\angle A_1 = 20^\circ$, $AB = 3$, $AC = 5$, $A_1B_1 = 9$, $A_1C_1 = 15$;
- 3) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $\angle B_1 = 40^\circ$, $\angle C_1 = 110^\circ$.

13.5. Доведіть, що $\triangle MNK \sim \triangle M_1N_1K_1$, якщо:

- 1) $\angle M = \angle M_1$, $MN = 5$, $MK = 6$, $M_1N_1 = 10$, $M_1K_1 = 12$;
- 2) $\angle M = 90^\circ$, $\angle N = 50^\circ$, $\angle K_1 = 40^\circ$, $\angle N_1 = 50^\circ$;
- 3) $MN = 3$, $NK = 4$, $MK = 5$, $M_1N_1 = 6$, $N_1K_1 = 8$, $M_1K_1 = 10$.

2

13.6. Прямі AB і CD перетинаються в точці O , $AC \parallel BD$. Доведіть, що $\triangle AOC \sim \triangle BOD$.

13.7. Прямі MN і KL перетинаються в точці O , $\angle MLO = \angle NKO$. Доведіть, що $\triangle MOL \sim \triangle NOK$.

13.8. На сторонах AB і AC трикутника ABC відповідно позначено точки P і L так, що $AP = \frac{1}{3}AB$, $AL = \frac{1}{3}AC$. Доведіть, що $\triangle APL \sim \triangle ABC$.

13.9. На сторонах KL і KN трикутника KLN відповідно позначено точки A і B так, що $KA = \frac{2}{3}KL$, $KB = \frac{2}{3}KN$. Доведіть, що $\triangle KAB \sim \triangle KLN$.

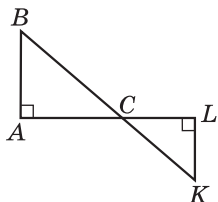
13.10. Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:

- 1) $AB : BC : CA = 3 : 4 : 6$, $A_1B_1 = 6$, $B_1C_1 = 8$, $C_1A_1 = 11$;
- 2) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle A_1 : \angle B_1 : \angle C_1 = 1 : 2 : 3$?

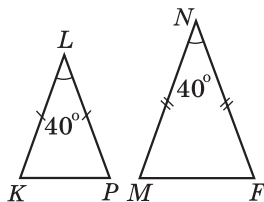
13.11. Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:

- 1) $AB : BC : CA = 4 : 3 : 7$, $A_1B_1 = 8$, $B_1C_1 = 6$, $C_1A_1 = 14$;
- 2) $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$, $\angle A_1 = 20^\circ$, $\angle B_1 = 50^\circ$?

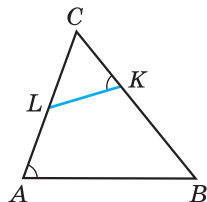
13.12. На малюнках 13.5–13.7 знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.



Мал. 13.5

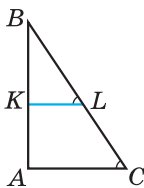


Мал. 13.6

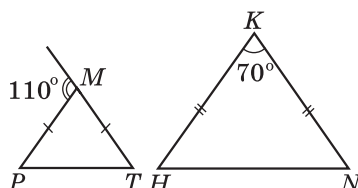


Мал. 13.7

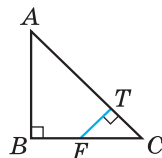
13.13. На малюнках 13.8–13.10 знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.



Мал. 13.8



Мал. 13.9



Мал. 13.10

 **13.14.** O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Доведіть, що $\triangle AOB \sim \triangle COD$.

13.15. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$, у якої $AB \parallel CD$, $AB = 10$ см, $CD = 5$ см, $OD = 4$ см. Знайдіть OB .

13.16. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) поділяє діагональ BD на відрізки $DO = 3$ см, $OB = 9$ см. Знайдіть AB , якщо $DC = 2$ см.

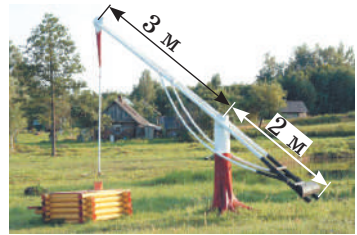
13.17. У трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) на катеті AC і гіпотенузі AB позначено точки M і N так, що $AM = \frac{3}{4}AC$, $AN = \frac{3}{4}AB$. Доведіть, що $\triangle AMN$ – прямокутний.

13.18. На катеті BC та гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначено точки P і F так, що $BP = \frac{1}{3}BC$, $BF = \frac{1}{3}BA$. Доведіть, що $PF = \frac{1}{3}CA$.

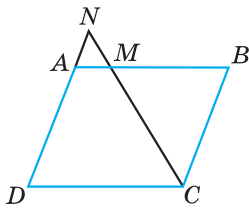
13.19. Кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при основі іншого рівнобедреного трикутника. Периметр першого трикутника – 36 см. Знайдіть його сторони, якщо у другого трикутника бічна сторона відноситься до основи як 5 : 2.

13.20. Дано два рівнобедрених трикутники. Кут при вершині одного з них дорівнює куту при вершині іншого. Периметр першого трикутника – 30 см. Знайдіть його сторони, якщо у другого трикутника основа відноситься до бічної сторони як 1 : 2.

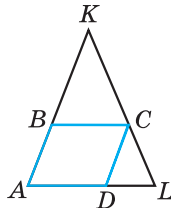
13.21. На малюнку зображено коло-дзязь із «журавлем». Коротке плече має довжину 2 м, а довге – 3 м. На скільки метрів опуститься кінець довгого плеча, коли кінець короткого підніметься на 1 м?



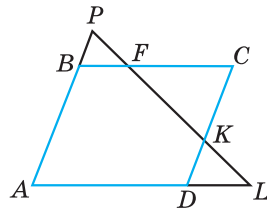
13.22. На малюнках 13.11–13.13 $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть на цих малюнках усі пари подібних трикутників і доведіть їхню подібність.



Мал. 13.11

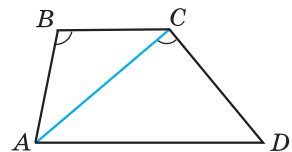


Мал. 13.12



Мал. 13.13

13.23. На малюнку 13.14 $ABCD$ – трапеція, $\angle ABC = \angle ACD$. Знайдіть подібні трикутники на цьому малюнку й доведіть, що $CA^2 = BC \cdot AD$.



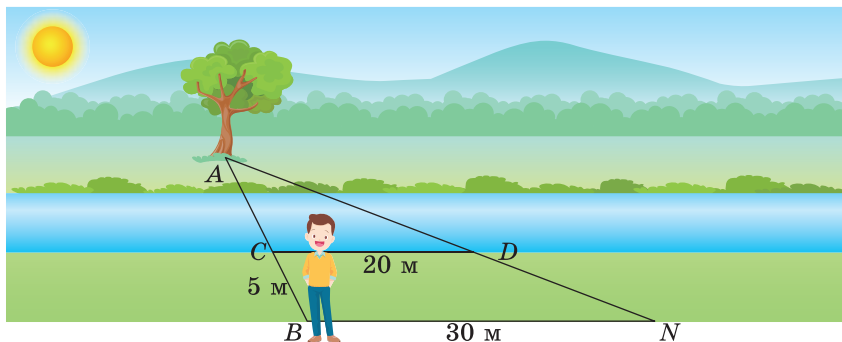
Мал. 13.14

13.24. Кути одного трикутника відносяться як 2 : 3 : 4, а один з кутів другого трикутника на 20° більший за другий і на 20° менший від третього. Чи подібні ці трикутники?

13.25. Кути першого трикутника відносяться як 1 : 3 : 2, а другий трикутник є прямокутним, у якого один з гострих кутів дорівнює половині другого. Чи подібні ці трикутники?

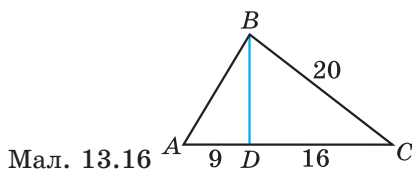
13.26. У паралелограмі $ABCD$ точки E , F , M і N належать відповідно сторонам AB , BC , CD і DA , $\frac{EB}{BF} = \frac{DM}{DN}$. Доведіть, що $\angle BFE = \angle DNM$.

- 13.27.** Відрізки AB і CD перетинаються в точці O , $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$. Доведіть, що $\angle BCO = \angle ADO$.
- 13.28.** O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $BO = 4$ см, $DO = 7$ см. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 22 см.
- 13.29.** O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $AD = 11$ см, $BC = 5$ см. Знайдіть відрізки BO і OD , якщо їхня різниця дорівнює 3 см.
- 13.30.** У трикутнику ABC $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, $AC = 18$ см. На стороні AC відкладено відрізок $CK = 6$ см, на стороні BC – відрізок $CP = 4$ см.
- 1) Чи подібні трикутники ABC і KPC ?
 - 2) Чи паралельні прямі AB і KP ?
 - 3) Знайдіть довжину відрізка PK .
- 13.31.** Пряма MN паралельна стороні AB трикутника ABC , $M \in AC$, $N \in BC$. $AB = 10$ см, $MN = 4$ см, $MA = 2$ см. Знайдіть довжину сторони AC .
- 13.32.** Пряма KL паралельна стороні BC трикутника ABC , $K \in AB$, $L \in AC$. $KB = 6$ см, $BC = 12$ см, $KL = 9$ см. Знайдіть довжину сторони AB .
- 13.33.** Знайдіть відстань від подорожнього B (мал. 13.15), який стоїть на одному березі річки, до дерева A на іншому березі, якщо $BN = 30$ м, $CD = 20$ м, $BC = 5$ м. На малюнку $BN \parallel CD$.

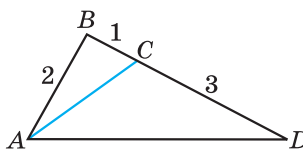


Мал. 13.15

- 13.34.** На малюнку 13.16 знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.
- 13.35.** На малюнку 13.17 знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.



Мал. 13.16



Мал. 13.17

4

- 13.36.** Дано два рівнобедрених трикутники. Кут при вершині одного з них дорівнює куту при вершині іншого. Периметр першого трикутника дорівнює 90 см. Знайдіть його сторони, якщо сторони другого трикутника відносяться як 4 : 7. Скільки випадків слід розглянути?
- 13.37.** Дано два рівнобедрених трикутники. Кут при основі одного трикутника дорівнює куту при основі іншого. Сторони одного з трикутників відносяться як 5 : 8, а периметр іншого дорівнює 126 см. Знайдіть сторони другого трикутника. Скільки випадків слід розглянути?
- 13.38.** $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, CD і C_1D_1 – бісектриси даних трикутників. Доведіть, що $\triangle ADC \sim \triangle A_1D_1C_1$.
- 13.39.** $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, AM і A_1M_1 – медіани даних трикутників. Доведіть, що $\triangle AMC \sim \triangle A_1M_1C_1$.
- 13.40.** На стороні BC трикутника ABC позначено точку F так, що $\angle BAF = \angle C$, $BF = 4$ см, $AB = 6$ см. Знайдіть BC .
- 13.41.** На стороні AC трикутника ABC позначено точку K так, що $\angle ABK = \angle C$. Знайдіть KC , якщо $AB = 2$ см, $AK = 1$ см.
- 13.42.** У прямокутний трикутник ABC з катетами a см і b см і прямим кутом A вписано квадрат $AKLM$, $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in AC$. Знайдіть сторону квадрата.
- 13.43.** Периметр паралелограма дорівнює 24 см, а його висоти відносяться як 5 : 3. Знайдіть сторони паралелограма.
- 13.44.** Периметр паралелограма дорівнює 30 см, а його висоти – 4 см і 8 см. Знайдіть сторони паралелограма.
- 13.45.** У трикутник ABC вписано ромб $AKFP$ так, що кут A в них спільний, $P \in AB$, $F \in BC$, $K \in AC$. Знайдіть сторону ромба, якщо $CK = 4$ см, $PB = 9$ см.
- 13.46.** У рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а бічна сторона – 10 см, вписано коло. Знайдіть відстань між точками дотику кола до бічних сторін.



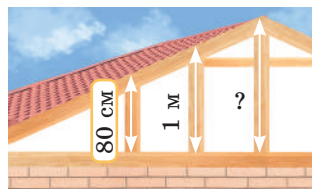
Вправи для повторення

- 13.47.** Знайдіть кути трикутника, якщо три його середні лінії рівні між собою.
- 13.48.** У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) E – середина AD , F – середина BC , K – середина AB . Доведіть, що $KE = KF$.
- 13.49.** Кожна з бічних сторін рівнобедреного трикутника дорівнює a см. З точки, узятої на основі трикутника, проведено прямі, паралельні бічним сторонам. Обчисліть периметр паралелограма, який утворився.
- 13.50.** Доведіть, що бісектриси кутів прямокутника, який не є квадратом, перетинаючись, утворюють квадрат.



Життєва математика

- 13.51. Похила балка підтримується трьома стовпами, установленими вертикально на однаковій відстані один від одного (мал. 13.18). Довжини двох менших стовпів – 80 см і 1 м. Знайдіть довжину більшого стовпа.



Мал. 13.18



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 13.52. Чи можуть бісектриса й медіана, що виходять з вершини прямого кута трикутника, утворювати рівнобедрений трикутник? Якщо так, то знайдіть менший з гострих кутів прямокутного трикутника.

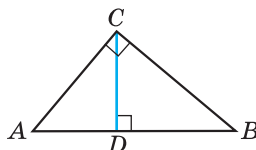
§ 14. Середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику

1. Лема про висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута



Лема. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, розбиває трикутник на два подібних між собою прямокутних трикутники, кожний з яких подібний даному трикутнику.

Доведення. Нехай ABC – прямокутний трикутник ($\angle C = 90^\circ$), CD – висота трикутника (мал. 14.1). Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ і $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.



Мал. 14.1

- 1) У прямокутних трикутників ABC і ACD кут A – спільний. Тому $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (за гострим кутом).
- 2) Аналогічно $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ ($\angle B$ – спільний, $\angle BCA = \angle BDC = 90^\circ$). Звідки $\angle A = \angle BCD$.
- 3) У трикутників ACD ($\angle D = 90^\circ$) і CBD ($\angle D = 90^\circ$) $\angle A = \angle BCD$. Тому $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (за гострим кутом). ■

Відрізок AD називають *проекцією* катета AC на гіпотенузу AB , а відрізок BD – *проекцією* катета BC на гіпотенузу AB .

2. Теорема про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику

Відрізок k називають **середнім пропорційним** (або **середнім геометричним**) відрізків m і n , якщо $k^2 = m \cdot n$.



Теорема (про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику). 1) Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним проєкцій катетів на гіпотенузу.

2) Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи та проєкції цього катета на гіпотенузу.

Доведення. Розглянемо малюнок 14.1.

1) $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (за лемою). Тому $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$, або $CD^2 = AD \cdot BD$.

2) $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (за лемою). Тому $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, або $AC^2 = AB \cdot AD$.

3) $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ (за лемою). Тому $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$, або $BC^2 = AB \cdot BD$. ■

Приклад 1. CD – висота прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C . Доведіть, що $\frac{BD}{AD} = \frac{BC^2}{AC^2}$.

Доведення. Розглянемо малюнок 14.1.

1) Оскільки $AC^2 = AB \cdot AD$, то $AB = \frac{AC^2}{AD}$, а оскільки $BC^2 = AB \cdot BD$, то $AB = \frac{BC^2}{BD}$.

2) Тому $\frac{AC^2}{AD} = \frac{BC^2}{BD}$, звідки $\frac{BD}{AD} = \frac{BC^2}{AC^2}$. ■

Приклад 2. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 9 см і 16 см. Знайти периметр трикутника.

Розв'язання. Розглянемо малюнок 14.1, де $AD = 9$ см, $DB = 16$ см.

1) $AB = AD + DB = 9 + 16 = 25$ (см).

2) $AC^2 = AB \cdot AD$, тобто $AC^2 = 25 \cdot 9 = 225$. Оскільки $15^2 = 225$, то $AC = 15$ (см).

3) $BC^2 = AB \cdot BD$, $BC^2 = 25 \cdot 16 = 400$. Оскільки $20^2 = 400$, то $BC = 20$ (см).

4) $P_{ABC} = 25 + 15 + 20 = 60$ (см).

Відповідь: 60 см.

Під час розв'язування задач цього параграфу варто використовувати таблицю квадратів натуральних чисел.

- ? Сформулюйте й доведіть лему із цього параграфу. ○ Який відрізок називають середнім пропорційним двох відрізків? ○ Сформулюйте й доведіть теорему про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

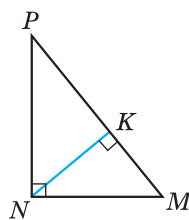
1

14.1. (Усно.) На малюнку 14.2 NK – висота прямокутного трикутника PNM ($\angle N = 90^\circ$). Назвіть:

- 1) проєкцію катета NM на гіпотенузу;
- 2) проєкцію катета NP на гіпотенузу.

14.2. (Усно.) NK – висота прямокутного трикутника PNM (мал. 14.2). Які з рівностей правильні:

- 1) $NK = PK \cdot KM$; 2) $NM^2 = KM \cdot PM$;
- 3) $PN = PK \cdot KM$; 4) $PK \cdot KM = NK^2$?



Мал. 14.2

14.3. NK – висота прямокутного трикутника PNM з прямим кутом N (мал. 14.2). Заповніть пропуски:

- 1) $NK^2 = \dots$; 2) $NM^2 = \dots$;
- 3) $PK \cdot PM = \dots$; 4) $PK \cdot KM = \dots$.

14.4. Знайдіть середнє пропорційне відрізків завдовжки:

- 1) 2 см і 8 см; 2) 27 дм і 3 дм.

14.5. Знайдіть середнє пропорційне відрізків завдовжки:

- 1) 16 дм і 1 дм; 2) 4 см і 9 см.

2

14.6. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо проєкції катетів на гіпотенузу дорівнюють 9 см і 25 см.

14.7. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки 2 см і 8 см.

14.8. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його проєкція на гіпотенузу дорівнює 4 см, а гіпотенуза – 16 см.

14.9. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 25 см, а проєкція катета на гіпотенузу – 9 см.

14.10. Катет прямокутного трикутника дорівнює 18 см, а його проєкція на гіпотенузу – 9 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

14.11. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а гіпотенуза – 9 см. Знайдіть проєкцію цього катета на гіпотенузу.

14.12. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 8 см і 4,5 см. Знайдіть катети трикутника.

14.13. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 50 см, а проєкція одного з катетів на гіпотенузу – 18 см. Знайдіть катети трикутника.

3

14.14. Перпендикуляр, проведений із середини основи рівнобедреного трикутника до бічної сторони, ділить її на відрізки 1 см і 8 см, починаючи від вершини кута при основі. Знайдіть периметр трикутника.

14.15. Перпендикуляр, проведений із середини основи рівнобедреного трикутника до бічної сторони, ділить її на відрізки 6 см і 2 см, починаючи від вершини, протилежної основі. Знайдіть периметр трикутника.

14.16. Висота, проведена з вершини прямого кута прямокутного трикутника, ділить гіпотенузу на відрізки, що відносяться як $9 : 16$. Знайдіть катети трикутника, якщо його висота дорівнює 24 см.

14.17. Висота, проведена з вершини прямого кута прямокутного трикутника, ділить гіпотенузу на відрізки, один з яких дорівнює 16 см, а другий відноситься до висоти як $3 : 4$. Знайдіть висоту трикутника.

14.18. Коло, вписане в ромб, точкою дотику ділить сторону ромба на відрізки 1 см і 4 см. Знайдіть радіус кола.

4

14.19. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої 10 см і 8 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

14.20. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої 13 см і 5 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

14.21. Коло, вписане у трапецію, точкою дотику ділить бічну сторону на відрізки 4 см і 9 см завдовжки. Знайдіть висоту трапеції.

14.22. Коло, вписане у трапецію, точкою дотику ділить одну з бічних сторін на відрізки 2 см і 8 см завдовжки, а іншу – на відрізки, один з яких дорівнює 4 см. Знайдіть периметр трапеції.



Вправи для повторення

14.23. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника утворює зі стороною трикутника кут 18° . Знайдіть кути трикутника.

14.24. Про трикутники ABC і KLM відомо, що $\angle A + \angle B = \angle K + \angle L$, $\angle B + \angle C = \angle L + \angle M$. Чи подібні ці трикутники?

14.25. У рівнобічній трапеції діагональ ділить гострий кут навпіл. Доведіть, що тупий кут трапеції дорівнює тупому куту між діагоналями.



Життєва математика

14.26. Студенти агроєкологічного коледжу на експериментальній ділянці 40 м завдовжки і 20 м завширшки висаджують картоплю раннього сорту. Обчисліть, скільки знадобиться картоплі для такої ділянки, якщо в середньому на 1 а потрібно 40 кг картоплі.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

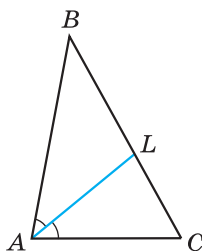
14.27. (Олімпіада Нью-Йорка, 1976 р.) Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці O , а на відрізках OB і OC позначено точки B_1 і C_1 , для яких $\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90^\circ$. Доведіть, що $AB_1 = AC_1$.

§ 15. Властивість бісектриси трикутника

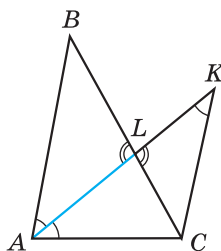


Теорема (властивість бісектриси трикутника). Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до неї сторонам.

Доведення. Нехай AL – бісектриса трикутника ABC (мал. 15.1). Доведемо, що $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$.



Мал. 15.1



Мал. 15.2

1) Проведемо через точку C пряму, паралельну AB , та продовжимо бісектрису AL до перетину із цією прямою в точці K (мал. 15.2). Тоді $\angle LKC = \angle BAL$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і CK та січній AK).

2) Трикутник AKC – рівнобедрений (оскільки $\angle BAL = \angle LAC$ і $\angle BAL = \angle LKC$, а тому $\angle KAC = \angle AKC$), а отже, $AC = KC$.

3) $\angle BLA = \angle CLK$ (як вертикальні). Тому $\triangle ABL \sim \triangle KCL$ (за двома кутами). Отже, $\frac{AB}{KC} = \frac{BL}{CL}$.

Але $KC = AC$, тому $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$. ■

З пропорції $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$ можна отримати й таку: $\frac{AB}{BL} = \frac{AC}{LC}$.

Приклад 1. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $AC = 4$ см, $BC = 9$ см, AL – бісектриса трикутника. Знайти BL і LC .

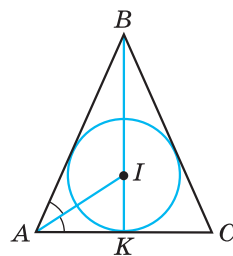
Розв'язання. Розглянемо $\triangle ABC$ на малюнку 15.1.

1) Нехай $BL = x$ (см), тоді $LC = BC - BL = 9 - x$ (см).

- 2) Оскільки $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$, маємо рівняння: $\frac{8}{4} = \frac{x}{9-x}$, звідки $x = 6$ (см).
 3) Отже, $BL = 6$ см, $LC = 9 - 6 = 3$ (см).
 Відповідь: 6 см, 3 см.

Приклад 2. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 24 см, а бічна сторона відноситься до основи як 3 : 2. Знайти радіус кола, вписаного у трикутник.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC $AB = BC$, BK – медіана (мал. 15.3).



Мал. 15.3

1) Тоді BK є також висотою і бісектрисою. Оскільки точка I – центр вписаного кола – є точкою перетину бісектрис трикутника, то $I \in BK$, IK – радіус кола.

2) Оскільки $AB : AC = 3 : 2$, позначимо $AB = 3x$, $AC = 2x$. K – середина AC , тому $AK = \frac{AC}{2} = \frac{2x}{2} = x$.

3) Оскільки AI – бісектриса трикутника ABK , то

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BI}{IK}.$$

4) Нехай $IK = r$. Тоді $BI = 24 - r$. Маємо: $\frac{3x}{x} = \frac{24-r}{r}$, звідки $r = 6$ (см).

Відповідь: 6 см.



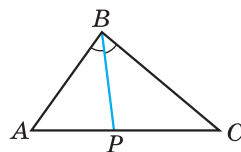
Сформулюйте й доведіть теорему про властивість бісектриси трикутника.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 15.1. BP – бісектриса трикутника ABC (мал. 15.4). Які з рівностей є пропорціями:

- 1) $\frac{AB}{BC} = \frac{CP}{AP}$; 2) $\frac{BC}{AB} = \frac{CP}{AP}$;
 3) $\frac{AP}{CP} = \frac{BA}{BC}$; 4) $\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PC}$?



Мал. 15.4

15.2. BP – бісектриса трикутника ABC (мал. 15.4). $AP : PC = 1 : 2$, $AB = 3$ см. Знайдіть BC .

15.3. BP – бісектриса трикутника ABC (мал. 15.4). $AB : BC = 1 : 2$, $AP = 5$ см. Знайдіть PC .

2 15.4. BD – бісектриса трикутника ABC , $AD = 3$ см, $DC = 9$ см. Знайдіть відношення сторін $\frac{AB}{BC}$.

15.5. MA – бісектриса трикутника MNL , $ML = 4$ см, $MN = 16$ см. Знайдіть відношення відрізків $\frac{LA}{AN}$.

- 15.6.** MD – бісектриса трикутника KMP , $KM = 8$ см, $MP = 6$ см. Менший з відрізків, на які бісектриса MD ділить сторону KP , дорівнює 3 см. Знайдіть KP .
- 15.7.** У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $BC = 12$ см. Більший з відрізків, на які бісектриса BK ділить сторону AC , дорівнює 6 см. Знайдіть AC .
- 3** **15.8.** AL – бісектриса трикутника ABC , $AB = 15$ см, $AC = 12$ см, $BC = 18$ см. Знайдіть BL і LC .
- 15.9.** Бісектриса трикутника ділить сторону на відрізки, різниця довжин яких 1 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо дві інші сторони дорівнюють 8 см і 6 см.
- 15.10.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а бісектриса ділить бічну сторону на відрізки, з яких той, що суміжний з основою, дорівнює 12 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 15.11.** У рівнобедреному трикутнику основа менша від бічної сторони на 9 см, а бісектриса ділить бічну сторону на відрізки, які відносяться як 2 : 5. Знайдіть периметр трикутника.
- 4** **15.12.** У трикутнику, сторони якого дорівнюють 15 см, 21 см і 24 см, проведено півколо, центр якого належить більшій стороні трикутника і яке дотикається до двох інших сторін. На які відрізки центр півкола ділить більшу сторону?
- 15.13.** У трикутник ABC вписано ромб $CKLM$ так, що кут C у них спільний, $K \in AC$, $L \in AB$, $M \in BC$. Знайдіть довжини відрізків AL і LB , якщо $AC = 18$ см, $BC = 12$ см, $AB = 20$ см.



Вправи для повторення

- 15.14.** Сторони паралелограма дорівнюють a і b ($a > b$). Знайдіть відрізки, на які бісектриса гострого кута ділить його більшу сторону.
- 15.15.** Чи може діагональ AC трапеції $ABCD$ ділити навпіл і кут A , і кут C ?
- 15.16.** У трикутнику ABC проведено висоту CH , причому $CH^2 = AH \cdot BH$ і точка H належить стороні AB . Доведіть, що трикутник ABC – прямокутний ($\angle C = 90^\circ$).



Життєва математика

- 15.17.** Бригаді з ремонту квартир потрібно потинькувати (поштукатурити) стіни кімнати 3,5 м завширшки, 4,5 м завдовжки і 2,8 м заввишки. Зазвичай бригада витрачає 6 мішків сухої суміші на 5 м^2 поверхні. Кімната має одні двері й одне вікно. Ширина дверей – 0,9 м, висота – 2 м, ширина вікна – 2,2 м, висота – 1,8 м. Скільки мішків сухої суміші потрібно придбати бригаді, щоб повністю потинькувати стіни від підлоги до стелі?





Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 15.18.** 1) Розв'яжіть задачу, відтак дізнаєтеся прізвище видатного українця – ученого в галузі ракетобудування та космонавтики, конструктора перших штучних супутників Землі й космічних кораблів.



Знайдіть кути A і B паралелограма $ABCD$, якщо:	$\angle A$	$\angle B$
$\angle A$ на 20° більший за $\angle B$	Л	Р
$\angle A$ втричі менший від $\angle B$	К	В
$\angle A : \angle B = 7 : 5$	Б	О

45°	75°	80°	75°	100°	105°	75°	135°

- 2) Поцікавтеся (використовуючи різні джерела інформації) біографією та досягненнями нашого видатного земляка.

§ 16. Застосування подібності трикутників до розв'язування задач

Розглянемо деякі цікаві властивості геометричних фігур, які можна встановити з подібності трикутників, та застосування подібності до розв'язування практичних задач.

1. Пропорційність відрізків хорд



Теорема 1 (про пропорційність відрізків хорд). Якщо хорди AB і CD перетинаються в точці S , то

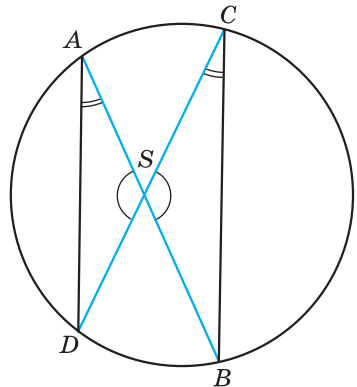
$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

Доведення. Нехай хорди AB і CD перетинаються в точці S (мал. 16.1).

1) Розглянемо $\triangle SAD$ і $\triangle SCB$, у яких $\angle ASD = \angle CSB$ (як вертикальні кути), $\angle DAB = \angle DCB$ (як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу).

2) Тоді $\triangle SAD \sim \triangle SCB$, за двома кутами,

а отже, $\frac{AS}{CS} = \frac{DS}{BS}$, тобто $AS \cdot BS = CS \cdot DS$. ■



Мал. 16.1



Наслідок. Якщо O – центр кола, R – його радіус, AB – хорда, $S \in AB$, то $AS \cdot BS = R^2 - a^2$, де $a = SO$.

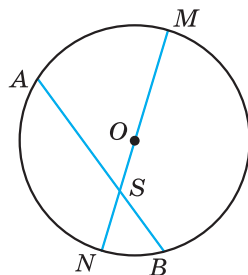
Доведення. Проведемо діаметр MN , що проходить через точку S (мал. 16.2).

Тоді

$$AS \cdot BS = MS \cdot NS,$$

$$AS \cdot BS = (R + a)(R - a),$$

$$AS \cdot BS = R^2 - a^2. \blacksquare$$



Мал. 16.2

Приклад 1. Діаметр кола AB перпендикулярний до хорди MN і перетинає її в точці K , $AK = 4$ см, $KB = 9$ см. Знайти довжину хорди MN .

Розв'язання. На малюнку 16.3 AB – діаметр кола, MN – хорда, $AB \perp MN$.

1) За теоремою про пропорційність відрізків хорд, маємо:

$$MK \cdot KN = AK \cdot KB.$$

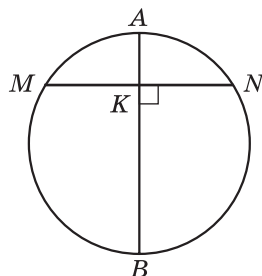
$$\text{Тоді } MK \cdot KN = 4 \cdot 9 = 36.$$

2) За властивістю діаметра кола, перпендикулярного до хорди, маємо: $MK = KN$.

3) Позначимо $MK = KN = x$ см, тоді $x^2 = 36$ і $x = 6$ (см).

4) $MK = KN = 6$ (см), тому $MN = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

Відповідь: 12 см.



Мал. 16.3

2. Формула бісектриси трикутника



Приклад 2. AL – бісектриса трикутника ABC . Довести формулу бісектриси: $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL$.

Доведення. Опишемо навколо трикутника ABC коло й продовжимо AL до перетину з колом у точці T (мал. 16.4).

1) $\angle ABC = \angle ATC$ (як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу AC), $\angle BAL = \angle CAL$ (за умовою). Тому $\triangle ABL \sim \triangle ATC$ (за двома кутами).

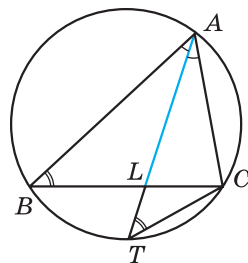
2) Маємо: $\frac{AB}{AT} = \frac{AL}{AC}$, звідки $AL \cdot AT = AB \cdot AC$;

$$AL \cdot (AL + LT) = AB \cdot AC; \quad AL^2 + AL \cdot LT = AB \cdot AC.$$

Але за теоремою про пропорційність відрізків хорд: $AL \cdot LT = BL \cdot CL$.

3) Отже, $AL^2 + BL \cdot CL = AB \cdot AC$, тобто

$$AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL. \blacksquare$$



Мал. 16.4

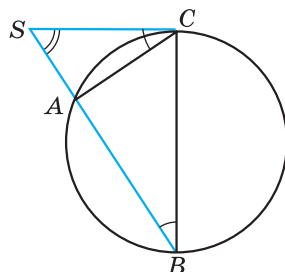
3. Пропорційність відрізків січної і дотичної

Т Теорема 2 (про пропорційність відрізків січної і дотичної). Якщо з точки S поза колом провести січну, яка перетинає коло в точках A і B , та дотичну SC , де C – точка дотику, то $SC^2 = SA \cdot SB$.

Доведення. Розглянемо малюнок 16.5.

1) $\angle ABC$ – вписаний, тому $\angle ABC = \frac{1}{2} \widehat{AC}$,
 $\angle SCA = \frac{1}{2} \widehat{AC}$ (див. задачу 709 з підручника для 7 класу), тобто $\angle SCA = \angle ABC$.

2) Тому $\triangle CSA \sim \triangle BSC$ (за двома кутами),
 отже, $\frac{SC}{SB} = \frac{SA}{SC}$. Звідки $SC^2 = SA \cdot SB$. ■



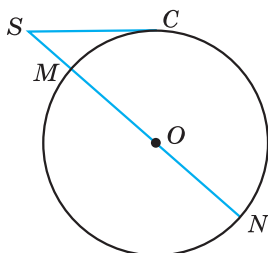
Мал. 16.5

Н Наслідок 1. Якщо з точки S провести дві січні, одна з яких перетинає коло в точках A і B , а друга – у точках M і N , то $SA \cdot SB = SM \cdot SN$.

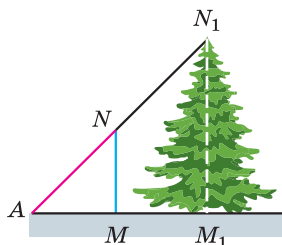
Наслідок є очевидним, оскільки кожний з добутків $SA \cdot SB$ і $SM \cdot SN$ за теоремою дорівнює SC^2 .

Н Наслідок 2. Якщо O – центр кола, R – його радіус, SC – дотична, C – точка дотику, то $SC^2 = a^2 - R^2$, де $a = SO$.

Доведення. Проведемо січну через центр кола – точку O (мал. 16.6).
 Тоді за теоремою: $SC^2 = SM \cdot SN$; $SC^2 = (a - R)(a + R)$.
 Отже, $SC^2 = a^2 - R^2$. ■



Мал. 16.6



Мал. 16.7

4. Вимірювальні роботи на місцевості

Припустимо, що нам потрібно виміряти висоту деякого предмета, наприклад висоту ялини M_1N_1 (мал. 16.7). Для цього встановимо на

деякій відстані від ялини жердину MN з планкою, що обертається навколо точки N . Спрямуємо планку на верхню точку N_1 ялини, як показано на малюнку 16.7. На землі позначимо точку A , у якій планка впирається в поверхню землі.

Розглянемо $\triangle ANM$ ($\angle M = 90^\circ$) і $\triangle AN_1M_1$ ($\angle M_1 = 90^\circ$). $\angle A$ – їхній спільний гострий кут.

Тоді $\triangle ANM \sim \triangle AN_1M_1$ (за гострим кутом).

$$\text{Тому } \frac{MN}{AM} = \frac{M_1N_1}{AM_1}, \text{ звідки } M_1N_1 = \frac{MN \cdot AM_1}{AM}.$$

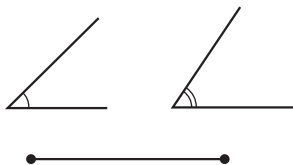
Якщо, наприклад, $MN = 2$ м, $AM = 3,2$ м, $AM_1 = 7,2$ м, то $M_1N_1 = \frac{2 \cdot 7,2}{3,2} = 4,5$ (м).



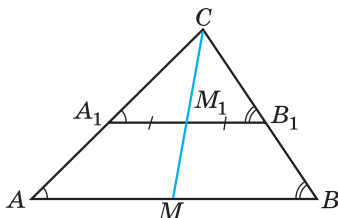
5. Задачі на побудову

Приклад 3. Побудувати трикутник за двома кутами та медіаною, проведеною з вершини третього кута.

Розв'язання. На малюнку 16.8 зображено два заданих кути й заданий відрізок. Побудуємо трикутник, у якого два кути відповідно дорівнюють двом заданим кутам, а медіана, проведена з вершини третього кута, дорівнює заданому відрізку.



Мал. 16.8



Мал. 16.9

- 1) Будуємо деякий трикутник, подібний до шуканого. Для цього побудуємо довільний трикутник A_1B_1C , у якого кути A_1 і B_1 дорівнюють заданим (мал. 16.9).
 - 2) Проводимо медіану CM_1 трикутника A_1CB_1 і відкладаємо на прямій CM_1 відрізок CM , що дорівнює заданому.
 - 3) Через точку M проводимо пряму, паралельну A_1B_1 . Вона перетинає сторони кута C у деяких точках A і B (мал. 16.9).
 - 4) Оскільки $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Отже, два кути трикутника ABC дорівнюють заданим.
- Доведемо, що M – середина AB .

$$\triangle A_1CM_1 \sim \triangle ACM \text{ (за двома кутами). Тому } \frac{CM_1}{CM} = \frac{A_1M_1}{AM}.$$

$$\triangle B_1CM_1 \sim \triangle BCM \text{ (за двома кутами). Тому } \frac{CM_1}{CM} = \frac{B_1M_1}{BM}.$$

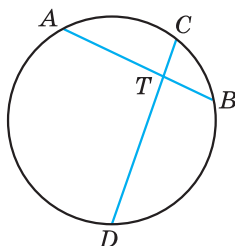
- Отже, $\frac{A_1M_1}{AM} = \frac{B_1M_1}{BM}$, тобто $\frac{A_1M_1}{B_1M_1} = \frac{AM}{BM}$. Але $A_1M_1 = B_1M_1$ (за побудовою), тому $\frac{AM}{BM} = 1$ і $AM = BM$.
- Отже, CM – медіана трикутника ABC і трикутник ABC – шуканий.

? Сформулюйте теорему про пропорційність відрізків хорд та наслідок з неї. **○** Сформулюйте теорему про пропорційність відрізків січної і дотичної та наслідки з неї.

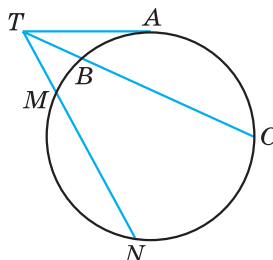


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 16.1. (Усно.) T – точка перетину хорд AB і CD (мал. 16.10). Які з рівностей є правильними:
- 1) $AT \cdot TC = BT \cdot TD$;
 - 2) $AT \cdot TB = CT \cdot TD$;
 - 3) $AT \cdot DT = CT \cdot BT$;
 - 4) $CT \cdot DT = AT \cdot BT$?



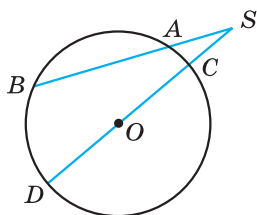
Мал. 16.10



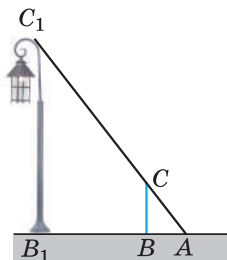
Мал. 16.11

- 16.2. (Усно.) TA – відрізок дотичної до кола. Дві січні перетинають коло відповідно в точках B і C та M і N (мал. 16.11). Які з рівностей є правильними:
- 1) $TA^2 = TB \cdot BC$;
 - 2) $TA^2 = TM \cdot TN$;
 - 3) $TB \cdot TC = TM \cdot MN$;
 - 4) $TM \cdot TN = TB \cdot TC$?
- 2** 16.3. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці P , $AP = 9$, $PB = 2$, $DP = 4$. Знайдіть CP .
- 16.4. Хорди MN і KL кола перетинаються в точці A , $KA = 6$, $AL = 3$, $MA = 4$. Знайдіть AN .
- 16.5. SA – відрізок дотичної до кола, A – точка дотику. Січна, що проходить через точку S , перетинає коло в точках B і C , $SA = 6$ см, $SB = 4$ см. Знайдіть SC і BC .
- 16.6. MP – відрізок дотичної до кола, P – точка дотику. Січна, що проходить через точку M , перетинає коло в точках B і C , $MP = 4$ см, $MC = 8$ см. Знайдіть MB і BC .
- 16.7. Хорда AB , довжина якої 16 см, перетинається з хордою CD в точці T . $AT = 2$ см, $CT = 1$ см. Знайдіть довжину хорди CD .
- 16.8. Хорда CD завдовжки 13 см перетинає хорду MN у точці A , $CA = 4$ см, $MA = 2$ см. Знайдіть довжину хорди MN .

- 16.9.** Січна, що проходить через точку S , перетинає коло в точках A і B , а інша січна, що проходить через точку S і центр кола O , — у точках C і D (мал. 16.12). $SA = 4$ см, $SB = 16$ см, $SC = 2$ см. Знайдіть радіус кола.

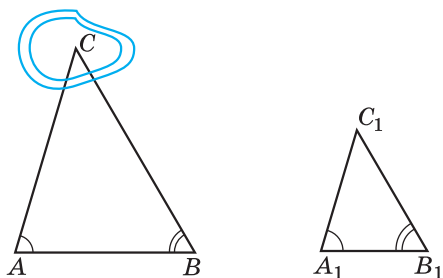


Мал. 16.12

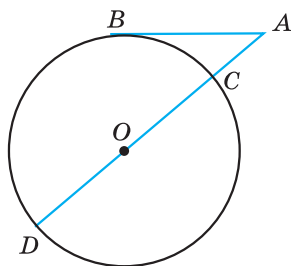


Мал. 16.13

- 16.10.** Січна, що проходить через точку S , перетинає коло в точках A і B , а друга січна, що проходить через точку S і центр кола O , — у точках C і D (мал. 16.12). $SA = 4$ см, $SB = 9$ см, $SC = 3$ см. Знайдіть діаметр кола.
- 16.11.** Для знаходження висоти ліхтаря B_1C_1 використали жердину BC завдовжки 1,5 м (мал. 16.13). $AB = 1$ м, $AB_1 = 6$ м. Знайдіть висоту ліхтаря B_1C_1 .
- 16.12.** Двірник виміряв висоту ліхтаря B_1C_1 , використавши жердину BC з планкою AC (мал. 16.13). Знайдіть довжину використаної жердини BC , якщо висота ліхтаря склала 8 м і $AB_1 = 10$ м, $AB = 2,5$ м.
- 16.13.** Щоб знайти на місцевості відстань від точки A до недоступної точки C , вибрали точку B , а потім на папері побудували трикутник $A_1B_1C_1$ так, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (мал. 16.14). Знайдіть AC , якщо $AB = 30$ м, $A_1B_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 7$ см.
- 16.14.** Хорди кола AB і CD перетинаються в точці E . $AE : BE = 1 : 3$, $CD = 20$ см, $DE = 5$ см. Знайдіть AB .
- 16.15.** Через точку M , що розміщена всередині кола, проведено дві хорди AB і CD , $AM = MB$, $CM = 16$ см, $DM : MC = 1 : 4$. Знайдіть AB .
- 16.16.** На малюнку 16.15 AB — дотична до кола, $AB = 3$ см. Точка O — центр кола, $AO = 5$ см. Знайдіть діаметр кола.



Мал. 16.14



Мал. 16.15

- 16.17.** На малюнку 16.15 AB – дотична до кола, точка O – центр кола, $AB = 8$ см, $AO = 10$ см. Знайдіть радіус кола.
- 16.18.** Діаметр кола AB перпендикулярний до хорди CD , AB і CD перетинаються в точці M , $AM = 2$ см, $CM = 4$ см. Знайдіть радіус кола.
- 16.19.** Діаметр кола MN і хорда AB – взаємно перпендикулярні й перетинаються в точці P , $PB = 12$ см, $NP = 18$ см. Знайдіть діаметр кола.
- 4** **16.20.** Перпендикуляр, проведений з точки кола до радіуса, дорівнює 24 см і ділить радіус у відношенні $5 : 8$, починаючи від центра. Знайдіть радіус кола.
- 16.21.** Знайдіть бісектрису AL трикутника ABC , якщо $AC = 15$ см, $AB = 12$ см, $BC = 18$ см.
-  **16.22.** Побудуйте трикутник за двома кутами й бісектрисою, проведеною з вершини третього кута.
-  **16.23.** Побудуйте трикутник за двома кутами й висотою, проведеною з вершини третього кута.
-  **16.24.** Побудуйте трикутник ABC за даним кутом C , відношенням сторін $AC : CB = 3 : 2$ та медіаною CM .



Вправи для повторення

- 16.25.** PL – бісектриса трикутника PMN , $PN = 6$ см, $PM = 10$ см. Більший з двох відрізків, на які бісектриса PL ділить сторону MN , дорівнює 5 см. Знайдіть менший із цих відрізків.
- 16.26.** Сторони трикутника відносяться як $3 : 4 : 6$. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 52 см.
- 16.27.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a см і b см ($a > b$). Знайдіть квадрат висоти трапеції, якщо її бічна сторона перпендикулярна до діагоналі.



Життєва математика

- 16.28.** На дачі родини Гордієнків потрібно пофарбувати із зовнішнього та внутрішнього боків бак із кришкою для води. Він має форму куба, ребро якого дорівнює 1,2 м. У магазині є фарба в банках по 1 кг і 2,5 кг.
- 1) Скільки м^2 потрібно пофарбувати?
 - 2) Скільки фарби і в яких банках потрібно придбати, якщо на 1 м^2 витрачається 0,2 кг фарби?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 16.29.** На продовженні найбільшої сторони AC трикутника ABC відкладено відрізок $CM = BC$. Чи може кут ABM бути:
- 1) гострим;
 - 2) прямим?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3 (§§ 11–16)

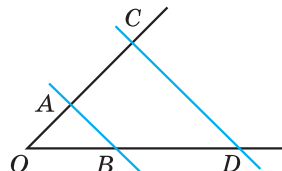
Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1** 1. Дано: $AB \parallel CD$ (мал. 1), $OA = 3$ см, $OB = 4$ см, $BD = 12$ см. Знайдіть AC .

А. 8 см Б. 9 см
В. 10 см Г. 16 см

2. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $AB : DE = 2 : 3$. Знайдіть відношення $EF : BC$.

А. 5 : 2 Б. 3 : 5
В. 2 : 3 Г. 3 : 2



Мал. 1

3. За яких з наведених умов $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$?

А. $\angle A = \angle A_1 = 30^\circ$
Б. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = 40^\circ$, $\angle B_1 = 50^\circ$
В. $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = 47^\circ$, $\angle C_1 = 47^\circ$
Г. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = 150^\circ$, $\angle C_1 = 150^\circ$

- 2** 4. CL – бісектриса трикутника ABC , $AC = 6$ см, $BC = 9$ см. Більший з відрізків, на які бісектриса CL ділить сторону AB , дорівнює 3 см. Знайдіть AB .

А. 7,5 см Б. 6 см
В. 5 см Г. 6,5 см

5. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а його проекція на гіпотенузу – 8 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

А. 15 см Б. 18 см В. 16 см Г. 24 см

6. Хорда AB завдовжки 12 см перетинає хорду CD у точці K , $AK = 2$ см, $CK = 4$ см. Знайдіть довжину хорди CD .

А. 9 см Б. 8 см В. 12 см Г. 10 см

- 3** 7. Сторони трикутника відносяться як 3 : 4 : 5. Знайдіть найменшу сторону подібного йому трикутника, якщо сума його середньої за величиною і найбільшої сторін дорівнює 72 см.

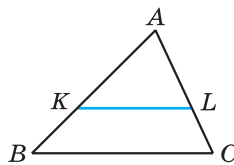
А. 18 см Б. 27 см В. $30\frac{6}{7}$ см Г. 24 см

8. $ABCD$ – трапеція, AB і CD – її основи, O – точка перетину діагоналей. $AB - CD = 4$ см, $AO = 8$ см, $OC = 6$ см. Знайдіть AB .

А. 12 см Б. 16 см В. 14 см Г. 18 см

9. Прямая KL паралельна стороні BC трикутника ABC , $K \in AB$, $L \in AC$ (мал. 2). $BC = 9$ см, $KL = 6$ см, $KB = 4$ см. Знайдіть довжину сторони AB .

А. 12 см Б. 8 см
В. 16 см Г. 10 см



Мал. 2

4 10. Периметр паралелограма дорівнює 30 см, а його висоти – 4 см і 6 см. Знайдіть більшу сторону паралелограма.

- А. 6 см Б. 8 см В. 9 см Г. 12 см

11. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Висота трапеції дорівнює 6 см і ділить більшу основу на два відрізки, менший з яких дорівнює 3 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

- А. 6 см Б. 8 см В. 9 см Г. 12 см

12. У трикутнику, сторони якого дорівнюють 8 см, 12 см і 15 см, проведено півколо, центр якого належить більшій стороні трикутника і яке дотикається до двох інших сторін. На які відрізки центр півкола ділить більшу сторону трикутника?

- А. 6 см і 9 см Б. 8 см і 7 см
В. 7,5 см і 7,5 см Г. 5 см і 10 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 13. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$, CK — висота трикутника, $KB = 9$ см, $AK : CK = 4 : 3$. Установіть відповідність між сторонами трикутника ABC (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).

Сторона трикутника	Довжина
1. AB	А. 15 см
2. BC	Б. 16 см
3. AC	В. 20 см
	Г. 25 см

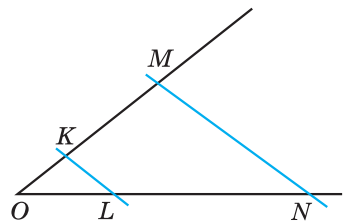
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 11–16

1 1. $\triangle ABC \sim \triangle LMN$, $\frac{AB}{LM} = 3$. Знайдіть відношення $\frac{AC}{LN}$.

2. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, якщо $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см, $A_1B_1 = 6$ см, $B_1C_1 = 8$ см, $A_1C_1 = 10$ см.

3. Дано: $KL \parallel MN$ (мал. 1), $OL = 3$ см, $LN = 6$ см, $OK = 2$ см. Знайдіть KM .

2 4. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його проекція на гіпотенузу дорівнює 4 см, а гіпотенуза – 25 см.



Мал. 1

5. AL – бісектриса трикутника ABC , $AB = 8$ см, $AC = 10$ см. Менший з відрізків, на які бісектриса AL ділить сторону BC , дорівнює 4 см. Знайдіть BC .

6. Хорда CD завдовжки 9 см перетинає хорду AB у точці M , $CM = 3$ см, $AM = 9$ см. Знайдіть довжину хорди AB .

- 3** 7. Сторони трикутника відносяться як 5 : 6 : 7. Знайдіть невідомі сторони подібного йому трикутника, якщо сума його більшої і меншої сторін дорівнює 24 см.
8. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AO = 6$ см, $OC = 4$ см. Знайдіть основи трапеції, якщо їхня сума дорівнює 20 см.
- 4** 9. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 6 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

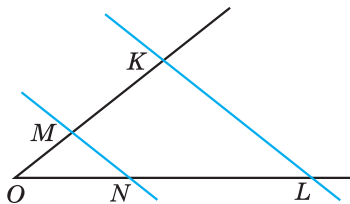
Додаткові завдання

- 4** 10. У двох рівнобедрених трикутниках кути при вершині між собою рівні. Периметр одного з трикутників дорівнює 56 см. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо дві сторони другого трикутника відносяться як 2 : 3.
11. На стороні AC трикутника ABC позначено точку K таку, що $\angle ABK = \angle C$, $AB = 8$ см, $AK = 4$ см. Знайдіть KC .

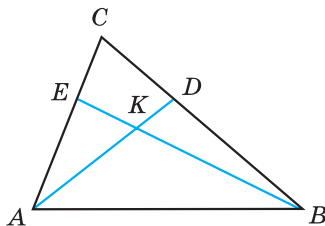
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

До § 11

- 1** 1. На малюнку 1 $MN \parallel KL$.
- 1) $OM : ON = 2 : 3$. Знайдіть $MK : NL$.
- 2) $OL : ON = 7 : 5$. Знайдіть $OK : OM$.
- 2** 2. Паралельні прямі MN і KL перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 1). $OM = 4$, $NL = 9$, $ON = MK$. Знайдіть довжину відрізка ON .



Мал. 1



Мал. 2

- 3** 3. Дано відрізки a і b . Побудуйте відрізок $x = \frac{a^2}{b}$.
- 4** 4. На малюнку 2 $AE : EC = 2 : 1$, $BD : DC = 3 : 2$. Знайдіть $BK : KE$.

До § 12

- 1** 5. $\triangle ABC \sim \triangle KLM$. Заповніть порожні комірки:

1) $\frac{AB}{AC} = \frac{\square}{\square}$; 2) $\frac{BC}{AC} = \frac{\square}{\square}$.

- 2** 6. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Знайдіть невідомі сторони обох трикутників.
- 3** 7. Сторони трикутника відносяться як $2 : 5 : 6$. Знайдіть периметр трикутника, подібного даному, якщо:
 1) його середня за розміром сторона дорівнює 20 см;
 2) сума більшої і меншої сторін дорівнює 40 см.
- 4** 8. У трикутнику проведено середню лінію. Чи подібний трикутник, що утворився, даному трикутнику?

До § 13

- 1** 9. За яких умов два трикутники подібні:
 1) дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого;
 2) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого;
 3) три кути одного трикутника дорівнюють трьом кутам другого?
- 2** 10. На катеті AC і гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначено точки P і L такі, що $\angle APL = 90^\circ$. Доведіть, що $\triangle APL \sim \triangle ACB$.
11. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O , $OB = 3OA$, $OC = 3OD$. Доведіть, що $\triangle AOD \sim \triangle BOC$.
12. Діагоналі трапеції діляться точкою перетину у відношенні $2 : 3$. Менша основа трапеції дорівнює 8 см. Знайдіть більшу основу трапеції.
13. У трикутниках KLM і $K_1L_1M_1$ $\angle K = \angle K_1$, а сторони трикутника KLM , що утворюють кут K , у 2,5 раза більші за сторони, що утворюють кут K_1 . Знайдіть LM , якщо $L_1M_1 = 4$ см.
- 3** 14. $ABCD$ – трапеція, $AD \parallel BC$, $\angle BAC = \angle ADC$.
 1) Знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.
 2) Доведіть, що $AC^2 = AD \cdot BC$.
15. На сторонах AC і BC трикутника ABC позначено точки M і N так, що $AC \cdot CM = BC \cdot CN$. Знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.
16. На стороні AC трикутника ABC вибрано точку K так, що $\angle BKC = \angle ABC$, причому $\angle BKC$ – тупий. Знайдіть BC , якщо $AK = 16$ см, $CK = 9$ см.
17. У трикутнику ABC через точку N , що належить стороні BC , проведено прями, що перетинають сторони AB і AC відповідно в точках M і K , і паралельні AC і AB . Доведіть, що $MN \cdot NK = BM \cdot CK$.
- 4** 18. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, точки I і I_1 – точки перетину бісектрис цих трикутників. Доведіть, що $\triangle AIB \sim \triangle A_1I_1B_1$.
19. У трикутник ABC вписано прямокутник $KLMN$, у якого $KN = 16$ см, $LK = 10$ см. Причому $K \in AC$, $N \in AC$, $M \in BC$, $L \in AB$. Знайдіть висоту трикутника, проведену з вершини B , якщо $AC = 24$ см.

20. BD і AE – висоти гострокутного трикутника ABC . Доведіть, що $DC \cdot AC = EC \cdot BC$.

До § 14

- 1 21. Накресліть прямокутний трикутник KLM ($\angle K = 90^\circ$) та проведіть у ньому висоту KP . Які відрізки є проєкціями катетів KL і KM на гіпотенузу?
- 2 22. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 1 см і 8 см. Знайдіть менший катет трикутника.
23. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 24 см, а проєкція одного з катетів на гіпотенузу – 18 см. Знайдіть проєкцію другого катета на гіпотенузу та катети трикутника.
- 3 24. BM – бісектриса рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). З точки M до BC проведено перпендикуляр MK . Знайдіть BM і периметр трикутника, якщо $KC = 9$ см, $MK = 12$ см.
25. Перпендикуляр, проведений з вершини кута прямокутника до діагоналі, ділить її на відрізки, довжини яких відносяться як 9 : 16. Знайдіть периметр прямокутника, якщо довжина перпендикуляра 12 см.
- 4 26. Коло, вписане в ромб, точкою дотику ділить сторону ромба на відрізки 3,6 см і 6,4 см. Знайдіть діагоналі ромба.
27. У рівнобічній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Висота трапеції дорівнює 6 см, а середня лінія – 9 см. Знайдіть основи трапеції.

До § 15

- 1 28. BM – бісектриса трикутника ABC . Знайдіть відношення $\frac{AM}{MC}$, якщо $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$.
- 2 29. BD – бісектриса трикутника ABC . Знайдіть сторону AB , якщо $AD : DC = 3 : 5$, $BC = 20$ см.
- 3 30. Одна зі сторін паралелограма на 9 см більша за другу. Бісектриса кута паралелограма ділить діагональ паралелограма на відрізки 4 см і 10 см. Знайдіть периметр паралелограма.
31. Периметр прямокутника – 60 см. Бісектриса, що виходить з вершини кута прямокутника, ділить його діагональ на відрізки, що відносяться як 7 : 8. Знайдіть сторони прямокутника.
- 4 32. Точка D належить стороні AB трикутника ABC . Порівняйте кути ACD і BCD , якщо $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $AD = 3$ см, $DB = 7$ см.
33. У рівнобедреному трикутнику радіус вписаного кола в 5 разів менший від висоти, проведеної до основи. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 90 см.

До § 16

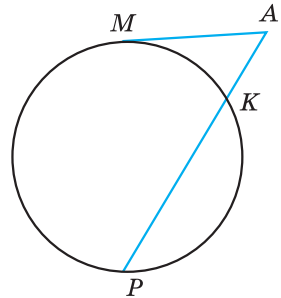
1 34. S – точка перетину хорд AB і CD , $AS = 4$, $SB = 1$. Якому числу дорівнює добуток $CS \cdot DS$?

2 35. Січні a і b виходять з точки M , що лежить поза колом. Січна a перетинає коло в точках A і B , а січна b – у точках C і D . Відомо, що $MA \cdot MB = 28$, $MC = 4$. Знайдіть MD і CD .

36. З точки A до кола проведено дотичну AM та січну AP (мал. 3). Знайдіть довжини відрізків AK і PK , якщо $AM = 8$ см, $AP = 16$ см.

3 37. З точки A до кола проведено дотичну AM та січну, яка перетинає коло в точках K і P (мал. 3). $AM = 10$ см, $AP : AK = 4 : 1$. Знайдіть AK , AP та KP .

38. Продовження медіани AM рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) перетинає коло, описане навколо трикутника, у точці P , $AM = 6$ см, $BC = 8$ см. Знайдіть AP .



Мал. 3

4 39. У трикутнику ABC з вершини B проведено бісектрису BL . Відомо, що $BL = 5$ см, $AL = 4$ см, $LC = 5$ см. Знайдіть AB і BC .



40. Побудуйте трикутник ABC за даним кутом A , відношенням сторін $AC : AB = 4 : 3$ і бісектрисою AL .



Головне в розділі 2

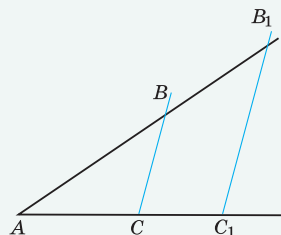
УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ФАЛЕСА (теорема про пропорційні відрізки)

Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}.$$

Наслідок 1. $\frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}.$

Наслідок 2. $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}.$

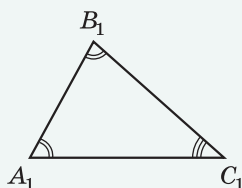
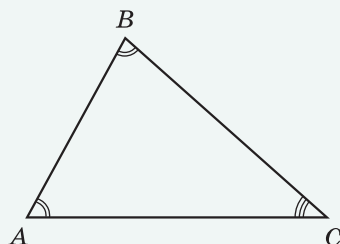


ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ

Два **трикутники** називають **подібними**, якщо їхні кути відповідно рівні й сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам іншого.

Якщо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні між собою, то

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1 \text{ і } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$



Якщо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то із співвідношення $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ випливає співвідношення:

$$AB : BC : AC = A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1.$$

Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін цих трикутників.

ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Теорема 1 (за двома сторонами та кутом між ними). Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого і кути, утворені цими сторонами, між собою рівні, то трикутники подібні.

Наслідок 1. Прямокутні трикутники подібні, якщо катети одного з них пропорційні катетам другого.

Наслідок 2. Якщо кут при вершині одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при вершині другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.

Теорема 2 (за двома кутами). Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то ці трикутники подібні.

Наслідок 1. Рівносторонні трикутники подібні.

Наслідок 2. Якщо кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при основі другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.

Наслідок 3. Якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то ці трикутники подібні.

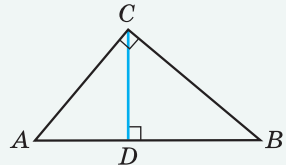
Теорема 3 (за трьома сторонами). Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то ці трикутники подібні.

СЕРЕДНІ ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ У ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ

Теорема (про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику). 1) Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним проєкцій катетів на гіпотенузу.

2) Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи та проєкції цього катета на гіпотенузу.

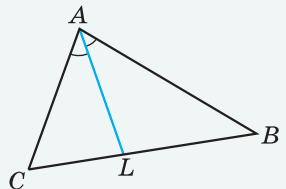
$$\begin{aligned} CD^2 &= AD \cdot BD, \\ AC^2 &= AB \cdot AD, \\ BC^2 &= AB \cdot BD. \end{aligned}$$



ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ ТРИКУТНИКА

Теорема (властивість бісектриси трикутника). Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до неї сторонам.

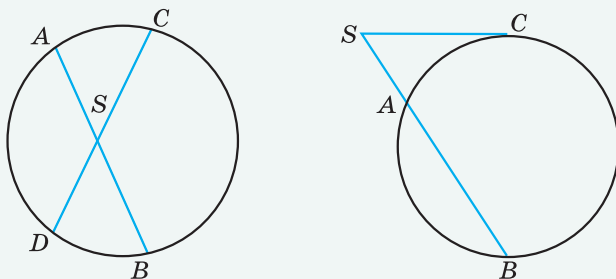
$$\begin{aligned} \frac{AB}{KC} &= \frac{BL}{CL}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC} \\ \frac{AB}{AC} &= \frac{BL}{LC}, \quad \frac{AB}{BL} = \frac{AC}{LC} \end{aligned}$$



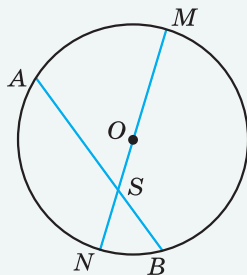
ЗАСТОСУВАННЯ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Теорема 1 (про пропорційність відрізків хорд). Якщо хорди AB і CD перетинаються в точці S , то

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$



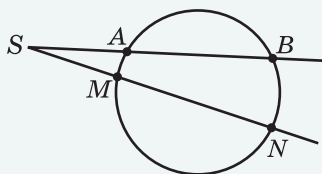
Наслідок. Якщо O – центр кола, R – його радіус, AB – хорда, $S \in AB$, то $AS \cdot BS = R^2 - a^2$, де $a = SO$.



Теорема 2 (про пропорційність відрізків січної і дотичної). Якщо з точки S поза колом провести січну, яка перетинає коло в точках A і B , та дотичну SC (C – точка дотику), то

$$SC^2 = SA \cdot SB.$$

Наслідок 1. Якщо з точки S провести дві січні, одна з яких перетинає коло в точках A і B , а друга – у точках M і N , то $SA \cdot SB = SM \cdot SN$.



Наслідок 2. Якщо O – центр кола, R – його радіус, SC – дотична, C – точка дотику, то $SC^2 = a^2 - R^2$, де $a = SO$.

Найвеличніший геометр ХХ століття

На початку 1980-х років Американське математичне товариство видало багатотомник «Видатні математики ХХ століття». Четвертий його том було присвячено монографії «Проблема Монжа – Ампера» – праці Олексія Васильовича Погорелова. В анотації до цього тому Погорелова було названо «найвеличнішим геометром ХХ століття».

Саме так було оцінено внесок нашого видатного вченого в розвиток геометрії, однієї з найдавніших наук на Землі.

Народився Олексій Погорелов 3 березня 1919 року в маленькому місті Короча тодішньої Білгородської губернії. У 1929 році сім'я Погорелових переїжджає до Харкова. Батьки Олексія працювали спочатку на будівництві Харківського тракторного заводу, а потім на цьому заводі. Родина Погорелових протягом довгого часу мешкала в крихітній, відгородженій від сусідів кімнатці бараку. Ліжок на всіх у родині бракувало, і батькові доводилося спеціально працювати в нічну зміну, щоб його діти могли виспатися в нормальних умовах. Незважаючи на складні умови проживання, Олексій добре навчався в школі з усіх предметів, але найбільше його цікавила математика. Згодом на одному з ювілеїв шкільні друзі згадували, що ще в школі однокласники дали йому прізвисько Паскаль.



У 1935 році в Києві було започатковано проведення математичних олімпіад¹. А в 1937-му харківський десятикласник Олексій Погорелов став переможцем такої олімпіади, і його запросили на навчання до Харківського державного університету (нині – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна). Отже, він став студентом математичного відділення. Олексій був дуже обдарованим студентом, про що свідчить той факт, що в 1943–1944 роках під час Другої світової війни його направили на навчання до Військово-повітряної академії ім. Жуковського – в один із найелітніших тодішніх військово-навчальних і наукових центрів. Після стажування в діючій армії та закінчення академії в 1945 році Олексія Погорелова направляють на конструкторську роботу у відомий Центральний аерогідродинамічний інститут у Москві. У той самий час Олексій Васильович заочно навчається в аспірантурі Математичного інституту Московського держуніверситету. Саме в ці роки класичний математик-геометр Погорелов сформувався і як інженер-конструктор, що має справу з конкретною технікою. У 1947 році Погорелов починає викладацьку діяльність у Харківському університеті. У 1950-му йому було присвоєно звання професора. Із цього часу й протягом наступних двадцяти років його діяльність було відзначено багатьма державними та міжнародними преміями, він був членом-кореспондентом, а потім і дійсним членом Академії наук України та академіком АН СРСР.

У 1960 році в Харкові було створено Фізико-технічний інститут низьких температур (ФТІНТ), і Погорелов очолив там відділ геометрії.

¹ Про становлення і розвиток українського математичного олімпіадного руху можна знайти в підручнику «Алгебра. 7 клас» (автор О. С. Істер, видавництво «Генеза», 2024 р., с. 173–176).

В інституті він пропрацював 40 років, створивши новий напрям у механіці та геометрії – геометричну теорію стійкості тонких пружних оболонок, пошук якої розпочав ще академік О. Д. Александров, видатний математик, якого Погорелов уважав своїм наставником у науці. Ця теорія підтвердилася під час досліджень, проведених у ФТІНТі. Інженерний талант класичного математика знайшов своє відображення у двох упроваджених авторських свідоцтвах, співпраці з машинобудівниками під час створення унікальних кріотурбогенераторів та надпровідних двигунів. А скільки оригінальних технічних ідей Погорелова не було доведено до впровадження й офіційного визнання з виправданням, що це потребувало немалою клопоту та зусиль! Серед таких винаходів – безінерційна спінінгова котушка, незвичний новаторський плуг, двигун внутрішнього згоряння принципово нової схеми.

Але головною справою його життя, безперечно, була чиста математика, геометрія. Цілу бібліотеку – близько 40 монографій, перекладених мовами багатьох народів світу, залишив нам у спадок Олексій Васильович. Серед них є такі, які зрозуміє лише коло спеціалізованих фахівців, а є й підручники з геометрії, написані для десятків тисяч студентів-математиків. А найвідомішим і найвизначнішим для класичної математики став його підручник з геометрії для середньої загальноосвітньої школи, перше видання якого вийшло друком у 1972 році та за яким протягом майже 20 років навчалися десятки мільйонів школярів СРСР та ще кілька років поспіль – українські школярі після здобуття Україною незалежності.

Помер Олексій Васильович Погорелов у грудні 2002 року.

Нашому видатному земляку вдалося розв'язати задачі, які сформулювали найвідоміші математики XIX та початку XX століття: Коші, Дарбу, Гільберт, Вейль, Мінковський, Кон-Фессет і Бернштейн.

Розділ 3 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** основні властивості прямокутних трикутників;
- **дізнаєтеся** про теорему Піфагора; синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника; властивості похилих та їхніх проєкцій;
- **навчитеся** знаходити співвідношення між сторонами й кутами прямокутного трикутника, розв'язувати прямокутні трикутники.



§ 17. Теорема Піфагора

1. Теорема Піфагора

Розглянемо одну з найважливіших теорем геометрії, яка встановлює залежність між катетами та гіпотенузою прямокутного трикутника.



Теорема 1 (теорема Піфагора). У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

На сьогодні відомо більше ніж сто доведень цієї теореми. Розглянемо одне з них.

Доведення. Нехай ABC – довільний прямокутний трикутник, у якого $\angle C = 90^\circ$ (мал. 17.1). Доведемо, що

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

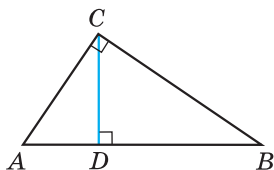
1) Проведемо висоту CD .

2) За теоремою про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику маємо: $AC^2 = AB \cdot AD$, $BC^2 = AB \cdot BD$.

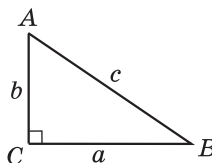
3) Додамо почленно ці дві рівності. Матимемо:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD = AB \cdot (AD + BD) = AB \cdot AB = AB^2.$$

4) Отже, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. ■



Мал. 17.1



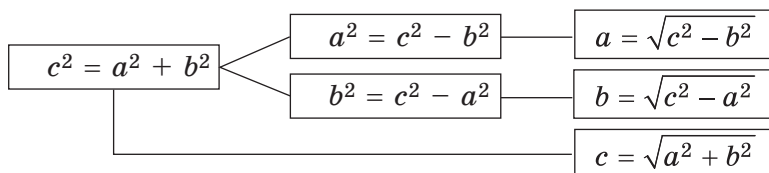
Мал. 17.2

Якщо позначити в $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (мал. 17.2), то теорему Піфагора можна записати формулою:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

За допомогою теореми Піфагора, знаючи дві сторони прямокутного трикутника, можна знайти третю.

У цьому нам допоможе така схема:



2. Розв'язування задач за допомогою теореми Піфагора

Приклад 1. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см. Знайти гіпотенузу.

Розв'язання. Нехай $a = 7$ см, $b = 24$ см, тоді

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ (см).}$$

Відповідь: 25 см.

Приклад 2. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 17 см, а один з катетів – 15 см. Знайти другий катет.

Розв'язання. Нехай $a = 15$ см, $c = 17$ см, тоді

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{(17 - 15)(17 + 15)} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8 \text{ (см).}$$

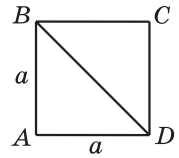
Відповідь: 8 см.

Приклад 3. Знайти діагональ квадрата, сторона якого дорівнює a .

Розв'язання. Розглянемо квадрат $ABCD$, у якого $AB = AD = a$ (мал. 17.3). Тоді

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Відповідь: $a\sqrt{2}$. ■



Мал. 17.3

Приклад 4. Знайти медіану рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює a .

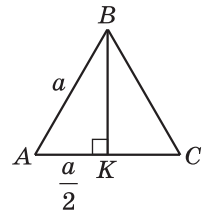
Розв'язання. Розглянемо рівносторонній трикутник зі стороною a , BK – медіана цього трикутника (мал. 17.4).

1) Оскільки BK – медіана рівностороннього трикутника, то вона є також і висотою.

2) У $\triangle ABK$: $\angle K = 90^\circ$, $AB = a$, $AK = \frac{a}{2}$. Тоді

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. ■



Мал. 17.4

Приклад 5. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 22 см, а бічна сторона – 13 см. Знайти висоту трапеції.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – дана трапеція, $AD \parallel BC$, $AD = 22$ см, $BC = 12$ см, $AB = CD = 13$ см (мал. 17.5).

1) Проведемо висоти BK і CM .

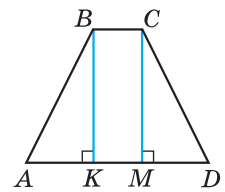
2) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (за катетом і гіпотенузою), тому

$$AK = MD = \frac{AD - KM}{2} = \frac{AD - BC}{2} = \frac{22 - 12}{2} = 5 \text{ (см).}$$

3) Із $\triangle ABK$, за теоремою Піфагора, маємо:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см).}$$

Відповідь: 12 см.



Мал. 17.5

Приклад 6. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а другий на 2 см менший від гіпотенузи. Знайти невідомий катет трикутника.

Розв'язання. Нехай $a = 8$ см і $b = x$ см – катети трикутника, тоді $c = (x + 2)$ см – його гіпотенуза.

Оскільки, за теоремою Піфагора, $c^2 = a^2 + b^2$, маємо рівняння:

$(x + 2)^2 = 8^2 + x^2$, звідки $x = 15$ (см).

Отже, невідомий катет дорівнює 15 см.

Відповідь: 15 см.

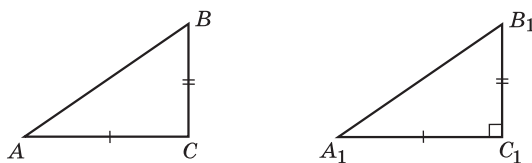
3. Теорема, обернена до теореми Піфагора

Справджується й твердження, обернене до теореми Піфагора.

Т Теорема 2 (обернена до теореми Піфагора). Якщо в трикутнику ABC має місце рівність $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то кут C цього трикутника – прямий.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Доведемо, що $\angle C = 90^\circ$ (мал. 17.6).

1) Розглянемо $\triangle A_1B_1C_1$, у якого $\angle C_1 = 90^\circ$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. Тоді, за теоремою Піфагора, $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, а отже, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$.



Мал. 17.6

2) Але за умовою $AC^2 + BC^2 = AB^2$, тому $A_1B_1^2 = AB^2$, тобто $A_1B_1 = AB$.

3) Отже,

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за трьома сторонами), звідки $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$. ■

Оскільки $5^2 = 3^2 + 4^2$, то трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 є прямокутним. Такий трикутник часто називають *єгипетським*, оскільки про те, що він прямокутний, було відомо ще давнім єгиптянам.

Трійку цілих чисел, що задовольняє теорему Піфагора, називають *піфагоровою трійкою чисел*, а трикутник, для якого вона є довжинами сторін, – *піфагоровим трикутником*. Наприклад, піфагоровою є не тільки трійка чисел 3, 4, 5, а й 7, 24, 25 або 9, 40, 41 тощо.

Зауважимо, що з теореми Піфагора та теореми, оберненої до неї, слідує, що

трикутник є прямокутним тоді й тільки тоді, коли квадрат найбільшої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін.

Приклад 7. Чи є прямокутним трикутник зі сторонами:

- 1) 6; 8; 10; 2) 5; 7; 9?

Розв'язання. 1) Оскільки $10^2 = 6^2 + 8^2$ ($100 = 100$), то трикутник є прямокутним.

2) Оскільки $9^2 \neq 5^2 + 7^2$ ($81 \neq 74$), то трикутник не є прямокутним.

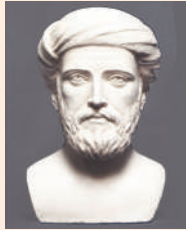
Відповідь: 1) так; 2) ні.

А ще раніше...

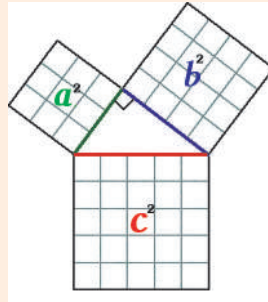
Теорема, яку названо на честь давньогрецького філософа та математика Піфагора, була відома задовго до нього. У текстах давніх вавилонян про неї згадувалося ще за 1200 років до Піфагора. Мабуть, доводити цю теорему вавилоняни не вміли, а залежність між катетами та гіпотенузою прямокутного трикутника встановили дослідним шляхом. Також ця теорема була відома в Давньому Єгипті та Китаї.

Вважають, що Піфагор – перший, хто запропонував строге доведення теореми. Формулювання в Піфагора було таким: «Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах». Саме в такому формулюванні теорему й довів Піфагор.

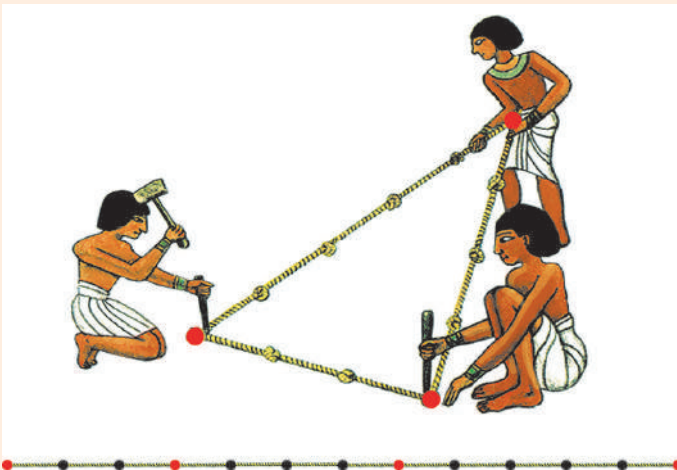
Малюнок до цього доведення ще називають «піфагоровими штаними».



Піфагор
(бл. 580–500 рр. до н. е.)



Знаючи, що трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 є прямокутним, землеміри Давнього Єгипту використовували його для побудови прямого кута. Мотузку ділили вузлами на 12 рівних частин, а її кінці з'єднували. Потім за допомогою кілків мотузку розтягували на землі у вигляді трикутника зі сторонами 3, 4 і 5. Тоді навпроти сторони 5 кут буде прямим.





Сформулюйте й доведіть теорему Піфагора. ○ Сформулюйте теорему, обернену до теореми Піфагора. ○ Який трикутник називають єгипетським? ○ Які трійки чисел і трикутники називають піфагоровими?

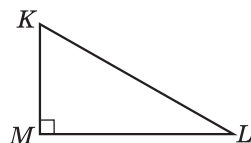


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

17.1. (Усно.) $\triangle MKL$ – прямокутний, $\angle M = 90^\circ$ (мал. 17.7). Які з рівностей правильні:

- 1) $KM^2 = ML^2 - KL^2$;
- 2) $KL^2 = ML^2 + KM^2$;
- 3) $ML^2 = KL^2 + KM^2$;
- 4) $KM^2 = KL^2 - ML^2$;
- 5) $KL^2 = ML^2 - KM^2$;
- 6) $ML^2 = KL^2 - KM^2$?



Мал. 17.7

17.2. $\triangle EFP$ – прямокутний, $\angle P = 90^\circ$. Заповніть пропуски:

- 1) $EF^2 = \dots^2 + \dots^2$;
- 2) $EP^2 = \dots^2 - \dots^2$.

17.3. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:

- 1) 6 см і 8 см;
- 2) 12 см і 35 см.

17.4. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:

- 1) 5 см і 12 см;
- 2) 8 см і 15 см.

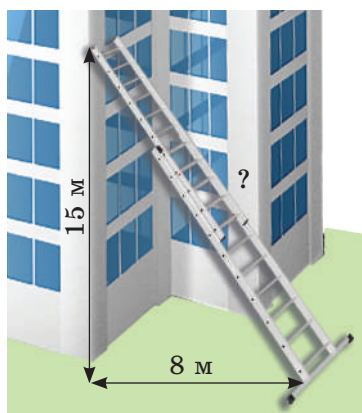
17.5. Знайдіть невідомий катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза та другий катет відповідно дорівнюють:

- 1) 17 см і 8 см;
- 2) 26 см і 10 см.

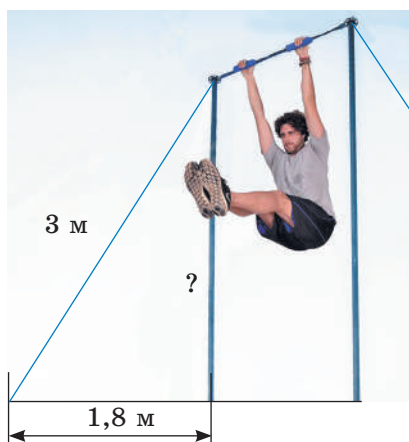
17.6. Знайдіть невідомий катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза та другий катет відповідно дорівнюють:

- 1) 25 см і 7 см;
- 2) 41 см і 40 см.

17.7. Пожежну драбину приставлено до вікна, розміщеного на висоті 15 м від землі (мал. 17.8). Нижній кінець драбини віддалений від стіни будинку на 8 м. Яка довжина драбини?



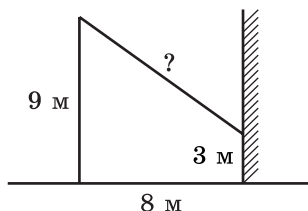
Мал. 17.8



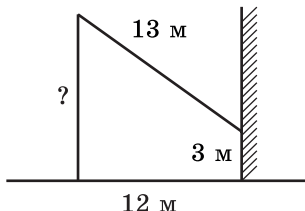
Мал. 17.9

- 17.8. Стовп гімнастичної трапеції укріплений за допомогою троса завдовжки 3 м так, що його нижній кінець віддалений від основи стовпа на 1,8 м (мал. 17.9). Яка висота стовпа?
- 2** 17.9. Дві більші сторони прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 5 см. Знайдіть його найменшу сторону.
- 17.10. Дві менші сторони прямокутного трикутника дорівнюють 2 см і 3 см. Знайдіть його найбільшу сторону.
- 17.11. Сторони прямокутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть його діагональ.
- 17.12. Діагональ прямокутника дорівнює 13 см, а одна з його сторін – 12 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.
- 17.13. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а висота, проведена до основи, – 12 см. Знайдіть основу трикутника.
- 17.14. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см, а висота, проведена до основи, – 15 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.
- 17.15. Діагоналі ромба дорівнюють 24 см і 70 см. Знайдіть сторону ромба.
- 17.16. Сторона ромба дорівнює 13 см, а одна з діагоналей – 10 см. Знайдіть другу діагональ ромба.
- 17.17. Діагональ квадрата дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть його сторону.
- 17.18. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 8 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до більшого катета.
- 17.19. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 9 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до меншого катета.
- 17.20. З точки A до кола із центром O проведено дотичну, B – точка дотику. Знайдіть довжину відрізка AO , якщо $OB = 2$ см, $AB = 7$ см.
- 17.21. З точки M до кола із центром O проведено дотичну, P – точка дотику. Знайдіть довжину відрізка PM , якщо $OP = 3$ см, $OM = 6$ см.
- 17.22. Чи є прямокутним трикутник зі сторонами:
1) 15; 20; 25;
2) 4; 5; 6?
- 17.23. Чи є прямокутним трикутник зі сторонами:
1) 5; 6; 9; 2) 16; 30; 34?
- 17.24. У колі, радіус якого дорівнює 13 см, проведено хорду 10 см завдовжки. Знайдіть відстань від центра кола до даної хорди.
- 17.25. У колі проведено хорду завдовжки 16 см. Знайдіть радіус кола, якщо відстань від центра кола до хорди дорівнює 6 см.
- 3** 17.26. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 6 см. Знайдіть третю сторону (розгляньте всі випадки).
- 17.27. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 2 см. Знайдіть третю сторону (розгляньте всі випадки).

- 17.28.** Від стовпа 9 м заввишки до будинку натягнуто провід (мал. 17.10), що кріпиться на висоті 3 м від землі. Відстань від будинку до стовпа – 8 м. Обчисліть довжину проводу.

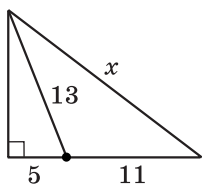


Мал. 17.10

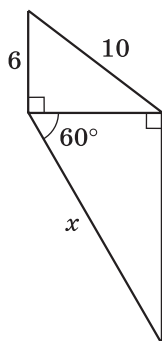


Мал. 17.11

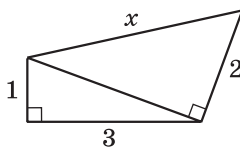
- 17.29.** Від стовпа до будинку натягнуто дрід 13 м завдовжки (мал. 17.11), який закріплено на стіні будинку на висоті 3 м від землі. Обчисліть висоту стовпа, якщо відстань від будинку до стовпа – 12 м.
- 17.30.** Катети прямокутного трикутника відносяться як 7 : 24, а гіпотенуза дорівнює 50 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 17.31.** Катет відноситься до гіпотенузи як 8 : 17. Знайдіть периметр трикутника, якщо другий катет дорівнює 30 см.
- 17.32.** Знайдіть довжину невідомого відрізка x на малюнках 17.12–17.15.



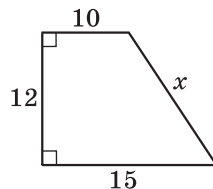
Мал. 17.12



Мал. 17.13

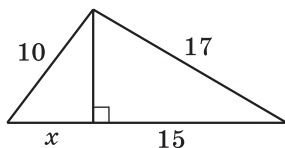


Мал. 17.14

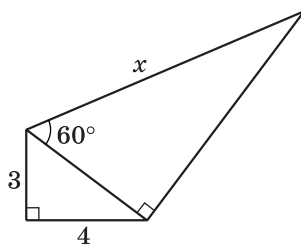


Мал. 17.15

- 17.33.** Знайдіть довжину невідомого відрізка x на малюнках 17.16 і 17.17.



Мал. 17.16



Мал. 17.17

- 17.34.** Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а другий на 2 см менший від гіпотенузи. Знайдіть периметр трикутника.
- 17.35.** Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а гіпотенуза на 1 см більша за другий катет. Знайдіть периметр трикутника.
- 17.36.** У трикутнику ABC кут A тупий, $BC = 39$ см, $AB = 17$ см. BK – висота трикутника, $BK = 15$ см. Знайдіть AC .
- 17.37.** BK – висота трикутника ABC , у якого $\angle C$ – тупий. $AB = 20$ см, $BC = 13$ см, $CK = 5$ см. Знайдіть AC .
- 17.38.** У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 5 см і поділяє її на два відрізки так, що прилеглий до вершини рівнобедреного трикутника відрізок дорівнює 12 см. Знайдіть основу трикутника.
- 17.39.** Висота BK рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) ділить сторону AC на відрізки $AK = 24$ см і $KC = 1$ см. Знайдіть основу трикутника.
- 4** **17.40.** Знайдіть сторони паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 8 см і 10 см і одна з них перпендикулярна до сторони.
- 17.41.** Радіус кола, описаного навколо тупокутного рівнобедреного трикутника, дорівнює 37 см, а його основа – 70 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.
- 17.42.** Висота рівнобедреного гострокутного трикутника, проведена до основи, дорівнює 18 см, а радіус кола, описаного навколо нього, – 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.
- 17.43.** Побудуйте відрізок, довжина якого дорівнює $\sqrt{13}$ см.
- 17.44.** Побудуйте відрізок, довжина якого дорівнює $\sqrt{10}$ см.
- 17.45.** Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки 10 см і 26 см завдовжки. Знайдіть периметр трикутника.
- 17.46.** Бісектриса прямого кута трикутника ділить гіпотенузу на відрізки, що дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 17.47.** У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить катет на відрізки 2 см і 10 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 17.48.** Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні й дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть середню лінію трапеції.
-  **17.49.** Рівнобічну трапецію з основами a і b описано навколо кола. Доведіть, що її висота дорівнює $\sqrt{ab}$.
- 17.50.** Відношення бічної сторони до основи рівнобедреного трикутника дорівнює 5 : 8, а різниця відрізків, на які бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену до основи, дорівнює 3 см. Знайдіть периметр трикутника.

- 17.51.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника на 5 см менша від основи. Відрізки, на які бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену до основи, відносяться як 5 : 3. Знайдіть висоту трикутника.



Вправи для повторення

- 17.52.** Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30° . Знайдіть медіану цього трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо сума гіпотенузи й меншого катета дорівнює 18 см.
- 17.53.** Коло радіуса 3 см вписано в ромб. Один з відрізків, на які точка дотику ділить сторону ромба, дорівнює 9 см. Знайдіть периметр ромба.
- 17.54.** Трапецію вписано в коло так, що діаметр кола є її більшою основою, а відношення основ дорівнює 2 : 1. Знайдіть кути трапеції.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 17.55.** Побудуйте пряму m та точку A на відстані 2 см від прямої m і точку B на відстані 3 см від прямої m .
- 17.56.** Побудуйте пряму a та позначте точку B , яка їй не належить.
- 1) Побудуйте перпендикуляр BK до прямої a .
 - 2) Побудуйте відрізок BM , де M – деяка точка прямої a .
 - 3) Порівняйте довжини відрізків BK і BM .
- 17.57.** Побудуйте паралельні прямі, відстань між якими дорівнює 2 см.



Життєва математика

- 17.58.** Потрібно пофарбувати стелю у двох тренажерних залах: один з них квадратної форми зі стороною 3,5 м, а другий – прямокутної, його розміри 4,5 м $\times$ 4 м. Для фарбування 1 м² стелі витрачають 240 г фарби. Фарба продається в банках по 2,5 кг. Яку найменшу кількість банок фарби потрібно придбати?

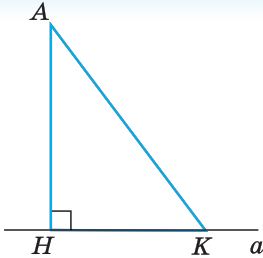


Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 17.59.** Чи можна розмістити на площині 6 точок так, щоб будь-які три з них були вершинами рівнобедреного трикутника?

§ 18. Перпендикуляр і похила, їхні властивості

1. Перпендикуляр і похила



AH – перпендикуляр, проведений з точки A до прямої a .

Точка H – основа перпендикуляра AH ,
 відрізок AK – похила,
 точка K (відмінна від H) – основа похилої,
 відрізок HK – проєкція похилої AK на пряму a .

2. Властивості перпендикуляра і похилої

Розглянемо властивості перпендикуляра й похилої.

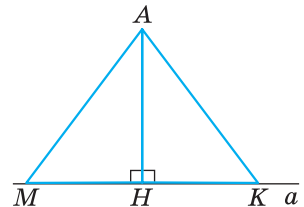
1. Перпендикуляр, проведений з точки до прямої, менший від будь-якої похилої, проведеної із цієї точки до цієї прямої.

Дійсно, у прямокутному трикутнику $АНК$ AH – катет, AK – гіпотенуза (мал. вище). Тому $AH < AK$.

2. Якщо дві похилі, проведені з точки до прямої, між собою рівні, то рівні між собою і їхні проєкції.

Нехай з точки A до прямої a проведено похилі AK і AM ($AK = AM$) і перпендикуляр AH (мал. 18.1). Тоді $\triangle АНК = \triangle АНМ$ (за катетом і гіпотенузою), а тому $HK = HM$.

Правильним є також і обернене твердження.



Мал. 18.1

3. Якщо проєкції двох похилих, проведених з точки до прямої, між собою рівні, то рівні між собою і самі похилі.

$\triangle АНК = \triangle АНМ$ (за двома катетами), тому $AK = AM$ (мал. 18.1).

4. З двох похилих, проведених з точки до прямої, більшою є та, у якій більша проєкція.

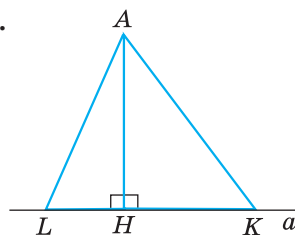
Нехай AK і AL – похилі, $HK > HL$ (мал. 18.2).

Тоді $AK^2 = AH^2 + HK^2$ (з $\triangle AHK$),

$$AL^2 = AH^2 + HL^2 \text{ (з } \triangle AHL\text{)}.$$

Але $HK > HL$, тому $AK^2 > AL^2$, отже, $AK > AL$.

Властивість справджується й у тому разі, коли точки K і L розміщені по один бік від точки H .



Мал. 18.2

Правильним є також і обернене твердження.

5. З двох похилих, проведених з точки до прямої, більша похила має більшу проекцію.

Нехай AK і AL – похилі, $AK > AL$ (мал. 18.2).

Тоді $HK^2 = AK^2 - AH^2$ (з $\triangle AHK$),

$$HL^2 = AL^2 - AH^2 \text{ (з } \triangle AHL\text{)}.$$

Але $AK > AL$, тому $HK^2 > HL^2$, отже, $HK > HL$.

Приклад 1. З точки до прямої проведено дві похилі. Довжина однієї з них дорівнює 10 см, а її проекції – 6 см. Знайти довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут 30° .

Розв'язання. Нехай на малюнку 18.2 $AL = 10$ см, $HL = 6$ см, $\angle AKH = 30^\circ$.

1) Із $\triangle AHL$: $AH = \sqrt{AL^2 - HL^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

2) Із $\triangle AHK$, за властивістю катета, що лежить проти кута 30° , мати-

мемо: $AH = \frac{AK}{2}$.

Тому $AK = 2 \cdot AH = 2 \cdot 8 = 16$ (см).

Відповідь: 16 см.

Приклад 2. З точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких дорівнюють 30 см і 9 см. Знайти довжини похилих, якщо їхня різниця дорівнює 9 см.

Розв'язання. Нехай на малюнку 18.2 $KH = 30$ см, $HL = 9$ см.

1) За властивістю 4: $AK > AL$. Позначимо $AL = x$ см. Тоді $AK = (x + 9)$ см.

2) Із $\triangle AHL$: $AH^2 = AL^2 - LH^2$, тому $AH^2 = x^2 - 9^2$.

Із $\triangle AHK$: $AH^2 = AK^2 - HK^2$, тому $AH^2 = (x + 9)^2 - 30^2$.

3) Ліві частини отриманих рівностей рівні, отже, рівні і праві їхні частини.

Маємо рівняння: $(x + 9)^2 - 30^2 = x^2 - 9^2$, звідки $x = 41$.

4) Отже, $AL = 41$ см, $AK = 41 + 9 = 50$ (см).

Відповідь: 41 см, 50 см.



Що називають похилою, проведеною з точки до прямої? Що називають основою похилої? Що називають проекцією похилої? Сформулюйте властивості похилих та їхніх проекцій.

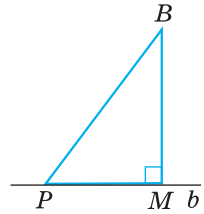


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

18.1. (Усно.) Назвіть на малюнку 18.3:

- 1) перпендикуляр, проведений з точки B до прямої b ;
- 2) основу перпендикуляра;
- 3) похилу, проведenu з точки B до прямої b ;
- 4) основу похилої;
- 5) проекцію похилої.



Мал. 18.3

- 18.2.** Накресліть пряму m і позначте точку P , що їй не належить. Проведіть перпендикуляр PK і похилу PM до прямої m .
- 18.3. (Усно.)** BM – перпендикуляр до прямої b , BP – похила (мал. 18.3). Порівняйте BM і BP .
- 18.4.** Довжина перпендикуляра, проведеного з точки до прямої, дорівнює 5 см, а довжина похилої, проведеної із цієї самої точки, – 13 см. Знайдіть проекцію похилої на дану пряму.
- 18.5.** Перпендикуляр, проведений з даної точки до прямої, дорівнює 6 см. Із цієї самої точки до прямої проведено похилу, проекція якої на пряму дорівнює 8 см. Знайдіть довжину похилої.
- 2** **18.6.** З точки до прямої проведено дві рівні між собою похилі. Проекція однієї з них дорівнює 7 см. Знайдіть відстань між основами похилих.
- 18.7.** З точки до прямої проведено дві рівні між собою похилі. Відстань між їхніми основами дорівнює 12 см. Знайдіть проекції похилих на цю пряму.
- 18.8.** Точка лежить на відстані 6 см від прямої. Із цієї точки до прямої проведено похилу, що утворює з прямою кут 30° . Знайдіть довжину похилої та її проекції на пряму.
- 18.9.** Точка лежить на відстані 4 см від прямої. Із цієї точки до прямої проведено похилу, що утворює з прямою кут 45° . Знайдіть проекцію похилої на цю пряму та довжину похилої.
- 18.10.** З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 13 см, а її проекція – 5 см. Знайдіть проекцію другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут 45° .
- 18.11.** З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 12 см та утворює з прямою кут 30° . Знайдіть довжину другої похилої, якщо її проекція на пряму – 8 см.
- 18.12.** З точки до прямої проведено дві похилі 13 см і 20 см завдовжки. Проекція першої на пряму дорівнює 5 см. Знайдіть проекцію другої похилої.
- 3** **18.13.** З точки, що міститься на відстані 24 см від прямої, проведено дві похилі 25 см і 26 см завдовжки. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки випадків слід розглянути?

- 18.14.** З точки, що міститься на відстані 8 см від прямої, проведено дві похилі 10 см і 17 см завдовжки. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки випадків слід розглянути?
- 18.15.** З точки до прямої проведено дві похилі 5 см і 8 см завдовжки. Який кут утворює друга похила з прямою, якщо проекція першої похилої на пряму дорівнює 3 см?
- 18.16.** З точки до прямої проведено дві похилі. Довжина однієї з похилих дорівнює 41 см, а її проекції – 9 см. Який кут утворює інша похила з прямою, якщо її проекція на цю пряму дорівнює 40 см?
- 18.17.** Точки M і N лежать по один бік від прямої a . Із цих точок до прямої a проведено перпендикуляри 2 см і 7 см завдовжки. Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, якщо $MN = 13$ см.
- 18.18.** Точки A і B лежать по один бік від прямої m . Із цих точок до прямої m проведено перпендикуляри 1 см і 7 см завдовжки. Знайдіть AB , якщо відстань між основами перпендикулярів дорівнює 8 см.
- 18.19.** З точки до прямої проведено дві похилі 10 см і 14 см завдовжки, різниця проекцій яких дорівнює 8 см. Знайдіть проекції похилих та відстань від точки до прямої.
- 18.20.** З точки до прямої проведено дві похилі, різниця яких дорівнює 2 см. Знайдіть ці похилі та відстань від точки до прямої, якщо проекції похилих дорівнюють 1 см і 5 см.
- 4** **18.21.** Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть проекції двох менших сторін на більшу сторону.
- 18.22.** Сторони гострокутного трикутника дорівнюють 25 см, 29 см і 36 см. Знайдіть проекції двох більших сторін на меншу сторону.
- 18.23.** З точки A до прямої m проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AK , причому точка K лежить між точками B і C . $AB = 15$ см, $AK = 12$ см, $KC = 16$ см. Знайдіть $\angle BAC$.



Вправи для повторення

- 18.24.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 5 см і 11 см, а її висота – 6 см. Знайдіть діагональ трапеції.
- 18.25.** Радіуси двох кіл, які мають зовнішній дотик, дорівнюють 1 см і 4 см. Пряма a – спільна дотична цих кіл. Знайдіть відстань між точками дотику прямої a з колами.



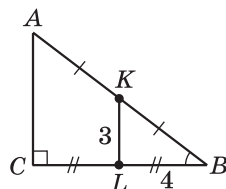
Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 18.26.** У трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено середню лінію KL (мал. 18.4), $KL = 3$ см, $LB = 4$ см.

1) У $\triangle KBL$ та $\triangle ABC$ знайдіть відношення катета, протилежного до кута B , до катета, прилеглого до кута B , і порівняйте отримані значення.

2) У $\triangle KBL$ і $\triangle ABC$ знайдіть відношення катета, протилежного до кута B , до гіпотенузи та порівняйте отримані значення.

3) У $\triangle KBL$ і $\triangle ABC$ знайдіть відношення катета, прилеглого до кута B , до гіпотенузи та порівняйте отримані значення.



Мал. 18.4

18.27. Визначте міру кутів трикутника зі сторонами задовжки:

1) 1 см, $\sqrt{3}$ см, 2 см;

2) 1 см, 1 см, $\sqrt{2}$ см.



Життєва математика

18.28. Відомо, що 1 га лісу за рік очищує 18 млн м^3 повітря. Скільки м^3 повітря очистить за рік ліс площею:

1) 5 га;

2) 2 км^2 ?



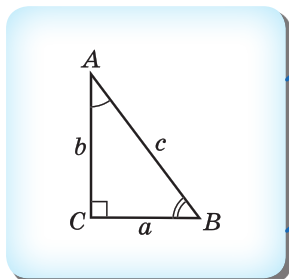
Цікаві задачі – поміркуй об'єднай

18.29. (Задача Стенфордського університету.) Точку P розташовано всередині прямокутника так, що відстань від неї до вершини прямокутника дорівнює 5 ярдів, до протилежної вершини – 14 ярдів, а до третьої вершини – 10 ярдів. Якою є відстань від точки P до четвертої вершини?

§ 19. Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника.

Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника

1. Означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута прямокутного трикутника



Для гострого кута A :
 BC – протилежний катет,
 AC – прилеглий катет.

Для гострого кута B :
 AC – протилежний катет,
 BC – прилеглий катет.

Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Синус кута A позначають так: $\sin A$. Отже,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Косинус кута A позначають так: $\cos A$. Отже,

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

Оскільки катети AC і BC менші від гіпотенузи AB , то синус і косинус гострого кута прямокутного трикутника менші від одиниці.

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.

Тангенс кута A позначають так: $\operatorname{tg} A$. Отже,

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}.$$

Доведемо, що якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то синуси цих кутів рівні, косинуси цих кутів рівні й тангенси цих кутів рівні.

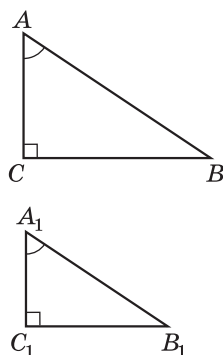
Розглянемо прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $\angle A = \angle A_1$ (мал. 19.1). Тоді $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (за гострим кутом). Тому

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}. \quad \text{Із цього випливає, що } \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1},$$

а тому $\sin A = \sin A_1$. Аналогічно $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, тому

$$\cos A = \cos A_1, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}, \quad \text{тому } \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1.$$

Отже, доходимо висновку: синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника залежать лише від градусної міри кута.



Мал. 19.1

2. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника

З означень синуса, косинуса й тангенса кута слідує такі співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника.

1. Катет дорівнює гіпотенузі, помноженій на синус протилежного до нього кута або на косинус прилеглого:

$$a = c \sin A = c \cos B \quad \text{та} \quad b = c \sin B = c \cos A.$$

2. Гіпотенуза дорівнює катету, поділеному на синус протилежного до нього кута або на косинус прилеглого:

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos A}.$$

3. Катет дорівнює другому катету, помноженому на тангенс кута, протилежного до першого катета:

$$a = b \operatorname{tg} A, \quad b = a \operatorname{tg} B.$$

4. Катет дорівнює другому катету, поділеному на тангенс кута, прилеглого до першого катета:

$$a = \frac{b}{\operatorname{tg} B}, \quad b = \frac{a}{\operatorname{tg} A}.$$

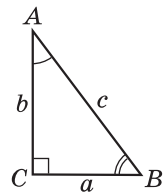
Приклад 1. У трикутнику ABC : $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$ см, $\cos A = \frac{3}{4}$.

Знайти AB .

Розв'язання. Скористаємося малюнком 19.2.

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = 12 : \frac{3}{4} = 16 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 16 см.



Мал. 19.2

Значення $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$ можна знаходити за допомогою спеціальних таблиць, калькулятора або комп'ютера. Для обчислень використовуємо клавіші калькулятора $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ і $\boxed{\operatorname{tg}}$ (на деяких калькуляторах $\boxed{\tan}$). Послідовність обчислень у різних калькуляторах різниться. Тому радимо уважно ознайомитися з інструкцією до калькулятора.

Приклад 2. У трикутнику ABC : $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$ см, $\angle A = 17^\circ$.

Знайти BC (з точністю до десятих сантиметра).

Розв'язання. $BC = AB \sin A$ (мал. 19.2). За допомогою таблиць або калькулятора знаходимо $\sin 17^\circ \approx 0,2924$. Отже,

$$BC \approx 10 \cdot 0,2924 \approx 2,9 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $\approx 2,9$ см.

Приклад 3. У трикутнику ABC : $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{3}{5}$, $AC = 12$ см.

Знайти AB і BC .

Розв'язання. Скористаємося малюнком 19.2.

1) $\sin A = \frac{BC}{AB}$, за умовою $\sin A = \frac{3}{5}$, тому $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$.

Позначимо $BC = 3x$ (см), $AB = 5x$ (см).

2) За теоремою Піфагора, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Тоді $(5x)^2 = 12^2 + (3x)^2$, $16x^2 = 144$, $x^2 = 9$, $x = 3$ (см).

3) Маємо: $BC = 3 \cdot 3 = 9$ (см), $AB = 5 \cdot 3 = 15$ (см).

Відповідь: $BC = 9$ см, $AB = 15$ см.

За допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера можна за даним значенням $\sin A$, $\cos A$ або $\operatorname{tg} A$ знаходити кут A . Для обчислень використовуємо клавіші калькулятора $[\sin^{-1}]$, $[\cos^{-1}]$ і $[\operatorname{tg}^{-1}]$.

Приклад 4. У трикутнику ABC : $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$ см, $BC = 5$ см. Знайти гострі кути трикутника.

Розв'язання. $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{4} = 1,25$ (мал. 19.2). За допомогою калькулятора знаходимо значення кута A в градусах: $51,34019$. Подаємо в градусах та мінутах (у деяких калькуляторах це можливо зробити за допомогою спеціальної клавіші). Маємо: $\angle A \approx 51^\circ 20'$. Тоді $\angle B = 90^\circ - \angle A \approx 90^\circ - 51^\circ 20' \approx 38^\circ 40'$.

Відповідь: $\approx 51^\circ 20'$; $\approx 38^\circ 40'$.

3. Синус, косинус і тангенс табличних кутів

Знайдемо синус, косинус і тангенс кутів 30° і 60° .

Розглянемо $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = a$ (мал. 19.3). Тоді за властивістю катета, що лежить проти кута 30° , $AB = 2a$.

За теоремою Піфагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

Тоді $\sin A = \frac{BC}{AB}$, тобто $\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$;

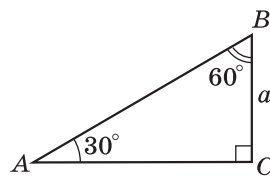
$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \text{ тобто } \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}, \text{ тобто } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin B = \frac{AC}{AB}, \text{ тобто } \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB}, \text{ тобто } \cos 60^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}, \text{ тобто } \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$



Мал. 19.3

Знайдемо синус, косинус і тангенс кута 45° .

Розглянемо $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $BC = a$ (мал. 19.4). Тоді $AC = BC = a$.

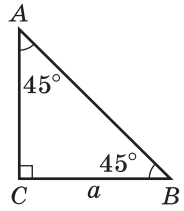
За теоремою Піфагора:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Тоді } \sin A = \frac{BC}{AB}, \text{ тобто } \sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \text{ тобто } \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}, \text{ тобто } \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$



Мал. 19.4

Систематизуємо отримані дані в таблицю:

A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} A$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



Кути 30° , 45° і 60° прийнято називати *табличними кутами*.

Приклад 5. Знайти висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, якщо основа дорівнює 12 см, а кут при вершині трикутника дорівнює 120° .

Розв'язання. Нехай ABC – даний трикутник, $AB = BC$, $AC = 12$ см, $\angle ABC = 120^\circ$ (мал. 19.5).

1) Проведемо до основи AC висоту BK , яка є також медіаною і бісектрисою.

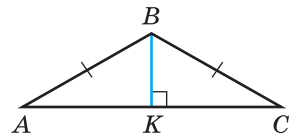
2) Тоді $KC = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (см).

3) $\angle KBC = \angle ABC : 2 = 120^\circ : 2 = 60^\circ$.

4) Із $\triangle BKC$ ($\angle K = 90^\circ$): $\operatorname{tg} KBC = \frac{KC}{BK}$,

звідси $BK = \frac{KC}{\operatorname{tg} KBC} = \frac{6}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ (см).

Відповідь: $2\sqrt{3}$ см.



Мал. 19.5



Що називають синусом, косинусом і тангенсом гострого кута прямокутного трикутника? Якими залежностями пов'язані між собою сторони й кути прямокутного трикутника?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 19.1. Дано $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ (мал. 19.6). Знайдіть:

- 1) $\sin A$; 2) $\cos B$; 3) $\operatorname{tg} A$;
4) $\cos A$; 5) $\sin B$; 6) $\operatorname{tg} B$.

19.2. Дано $\triangle MNK$, $\angle K = 90^\circ$ (мал. 19.7). Знайдіть:

- 1) $\cos M$; 2) $\sin N$; 3) $\operatorname{tg} M$;
4) $\sin M$; 5) $\cos N$; 6) $\operatorname{tg} N$.

19.3. Знайдіть за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера:

- 1) $\cos 22^\circ$; 2) $\sin 50^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 17^\circ$;
4) $\cos 12^\circ 10'$; 5) $\sin 67^\circ 30'$; 6) $\operatorname{tg} 81^\circ 48'$.

19.4. Знайдіть за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера:

- 1) $\sin 43^\circ$; 2) $\cos 57^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 70^\circ$;
4) $\sin 14^\circ 42'$; 5) $\cos 49^\circ 30'$; 6) $\operatorname{tg} 15^\circ 12'$.

19.5. Обчисліть:

- 1) $\sin 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$; 2) $\cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$.

19.6. Обчисліть:

- 1) $\operatorname{tg} 45^\circ - \cos 60^\circ$; 2) $\sin 45^\circ : \cos 45^\circ$.

2 19.7. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 5$ см, $BC = 12$ см. Знайдіть: $\sin A$, $\cos A$.

19.8. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 7$ см, $BC = 24$ см. Знайдіть: $\sin B$, $\cos B$.

19.9. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:

- 1) AC , якщо $BC = a$, $\angle B = \beta$; 2) AB , якщо $AC = b$, $\angle A = \alpha$.

19.10. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:

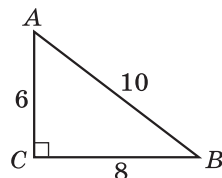
- 1) BC , якщо $AC = b$, $\angle A = \alpha$; 2) AB , якщо $BC = a$, $\angle B = \beta$.

19.11. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:

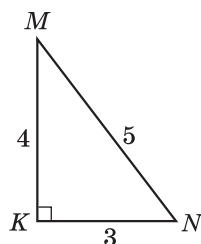
- 1) AB , якщо $AC = 5$ см, $\cos A = \frac{1}{4}$;
2) AB , якщо $BC = 3$ см, $\sin A = 0,6$;
3) AC , якщо $AB = 8$ см, $\sin B = \frac{3}{4}$;
4) BC , якщо $AB = 20$ см, $\cos B = \frac{4}{5}$;
5) AC , якщо $BC = 10$ см, $\operatorname{tg} B = 0,5$.

19.12. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:

- 1) AB , якщо $BC = 8$ см, $\cos B = \frac{1}{2}$;
2) AB , якщо $AC = 10$ см, $\sin B = 0,25$;



Мал. 19.6



Мал. 19.7

- 3) BC , якщо $AB = 6$ см, $\sin A = \frac{1}{3}$;
 4) AC , якщо $AB = 20$ см, $\cos A = 0,4$;
 5) BC , якщо $AC = 12$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$.

19.13. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:

- 1) AB , якщо $AC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle A = 30^\circ$;
 2) AC , якщо $AB = 5\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45^\circ$.

19.14. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:

- 1) AB , якщо $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle B = 30^\circ$;
 2) BC , якщо $AB = 10\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45^\circ$.

19.15. Знайдіть (за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера) гострий кут α , якщо:

- 1) $\sin \alpha = 0,4226$; 2) $\cos \alpha = 0,8192$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = 0,2679$;
 4) $\sin \alpha = 0,8231$; 5) $\cos \alpha = 0,9373$; 6) $\operatorname{tg} \alpha = 0,6924$.

19.16. Знайдіть (за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера) гострий кут β , якщо:

- 1) $\cos \beta = 0,1908$; 2) $\sin \beta = 0,8387$; 3) $\operatorname{tg} \beta = 0,7265$;
 4) $\cos \beta = 0,5493$; 5) $\sin \beta = 0,3518$; 6) $\operatorname{tg} \beta = 1,1792$.

19.17. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$. За допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера знайдіть із точністю до сотих сантиметра:

- 1) AB , якщо $BC = 5$ см, $\angle A = 42^\circ$;
 2) BC , якщо $AB = 10$ см, $\angle B = 37^\circ$;
 3) BC , якщо $AC = 4$ см, $\angle A = 82^\circ$.

19.18. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$. За допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера знайдіть із точністю до сотих сантиметра:

- 1) AC , якщо $AB = 8$ см, $\angle A = 15^\circ$;
 2) AB , якщо $BC = 9$ см, $\angle A = 43^\circ$;
 3) BC , якщо $AC = 5$ см, $\angle B = 29^\circ$.



19.19. Побудуйте кут:

- 1) тангенс якого дорівнює $\frac{3}{5}$;
 2) синус якого дорівнює $\frac{1}{7}$; 3) косинус якого дорівнює $\frac{2}{3}$.

19.20. Побудуйте кут:

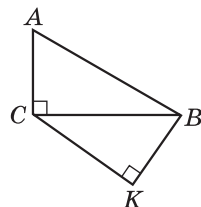
- 1) тангенс якого дорівнює $\frac{2}{7}$;
 2) синус якого дорівнює $\frac{4}{5}$; 3) косинус якого дорівнює $\frac{1}{3}$.

19.21. Діагональ прямокутника утворює з його стороною, довжина якої a , кут β . Знайдіть периметр прямокутника.

19.22. Одна сторона прямокутника дорівнює b . Його діагональ утворює з другою стороною кут α . Знайдіть площу прямокутника.

19.23. Кут ромба дорівнює 42° , а діагональ, що лежить проти нього, — 6 см. Знайдіть другу діагональ ромба (з точністю до сотих сантиметра).

- 19.24.** Сторона ромба дорівнює 8 см, а один з його кутів – 78° . Знайдіть (з точністю до сотих сантиметра) діагональ ромба, що виходить із цього кута.
- 19.25.** Гіпотенуза прямокутного трикутника – c , а один з гострих кутів – α . Знайдіть висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.
- 19.26.** Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює h . Знайдіть гіпотенузу трикутника, якщо один з його гострих кутів дорівнює β .
- 19.27.** Гіпотенуза прямокутного трикутника відноситься до катета цього трикутника як $8 : 5$. Знайдіть (з точністю до градуса) гострі кути цього трикутника.
- 19.28.** Відношення катетів прямокутного трикутника дорівнює $9 : 5$. Знайдіть (з точністю до градуса) гострі кути цього трикутника.
- 19.29.** Дано: $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:
- 1) AB і BC , якщо $AC = 6$ см, $\cos B = 0,8$;
 - 2) AC і BC , якщо $AB = 13$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{12}$.
- 19.30.** Дано: $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:
- 1) AB і BC , якщо $AC = 4$ см, $\sin A = 0,6$;
 - 2) AC і BC , якщо $AB = 34$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{8}{15}$.
- 19.31.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють $2a$ і $2b$ ($a > b$), а гострий кут – α . Знайдіть бічну сторону трапеції.
- 19.32.** На малюнку 19.8 $\angle ACB = \angle K = 90^\circ$, $AC = b$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCK = \gamma$. Знайдіть BC , CK , KB .
- 19.33.** На малюнку 19.8 $\angle ACB = \angle K = 90^\circ$, $BK = a$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCK = \alpha$. Знайдіть BC , AC , AB .
- 4** **19.34.** Сторони прямокутника дорівнюють 19 см і 50 см. Знайдіть гострий кут між діагоналями прямокутника (з точністю до мінути).
- 19.35.** Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 12 см. Знайдіть кути ромба (з точністю до мінути).
- 19.36.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює m , а кут при основі – α . Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.
- 19.37.** Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює β , а радіус вписаного кола – r . Знайдіть бічну сторону трикутника.
- 19.38.** Гострий кут паралелограма дорівнює 45° . Діагональ ділить тупий кут у відношенні $1 : 2$. Знайдіть цю діагональ, якщо периметр паралелограма дорівнює 20 см.
- 19.39.** Гострий кут паралелограма дорівнює 60° . Діагональ ділить тупий кут у відношенні $1 : 3$. Знайдіть цю діагональ, якщо периметр паралелограма дорівнює 24 см.
- 19.40.** У трикутнику одна зі сторін дорівнює 10 см, а прилеглі до неї кути – 135° і 30° . Знайдіть висоту трикутника, проведену до цієї сторони.



Мал. 19.8

19.41. У трикутнику одна зі сторін – 8 см, а прилеглі до неї кути – 60° і 45° . Знайдіть висоту трикутника, проведену до цієї сторони.



Вправи для повторення

19.42. Похила, проведена з точки до прямої, у два рази більша за перпендикуляр, проведений із цієї самої точки до цієї прямої. Знайдіть кут між похилою і перпендикуляром.

19.43. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а його проекція на гіпотенузу – 7,2 см. Знайдіть периметр трикутника.

19.44. Побудуйте ромб за висотою і меншою діагоналлю.



Життєва математика

19.45. Кут 3° розглядають крізь збільшувальне скло, що збільшує в п'ять разів. Якої величини здається кут?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

19.46. (Задача Архімеда.) Якщо в колі хорди AB і CD перетинаються в точці E під прямим кутом, то сума квадратів відрізків AE , BE , CE і DE дорівнює квадрату діаметра. Доведіть це.

§ 20. Розв'язування прямокутних трикутників



Розв'язати трикутник – означає знайти невідомі його сторони та невідомі його кути за відомими сторонами й кутами.

1. Розв'язування прямокутних трикутників. Загальні формули та факти

Щоб можна було розв'язати прямокутний трикутник, відомими мають бути або дві сторони трикутника, або одна зі сторін і один з гострих кутів трикутника.

Використовуючи в прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) позначення $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ (мал. 20.1) та співвідношення між його сторонами й кутами:

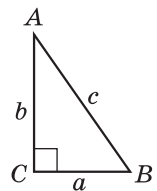
$$\angle A + \angle B = 90^\circ; \quad a^2 + b^2 = c^2 \text{ (теорема Піфагора);}$$

$$a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A = \frac{b}{\operatorname{tg} B};$$

$$b = c \sin B = c \cos A = a \operatorname{tg} B = \frac{a}{\operatorname{tg} A};$$

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos A}, \quad -$$

можна розв'язати будь-який прямокутний трикутник.



Мал. 20.1

Далі розглянемо чотири види задач на розв'язування прямокутних трикутників.

Зразки запису їхнього розв'язування в загальному вигляді та приклади задач подано у вигляді таблиць.

2. Розв'язування прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом

Приклад 1. Дано гіпотенузу c прямокутного трикутника та гострий кут A . Знайти другий гострий кут трикутника і його катети.

Розв'язання в загальному вигляді	Приклад
Д а н о: $c, \angle A$. З н а й т и: $\angle B, a, b$. Р о з в' я з а н н я. 1. $\angle B = 90^\circ - \angle A$. 2. $a = c \sin A$. 3. $b = c \cos A$.	Д а н о: $c = 7, \angle A = 29^\circ$. З н а й т и: $\angle B, a, b$. Р о з в' я з а н н я. 1. $\angle B = 90^\circ - 29^\circ = 61^\circ$. 2. $a = 7 \sin 29^\circ \approx 3,39$. 3. $b = 7 \cos 29^\circ \approx 6,12$. <i>Відповідь:</i> $61^\circ, \approx 3,39, \approx 6,12$.

3. Розв'язування прямокутних трикутників за катетом і гострим кутом

Приклад 2. Дано катет a прямокутного трикутника та гострий кут A . Знайти другий гострий кут трикутника, другий катет і гіпотенузу.

Розв'язання в загальному вигляді	Приклад
Д а н о: $a, \angle A$. З н а й т и: $\angle B, b, c$. Р о з в' я з а н н я. 1. $\angle B = 90^\circ - \angle A$. 2. $b = \frac{a}{\operatorname{tg} A}$ (або $b = a \operatorname{tg} B$). 3. $c = \frac{a}{\sin A}$ (або $c = \sqrt{a^2 + b^2}$).	Д а н о: $a = 5, \angle A = 63^\circ$. З н а й т и: $\angle B, b, c$. Р о з в' я з а н н я. 1. $\angle B = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$. 2. $b = \frac{5}{\operatorname{tg} 63^\circ} \approx 2,55$. 3. $c = \frac{5}{\sin 63^\circ} \approx 5,61$. <i>Відповідь:</i> $27^\circ, \approx 2,55, \approx 5,61$.

4. Розв'язування прямокутних трикутників за двома катетами

Приклад 3. Дано катети a і b прямокутного трикутника. Знайти гіпотенузу та гострі кути трикутника.

Розв'язання в загальному вигляді	Приклад
Дано: a, b. Знайти: $c, \angle A, \angle B$. Розв'язання. 1. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. 2. $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$. Далі $\angle A$ знаходимо за допомогою калькулятора або таблиць. 3. $\angle B \approx 90^\circ - \angle A$.	Дано: $a = 4, b = 7$. Знайти: $c, \angle A, \angle B$. Розв'язання. 1. $c = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \approx 8,06$. 2. $\operatorname{tg} A = \frac{4}{7}$; $\angle A \approx 29^\circ 45'$. 3. $\angle B \approx 90^\circ - 29^\circ 45' = 60^\circ 15'$. Відповідь: $8,06, \approx 29^\circ 45', \approx 60^\circ 15'$.

5. Розв'язування прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою

Приклад 4. Дано катет a та гіпотенузу c прямокутного трикутника. Знайти другий катет і гострі кути трикутника.

Розв'язання в загальному вигляді	Приклад
Дано: a, c. Знайти: $b, \angle A, \angle B$. Розв'язання. 1. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. 2. $\sin A = \frac{a}{c}$. Далі $\angle A$ знаходимо за допомогою калькулятора або таблиць. 3. $\angle B \approx 90^\circ - \angle A$.	Дано: $a = 5, c = 12$. Знайти: $b, \angle A, \angle B$. Розв'язання. 1. $b = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119} \approx 10,91$. 2. $\sin A = \frac{5}{12}$; $\angle A \approx 24^\circ 37'$. 3. $\angle B \approx 90^\circ - 24^\circ 37' = 65^\circ 23'$. Відповідь: $\approx 10,91, \approx 24^\circ 37', \approx 65^\circ 23'$.

6. Розв'язування прикладних задач

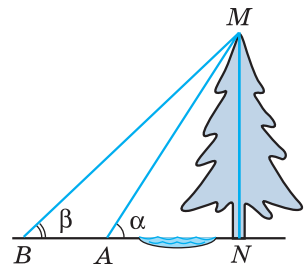
Розв'язування прямокутних трикутників використовують під час розв'язування прикладних задач.

Приклад 5. Знайти висоту дерева MN , основа N якого є недоступною (мал. 20.2).

Розв'язання. Позначимо на прямій, яка проходить через точку N , основу дерева, точки A та B і виміряємо відрізок AB та $\angle MAN = \alpha$ і $\angle MBN = \beta$.

1) У $\triangle MAN$: $AN = \frac{MN}{\operatorname{tg} \alpha}$.

2) У $\triangle MBN$: $BN = \frac{MN}{\operatorname{tg} \beta}$.



Мал. 20.2

3) Оскільки $AB = BN - AN$, маємо:

$$AB = \frac{MN}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{MN}{\operatorname{tg} \alpha} = MN \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = MN \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta},$$

$$\text{звідки } MN = \frac{AB \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{AB \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}.$$



Що означає розв'язати трикутник? Які співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника використовують для розв'язування трикутників?

Як розв'язати прямокутний трикутник: 1) за гіпотенузою і гострим кутом; 2) за катетом і гострим кутом; 3) за двома катетами; 4) за катетом і гіпотенузою?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

20.1. За гіпотенузою AB прямокутного трикутника ABC і гострим кутом знайдіть інші його сторони та другий гострий кут (сторони трикутника в задачах 3) і 4) знайдіть із точністю до сотих).

- 1) $AB = 6$ см, $\angle A = 30^\circ$; 2) $AB = 10$ дм, $\angle B = 45^\circ$;
3) $AB = 12$ см, $\angle A = 18^\circ$; 4) $AB = 15$ дм, $\angle B = 73^\circ$.

20.2. За гіпотенузою AB прямокутного трикутника ABC і гострим кутом знайдіть інші його сторони та другий гострий кут (сторони трикутника в задачах 3) і 4) знайдіть із точністю до сотих).

- 1) $AB = 14$ дм, $\angle A = 45^\circ$; 2) $AB = 6$ см, $\angle B = 60^\circ$;
3) $AB = 3$ дм, $\angle A = 82^\circ$; 4) $AB = 8$ см, $\angle B = 25^\circ$.

20.3. За катетом трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) і його гострим кутом знайдіть інші сторони та другий гострий кут трикутника (сторони трикутника в задачах 2) і 3) знайдіть із точністю до сотих).

- 1) $AC = 6$ см, $\angle B = 30^\circ$; 2) $AC = 12$ см, $\angle A = 24^\circ$;
3) $BC = 8$ дм, $\angle A = 42^\circ$; 4) $BC = 5$ см, $\angle B = 45^\circ$.

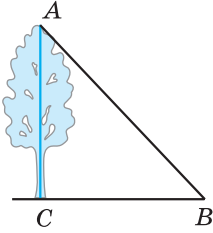
20.4. За катетом трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) і його гострим кутом знайдіть інші сторони та другий гострий кут трикутника (сторони трикутника в задачах 2) і 3) знайдіть із точністю до сотих).

- 1) $AC = 10$ см, $\angle A = 60^\circ$; 2) $AC = 8$ дм, $\angle B = 12^\circ$;
3) $BC = 6$ см, $\angle B = 71^\circ$; 4) $BC = 12$ дм, $\angle A = 45^\circ$.

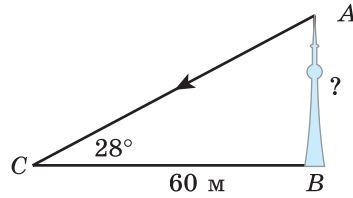
20.5. Діагональ прямокутника дорівнює 6 см і утворює кут 25° з однією з його сторін. Знайдіть кут, що утворює діагональ прямокутника з другою стороною, та сторони прямокутника (з точністю до сотих см).

20.6. З точки, що розміщена на відстані 6 см від прямої, проведено похилу, яка утворює з прямою кут 52° . Знайдіть кут, який утворює похила з перпендикуляром, проведеним з тієї самої точки, довжину похилої та проєкцію похилої (з точністю до сотих см).

20.7. Знайдіть висоту дерева AC (мал. 20.3), якщо $BC = 40$ м, а $\angle B = 27^\circ$.



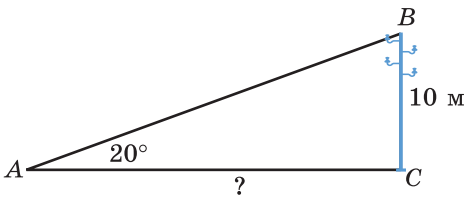
Мал. 20.3



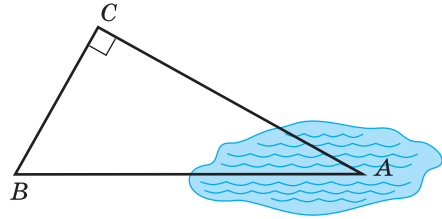
Мал. 20.4

20.8. Якщо висота сонця над горизонтом 28° , то тінь від телевізійної башти дорівнює 60 м (мал. 20.4). Знайдіть висоту башти (з точністю до десятих м).

20.9. Телеграфний стовп 10 м заввишки розміщено на березі річки (мал. 20.5). Верхній кінець стовпа видно з іншого берега під кутом 20° до горизонту. Знайдіть ширину річки (з точністю до десятих м).



Мал. 20.5



Мал. 20.6

20.10. За малюнком 20.6 знайдіть відстань від об'єкта B до недоступного об'єкта A , якщо $\angle C = 90^\circ$, $BC = 80$ м, $\angle B = 57^\circ$.

3

20.11. За двома катетами трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) знайдіть його гіпотенузу та гострі кути з точністю до мінут:

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| 1) $AC = 4$ см, $BC = 4\sqrt{3}$ см; | 2) $AC = 8$ дм, $BC = 15$ дм; |
| 3) $AC = 3$ см, $BC = 9$ см; | 4) $AC = 7m$ дм, $BC = 24m$ дм. |

20.12. За двома катетами трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) знайдіть його гіпотенузу та гострі кути з точністю до мінут:

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| 1) $AC = 2\sqrt{3}$ см, $BC = 2$ см; | 2) $AC = 8$ см, $BC = 6$ см; |
| 3) $AC = 2$ дм, $BC = 5$ дм; | 4) $AC = 9k$ дм, $BC = 40k$ дм. |

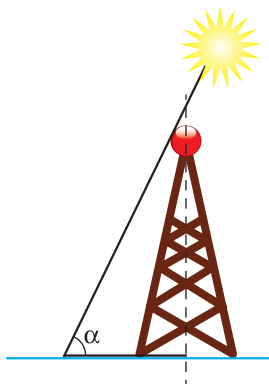
20.13. За катетом і гіпотенузою трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) знайдіть його другий катет та гострі кути з точністю до мінути:

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| 1) $AB = 6$ см, $AC = 3\sqrt{3}$ см; | 2) $AB = 65$ дм, $BC = 16$ дм; |
| 3) $AB = 7$ см, $AC = 4$ см; | 4) $AB = 13a$ см, $BC = 5a$ см. |

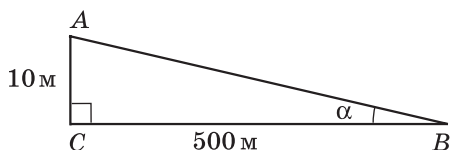
20.14. За катетом і гіпотенузою трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) знайдіть його другий катет та гострі кути з точністю до мінути:

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| 1) $AB = 8$ см, $AC = 4\sqrt{2}$ см; | 2) $AB = 37$ дм, $BC = 12$ дм; |
| 3) $AB = 10$ см, $AC = 7$ см; | 4) $AB = 61b$ дм, $BC = 60b$ дм. |

- 20.15.** Тінь від антени мобільного зв'язку, висота якої 5 м, дорівнює 2,6 м (мал. 20.7). Знайдіть з точністю до мінути висоту сонця над горизонтом (кут α).

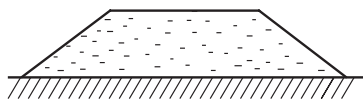


Мал. 20.7

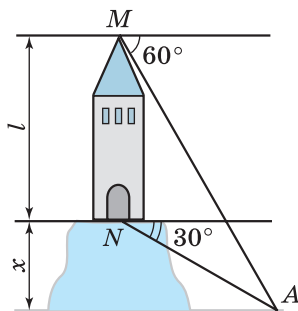


Мал. 20.8

- 20.16.** Знайдіть укіс дороги (значення тангенса кута α) за малюнком 20.8. Знайдіть міру кута α .
- 20.17.** Переріз залізничного насипу має форму рівнобічної трапеції (мал. 20.9). Нижня основа трапеції дорівнює 10 м, висота насипу – 2 м, а його укіс – 35° . Знайдіть ширину верхньої частини насипу (верхню основу трапеції).



Мал. 20.9



Мал. 20.10

- 20.18.** На горі розміщена башта, висота якої l м (мал. 20.10). За деяким об'єктом A , що розміщений біля підніжжя гори, спостерігають спочатку з вершини M башти під кутом 60° до горизонту, а потім від основи башти N під кутом 30° . Знайдіть висоту x гори.



Вправи для повторення

- 20.19.** Діагоналі ромба дорівнюють 16 см і 30 см. Знайдіть периметр ромба.

- 20.20. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$, $BC = 12$ см, $\sin B = \frac{3}{5}$. Знайдіть периметр трикутника.
- 20.21. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки, які дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть найменшу сторону трикутника.



Життєва математика

- 20.22. За санітарними нормами на кожного учня в класі повинно припадати не менше ніж $4,5 \text{ м}^3$ повітря. Яку найбільшу кількість учнів можна розмістити в кабінеті іноземної мови, довжина якого 6 м, ширина менша від довжини в 1,5 раза, а висота складає 80 % від ширини? Враховуйте, що об'єм меблів займає десятю частину від об'єму кабінету.



Цікаві задачі – поміркуй об'яче

- 20.23. Аркуш паперу склали вчетверо так, що отримали прямокутник зі сторонами, вдвічі меншими, ніж сторони аркуша. Потім отриманий прямокутник прокололи у двох місцях, аркуш розгорнули й через кожні дві отримані точки (проколи) провели пряму. Яку найменшу і яку найбільшу кількість прямих при цьому можна отримати?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4 (§§ 17–20)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.



1. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 7 см і 24 см.

А. $\sqrt{527}$ см Б. 31 см В. 25 см Г. 23 см

2. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а один з його катетів – 12 см. Знайдіть другий катет трикутника.

А. 8 см Б. 9 см В. 10 см Г. $\sqrt{369}$ см

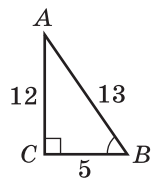
3. На малюнку 1 зображено прямокутний трикутник ABC . Знайдіть $\sin B$.

А. $\frac{12}{13}$ Б. $\frac{5}{13}$ В. $\frac{12}{5}$ Г. $\frac{5}{12}$



4. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Знайдіть сторону ромба.

А. 8 см Б. 10 см В. 16 см Г. 20 см



Мал. 1

5. Точка розміщена на відстані 8 см від прямої. З неї до прямої проведено перпендикуляр і похилу, яка утворює з перпендикуляром кут 60° . Знайдіть довжину похилої.

- А. $8\sqrt{3}$ см Б. 12 см В. $8\sqrt{2}$ см Г. 16 см

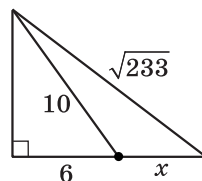
6. AB – гіпотенуза прямокутного трикутника ABC , $AC = 8$ см, $\angle A = 50^\circ$. Знайдіть AB з точністю до десятих.

- А. 12,5 см Б. 10,4 см В. 12,4 см Г. 9,5 см

3

7. Знайдіть x за малюнком 2.

- А. 13
Б. 7
В. 6
Г. 8



Мал. 2

8. З точки до прямої проведено дві похилі, різниця довжин яких дорівнює 1 см. Знайдіть довжину меншої похилої, якщо проекції похилих дорівнюють 4 см і 7 см.

- А. 15 см Б. 16 см В. 17 см Г. 18 см

9. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $AB = 20$ см, $\operatorname{tg} A = 0,75$. Знайдіть P_{ABC} .

- А. 50 см Б. 38 см В. 52 см Г. 48 см

4

10. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки 10 см і 26 см. Знайдіть гіпотенузу.

- А. 36 см Б. 38 см В. 39 см Г. 52 см

11. Сторони трикутника – 5 см, 29 см і 30 см. Знайдіть проекцію меншої сторони трикутника на його більшу сторону.

- А. 1,4 см Б. 1,6 см В. 1,8 см Г. 2,4 см

12. Сторони прямокутника дорівнюють 6 см і 10 см. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника (з точністю до градуса).

- А. 31° Б. 61° В. 62° Г. 64°

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

2

13. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 16 см і утворює кут 30° із прямою. Проекція іншої похилої дорівнює 6 см. Установіть відповідність між відрізками (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).

Відрізок

1. Проекція першої похилої на пряму
2. Перпендикуляр до прямої
3. Друга похила

Довжина

- А. 6 см
Б. 8 см
В. $8\sqrt{3}$ см
Г. 10 см

А ще раніше...

Жінки у становленні математики у світі

Теано, або **Феано** (грец. Θεανώ), – учениця і дружина давньогрецького філософа, великого математика і мудреця Піфагора (VI–V ст. до н. е.).

Піфагор заснував школу для вивчення математичних наук, або, як її часто називають, «університет у Кротоні», дорійській колонії на Півдні Італії. У ній філософ навчав обрану групу учнів, яких посвятив у глибоку мудрість – основи математики, музики, астрономії, які вважав «трикутною основою» для всіх мистецтв і наук.

У 60 років Піфагор одружився зі своєю ученицею Феано, дівчиною, яка підкорила серце мудрого філософа надзвичайним розумом, красою, безмежною відданістю, вірою і полум'яною любов'ю. Вона переймалася ідеями чоловіка з усією повнотою і після його смерті стала лідеркою піфагорійського ордену. Сім'я Піфагора була справжнім зразком для всього ордену, його будинок називали храмом Церери, а двір – храмом Муз.



Теано – дружина Піфагора

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 17–20

1

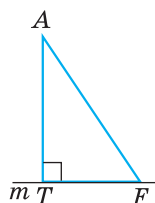
1. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 10 см і 24 см.

2. За малюнком 1 назвіть:

- 1) перпендикуляр, проведений з точки A до прямої m ;
- 2) похилу, проведenu з точки A до прямої m ;
- 3) проекцію цієї похилої.

3. За малюнком 2 знайдіть:

- 1) $\sin A$;
- 2) $\cos B$;
- 3) $\operatorname{tg} A$;
- 4) $\sin B$.

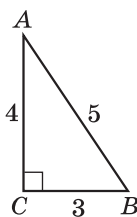


Мал. 1

2

4. Сторона ромба дорівнює 25 см, а одна з його діагоналей – 14 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

5. Точка міститься на відстані 6 см від прямої. Із цієї точки до прямої проведено похилу, яка утворює з прямою кут 30° . Знайдіть довжину похилої та довжину проекції похилої на пряму.



Мал. 2

6. $AB = 16$ см – гіпотенуза прямокутного трикутника ABC , $\angle A = 35^\circ$. Розв'яжіть цей прямокутний трикутник. (Сторони трикутника знайдіть із точністю до сотих сантиметра.)

3

7. У трикутнику ABC $\angle A$ – тупий, $BC = 20$ см, $AB = 15$ см, $BK = 12$ см – висота трикутника. Знайдіть AC .

8. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$, $AC = 24$ см, $\sin A = \frac{5}{13}$. Знайдіть P_{ABC} .

4

9. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки 6 см і 10 см. Знайдіть сторони трикутника.

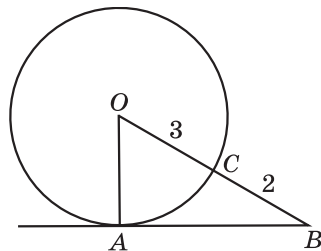
Додаткові завдання

- 4** 10. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см. Знайдіть проєкції двох менших сторін на більшу сторону.
11. Діагоналі ромба дорівнюють 6 см і 12 см. Знайдіть кути ромба з точністю до мінут.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 3

До § 17

- 1** 1. Нехай a і b – катети прямокутного трикутника, c – його гіпотенуза. Знайдіть:
- 1) c , якщо $a = 11$ см, $b = 60$ см;
 - 2) a , якщо $c = 13$ см, $b = 12$ см;
 - 3) b , якщо $a = 24$ см, $c = 25$ см.
- 2** 2. Сторона квадрата – 5 см. Знайдіть його діагональ.
3. У рівнобедреному трикутнику ABC : $AB = AC = 37$ см, $BC = 24$ см. Знайдіть довжину висоти AK .
4. Чи є прямокутним трикутник, сторони якого пропорційні числам:
- 1) 3; 4; 5; 2) 6; 7; 10?
5. Площа прямокутника дорівнює 12 см^2 , а одна з його сторін – 3 см. Знайдіть діагональ прямокутника.
6. На малюнку 1 AB – дотична до кола із центром у точці O , $OC = 3$ см, $CB = 2$ см. Знайдіть AB .
- 3** 7. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 8 см і 17 см, а більша бічна сторона – 15 см. Знайдіть периметр трапеції.
8. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 26 см, висота – 12 см, а діагональ – 20 см. Знайдіть меншу основу трапеції та її бічну сторону.
9. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 15 см, а катети відносяться як 3 : 4. Знайдіть периметр трикутника.
10. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи як 5 : 6. Висота трикутника, проведена до основи, дорівнює 8 см. Знайдіть периметр трикутника.
11. У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки 50 см і 80 см, починаючи від вершини кута між бічними сторонами. Знайдіть висоту трикутника, проведenu до основи.



Мал. 1

- 4 12. У трикутнику ABC : $AB = \sqrt{2}$ см, $BC = 2$ см. На стороні AC позначено точку K так, що $AK = KB = 1$ см. Знайдіть градусну міру кута ABC .

13. Бічні сторони трапеції дорівнюють 9 см і 12 см, а основи – 30 см і 15 см. Знайдіть кут, що утворюють між собою продовження бічних сторін.

14. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 25 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо його найменша висота дорівнює 24 см.

До § 18

- 1 15. З точки до прямої проведено похилу, довжина якої 5 см. Знайдіть відстань від точки до прямої, якщо проекція похилої дорівнює 4 см.

- 2 16. З точки до прямої проведено дві похилі, які утворюють з прямою рівні кути. Відстань між основами похилих дорівнює 8 см. Знайдіть проекції похилих на цю пряму.

17. З точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу, яка утворює з прямою кут 60° . Знайдіть перпендикуляр і проекцію похилої, якщо довжина похилої 12 см.

- 3 18. З точки, що міститься на відстані 4 см від прямої, проведено до неї дві похилі. Довжина однієї з них 5 см, а друга утворює з прямою кут 45° . Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки випадків слід розглянути?

19. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться як 13 : 15, а довжини їхніх проекцій дорівнюють 10 см і 18 см. Знайдіть довжини похилих та відстань від точки до прямої.

- 4 20. Знайдіть меншу з висот трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см.

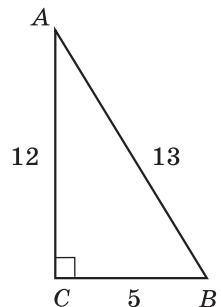
До § 19

- 1 21. На малюнку 2 трикутник ABC – прямокутний. Чи правильні рівності:

1) $\sin A = \frac{5}{12}$; 2) $\cos A = \frac{12}{13}$;

3) $\operatorname{tg} A = \frac{12}{5}$; 4) $\sin B = \frac{12}{13}$;

5) $\cos B = \frac{13}{5}$; 6) $\operatorname{tg} B = \frac{12}{5}$?



Мал. 2

- 2 22. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута M трикутника MNP ($\angle P = 90^\circ$), якщо $MP = 24$ см, $MN = 25$ см.

23. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 см і 15 см. Знайдіть:

- 1) синус гострого кута, що лежить проти меншого катета;
- 2) косинус гострого кута, прилеглого до більшого катета;
- 3) тангенс обох гострих кутів.

3 24. Радіус кола, описаного навколо прямокутника, дорівнює R . Діагональ прямокутника утворює зі стороною кут α . Знайдіть периметр прямокутника.

25. Кут ромба дорівнює 80° , а діагональ, що лежить проти цього кута, — 10 см. Знайдіть (з точністю до сотих см) периметр ромба.

26. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$, CK — висота, $CA = b$, $\angle A = \alpha$. Знайдіть CK і KB .

27. У рівнобедреному трикутнику синус кута при основі дорівнює 0,96, а основа — 28 см. Знайдіть бічну сторону.

4 28. Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, дорівнює r , а один з його гострих кутів — β . Знайдіть катет, прилеглий до цього гострого кута.

29. Основи трапеції дорівнюють 14 см і 10 см, кути при більшій основі дорівнюють 60° і 30° . Знайдіть висоту й діагоналі трапеції.

30. З точки до прямої проведено дві похилі, що утворюють з прямою кути 30° і 60° . Знайдіть відстань від точки до прямої, якщо відстань між основами похилих дорівнює a см. Скільки випадків треба розглянути?

31. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$. Доведіть, що $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. (Запис $\sin^2 A$ є тотожним запису $(\sin A)^2$.)

До § 20

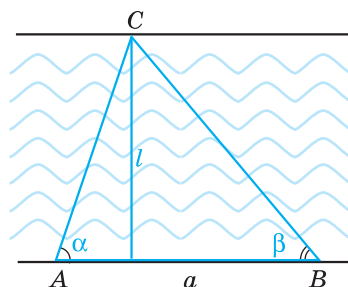
2 32. За двома елементами прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) знайдіть інші його сторони та кути:

- 1) $AB = 7$ см, $\angle A = 19^\circ$;
- 2) $AB = 20$ дм, $\angle B = 48^\circ$;
- 3) $BC = 5$ см, $\angle B = 57^\circ$;
- 4) $AC = 18$ дм, $\angle B = 32^\circ$.

3 33. За двома сторонами прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) знайдіть його третю сторону та гострі кути:

- 1) $AC = 9$ см, $BC = 12$ см;
- 2) $AC = 7$ дм, $BC = 5$ дм;
- 3) $AB = 34$ см, $BC = 30$ см;
- 4) $AB = 8$ дм, $AC = 7$ дм.

4 34. Для визначення ширини l річки взяли два будинки A і B на одному березі та будинок C на другому (мал. 3), $AB = a$ м, $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. Знайдіть ширину річки.



Мал. 3

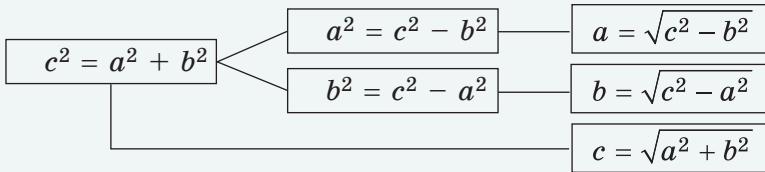
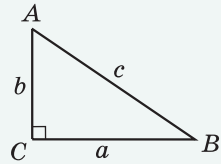


Головне в розділі 3

ТЕОРЕМА ПІФАГОРА

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

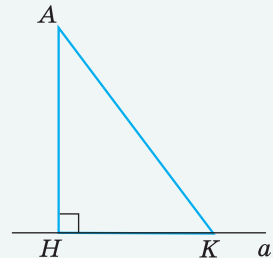


Теорема (обернена до теореми Піфагора). Якщо в трикутнику ABC має місце рівність $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то кут C цього трикутника – прямий.

Трикутник є прямокутним тоді й тільки тоді, коли квадрат найбільшої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

$АН$ – **перпендикуляр**, проведений з точки A до прямої a . Точка H – **основа перпендикуляра** $АН$. K – довільна точка прямої a , відмінна від H . Відрізок AK – **похила**, проведена з точки A до прямої a , а точка K – **основа похилої**. Відрізок HK – **проекція похилої** AK на пряму a .



1. Перпендикуляр, проведений з точки до прямої, менший від будь-якої похилої, проведеної із цієї точки до цієї прямої.
2. Якщо дві похилі, проведені з точки до прямої, між собою рівні, то рівні між собою і їхні проекції.
3. Якщо проекції двох похилих, проведених з точки до прямої, між собою рівні, то рівні між собою і самі похилі.
4. З двох похилих, проведених з точки до прямої, більшою є та, у якої більша проекція.
5. З двох похилих, проведених з точки до прямої, більша похила має більшу проекцію.

**СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС ГОСТРОГО
КУТА ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА. СПІВВІДНОШЕННЯ
МІЖ СТОРОНАМИ ТА КУТАМИ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА**

Синус гострого кута прямокутного трикутника – відношення протилежного катета до гіпотенузи:

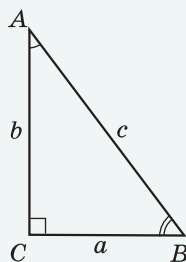
$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Косинус гострого кута прямокутного трикутника – відношення прилеглого катета до гіпотенузи:

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

Тангенс гострого кута прямокутного трикутника – відношення протилежного катета до прилеглого:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}.$$



A	30°	45°	60°
sin A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg A	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Розділ 4

МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** поняття многокутника і його площі; формули для обчислення площі прямокутника і квадрата;
- **дізнаєтеся**, як обчислити суму кутів многокутника, площу паралелограма, ромба, трикутника, трапеції;
- **навчитеся** застосовувати вивчені поняття, властивості та формули до розв'язування задач.



§ 21. Многокутник і його елементи.

Сума кутів опуклого многокутника.

Многокутник, вписаний у коло, і многокутник, описаний навколо кола

1. Многокутник і його елементи. Види многокутників

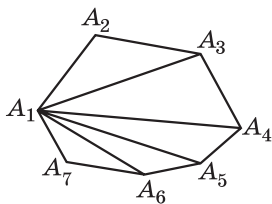
Розглянемо фігуру $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, зображену на малюнку нижче. Вона складається з відрізків A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 , A_5A_6 і A_6A_1 . При цьому відрізки розміщені так, що *сусідні (суміжні) відрізки* (A_1A_2 і A_2A_3 , A_2A_3 і A_3A_4 , ..., A_6A_1 і A_1A_2) не лежать на одній прямій, а *несусідні (несуміжні) відрізки* не мають спільних точок.



Кількість вершин многокутника дорівнює кількості його сторін.

Суму довжин усіх сторін многокутника називають його **периметром**.

Найменша кількість вершин (сторін) у многокутника – три. У цьому разі маємо трикутник. Також окремим видом многокутника є чотирикутник.



Мал. 21.1

Многокутник, що має n вершин, називають **n -кутником**. На малюнку 21.1 зображено семикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$.

Відрізок, який сполучає дві несусідні вершини многокутника, називають **діагоналлю** многокутника. На малюнку 21.1 зображено діагоналі многокутника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, що виходять з вершини A_1 : $A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_1A_6$.



Приклад 1. Скільки діагоналей має n -кутник?

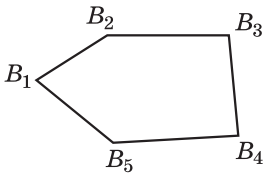
Розв'язання. З кожної вершини n -кутника виходить $(n - 3)$ діагоналі. Усіх вершин n , а кожна діагональ повторюється 2 рази, наприклад A_1A_3 і A_3A_1 . Тому всіх діагоналей у n -кутнику буде $\frac{n(n-3)}{2}$.

Відповідь: $\frac{n(n-3)}{2}$. ■

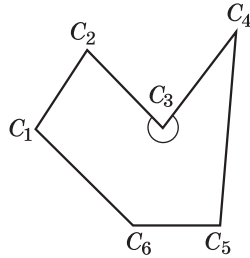
Кути, сторони яких містять сторони многокутника, називають *кутами многокутника*. П'ятикутник $B_1B_2B_3B_4B_5$ має кути $B_5B_1B_2$, $B_1B_2B_3$, $B_2B_3B_4$, $B_3B_4B_5$, $B_4B_5B_1$.

Якщо всі кути многокутника менші від розгорнутого кута, то многокутник називають **опуклим**, якщо хоча б один кут многокутника більший за розгорнутий, то многокутник називають **неопуклим**.

Многокутник $B_1B_2B_3B_4B_5$ – опуклий (мал. 21.2), а многокутник $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ – неопуклий (мал. 21.3), оскільки кут при вершині C_3 більший за 180° .



Мал. 21.2

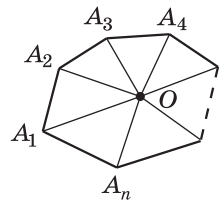


Мал. 21.3



Теорема (про суму кутів опуклого n -кутника). Сума кутів опуклого n -кутника дорівнює $180^\circ(n - 2)$.

Доведення. Виберемо у внутрішній області многокутника довільну точку O та сполучимо її з усіма вершинами n -кутника (мал. 21.4). Одержимо n трикутників, сума всіх кутів яких дорівнює $180^\circ \cdot n$. Сума кутів з вершиною в точці O дорівнює 360° . Сума кутів цього n -кутника дорівнює сумі кутів усіх трикутників без кутів з вершиною в точці O , тобто $180^\circ n - 360^\circ = 180^\circ(n - 2)$. ■



Мал. 21.4

Приклад 2. Знайти кути опуклого п'ятикутника, якщо кожен з них, починаючи з другого, менший від попереднього на 5° .

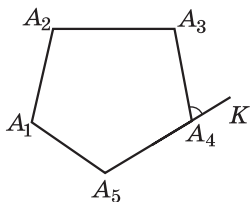
Розв'язання. Для зручності позначимо більший з кутів п'ятикутника – $\angle 1$, решта відповідно – $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$.

1) Нехай $\angle 1 = x$, тоді $\angle 2 = x - 5^\circ$, $\angle 3 = x - 10^\circ$, $\angle 4 = x - 15^\circ$, $\angle 5 = x - 20^\circ$.

2) Сума кутів опуклого п'ятикутника: $180^\circ \cdot (5 - 2) = 180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$.

3) За умовою $x + (x - 5^\circ) + (x - 10^\circ) + (x - 15^\circ) + (x - 20^\circ) = 540^\circ$.

- Звідки $x = 118^\circ$.
- 4) Отже, $\angle 1 = 118^\circ$, $\angle 2 = 118^\circ - 5^\circ = 113^\circ$, $\angle 3 = 118^\circ - 10^\circ = 108^\circ$, $\angle 4 = 118^\circ - 15^\circ = 103^\circ$, $\angle 5 = 118^\circ - 20^\circ = 98^\circ$.
- Відповідь: $118^\circ, 113^\circ, 108^\circ, 103^\circ, 98^\circ$.



Мал. 21.5

Кути опуклого многокутника іноді називають ще його **внутрішніми кутами**. Кут, суміжний з внутрішнім кутом многокутника, називають **зовнішнім кутом многокутника**. На малюнку 21.5 кут A_3A_4K – зовнішній кут многокутника $A_1A_2A_3A_4A_5$ при вершині A_4 .

Очевидно, що кожний многокутник має по два зовнішніх кути при кожній вершині.



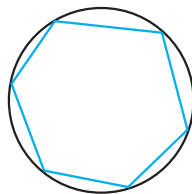
Приклад 3. Довести, що сума зовнішніх кутів будь-якого опуклого n -кутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360° .

Розв'язання. Сума внутрішнього й зовнішнього кутів при кожній вершині многокутника дорівнює 180° . Тому сума всіх внутрішніх і зовнішніх кутів n -кутника дорівнює $180^\circ \cdot n$. Оскільки сума внутрішніх кутів дорівнює $180^\circ(n - 2)$, то сума зовнішніх кутів дорівнює:

$$180^\circ n - 180^\circ(n - 2) = 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ = 360^\circ. \blacksquare$$

2. Многокутник, вписаний у коло

Многокутник називають **вписаним у коло**, якщо всі його вершини лежать на колі. **Коло** при цьому називають **описаним** навколо многокутника (мал. 21.6).

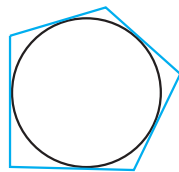


Мал. 21.6

Навколо многокутника не завжди можна описати коло. Якщо це можна зробити, то центром такого кола є точка перетину серединних перпендикулярів до сторін многокутника (як і у випадку трикутника).

3. Многокутник, описаний навколо кола

Многокутник називають **описаним навколо кола**, якщо всі його сторони дотикаються до кола. **Коло** при цьому називають **вписаним** у многокутник (мал. 21.7).



Мал. 21.7

Вписати коло можна не в кожний многокутник. Якщо це можна зробити, то центром такого кола є точка перетину бісектрис внутрішніх кутів многокутника (як і у випадку трикутника).



Яку фігуру називають многокутником? ○ Що називають вершинами, кутами, сторонами многокутника? ○ Що називають периметром многокутника? ○ Які сторони многокутника називають суміжними, які – несуміжними; які вершини – сусідніми,

які – несусідніми? ○ Що називають діагоналлю многокутника? ○ Який многокутник називають опуклим, а який – неопуклим? ○ Сформулюйте й доведіть теорему про суму кутів опуклого n -кутника. ○ Що називають зовнішнім кутом опуклого многокутника? ○ Який многокутник називають вписаним у коло, а який – описаним навколо кола?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

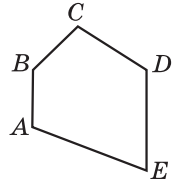
1

21.1. 1) Назвіть усі вершини, сторони, кути п'ятикутника $ABCDE$ (мал. 21.8).

2) Назвіть деяку пару сусідніх сторін, несусідніх сторін.

3) Назвіть деяку пару сусідніх вершин, несусідніх вершин.

4) Чи є п'ятикутник опуклим?



Мал. 21.8

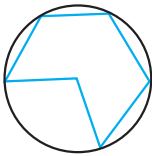
21.2. Накресліть опуклий шестикутник $ABCDEF$. Запишіть усі його вершини, сторони й кути.

21.3. Накресліть опуклий семикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ та проведіть у ньому всі діагоналі, що виходять з вершини A_5 .

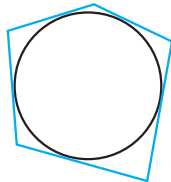
21.4. Накресліть будь-який неопуклий многокутник, у якого два кути більші за 180° .

21.5. Накресліть будь-який неопуклий п'ятикутник.

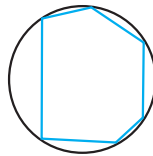
21.6. Знайдіть на малюнках 21.9–21.12 вписані та описані многокутники.



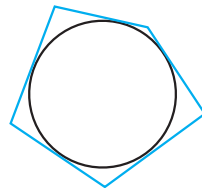
Мал. 21.9



Мал. 21.10



Мал. 21.11



Мал. 21.12

21.7. Накресліть коло та впишіть у нього п'ятикутник.

21.8. Накресліть коло та впишіть у нього будь-який многокутник.

21.9. Накресліть коло та опишіть навколо нього будь-який многокутник.

21.10. Накресліть коло та опишіть навколо нього шестикутник.

2

21.11. Обчисліть суму кутів опуклого n -кутника, якщо:

1) $n = 12$; 2) $n = 18$.

21.12. Обчисліть суму кутів опуклого n -кутника, якщо:

1) $n = 7$; 2) $n = 22$.

21.13. В опуклому дев'ятикутнику всі кути між собою рівні. Знайдіть ці кути.

21.14. В опуклому шестикутнику всі кути між собою рівні. Знайдіть їх.

21.15. (Усно.) Чи можна побудувати опуклий п'ятикутник, усі кути якого між собою рівні? Відповідь поясніть.

- 21.16.** (Усно.) Чотири кути одного опуклого п'ятикутника відповідно дорівнюють чотирьом кутам другого опуклого п'ятикутника. Чи рівні між собою їхні п'яті кути?
- 21.17.** Чи може найменший кут опуклого п'ятикутника дорівнювати 110° ?
- 21.18.** Чи може найбільший кут опуклого шестикутника дорівнювати 115° ?
- 3** **21.19.** Визначте кути опуклого шестикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як $3 : 4 : 5 : 5 : 6 : 7$.
- 21.20.** Знайдіть кути опуклого п'ятикутника, якщо кожен з них, починаючи з другого, більший за попередній на 10° .
- 21.21.** Чи існує опуклий многокутник, у якого сума кутів дорівнює:
1) 1080° ; 2) 2100° ? Якщо так, то знайдіть, скільки в нього сторін і скільки діагоналей.
- 21.22.** Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює:
1) 2500° ; 2) 1260° ? Якщо так, то знайдіть, скільки в нього вершин і скільки діагоналей.
- 21.23.** Кожен із зовнішніх кутів многокутника дорівнює 30° . Знайдіть кількість його сторін.
- 21.24.** Усі зовнішні кути многокутника – прямі. Визначте вид цього многокутника.
- 4** **21.25.** Чи існує многокутник, у якого кількість діагоналей дорівнює кількості сторін?
- 21.26.** Сума внутрішніх кутів многокутника в 5 разів більша за суму його зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині. Скільки вершин у многокутника?
- 21.27.** Знайдіть кількість сторін опуклого многокутника, якщо сума його зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині, на 1980° менша від суми внутрішніх кутів.
- 21.28.** В опуклому п'ятикутнику $ABCDE$ вершину B сполучено рівними між собою діагоналями з двома іншими вершинами. Відомо, що $\angle BEA = \angle BDC$, $\angle ABE = \angle CBD$. Порівняйте периметри чотирикутників $ABDE$ і $BEDC$.



Вправи для повторення

- 21.29.** AK і BM – висоти гострокутного трикутника ABC . Використовуючи подібність трикутників, доведіть, що $AK \cdot BC = AC \cdot BM$.
- 4** **21.30.** Навколо кола описано трапецію, периметр якої дорівнює P см. Знайдіть середню лінію цієї трапеції.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 21.31.** Знайдіть площу прямокутника зі сторонами:
1) 5 см і 9 см; 2) 2,1 дм і 0,8 дм;
3) 7 см і 1 дм; 4) 4,1 дм і 0,32 м.

21.32. Знайдіть площу квадрата, сторона якого дорівнює:

- 1) 7 см;
- 2) 29 мм;
- 3) 4,5 мм;
- 4) $\frac{5}{8}$ м.



Життєва математика

21.33. Тренажерний майданчик, що має форму прямокутника 8,5 м завдовжки і 3,5 м завширшки, потрібно покрити гумовою плиткою, що має форму квадрата, довжина сторони якого 50 см. Скільки грошей буде витрачено на це, якщо одна плитка коштує 50 грн, а вартість додаткових матеріалів та укладання становить 40 % від вартості плитки?



Цікаві задачі – поміркуй об'єднає

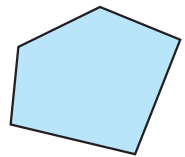
21.34. (Національна олімпіада Бразилії, 1983 р.) Доведіть, що всі точки кола можна розбити на дві множини так, що серед вершин будь-якого вписаного в коло прямокутного трикутника знайдуться точки з обох множин.

§ 22. Поняття площі многокутника. Площа прямокутника

1. Поняття площі многокутника. Основні властивості площ

Будь-який многокутник обмежує деяку частину площини. Цю частину площини називають *внутрішньою областю многокутника*. На малюнку 22.1 внутрішню область многокутника зафарбовано. Будемо розглядати многокутник разом з його внутрішньою областю.

Кожному многокутнику можна поставити у відповідність значення його *площі*, вважаючи, що площа многокутника – це та частина площини, яку займає многокутник. Поняття площі нам відомо з повсякденного життя (площа кімнати, площа городу, площа аркуша). Також з поняттям площі ви ознайомилися на уроках математики в 5–6-х класах.



Мал. 22.1

Сформулюємо *основні властивості площі*:

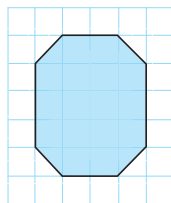
- 1) площа кожного многокутника є додатним числом;
- 2) рівні між собою многокутники мають рівні площі;
- 3) якщо многокутник розбито на кілька многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;
- 4) одиницею вимірювання площі є площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці вимірювання довжини (такий квадрат ще називають *одичним квадратом*).

Наприклад, якщо за одиницю вимірювання довжини взяти 1 см, то відповідною одиницею вимірювання площі буде площа квадрата зі стороною 1 см. Такий квадрат має площу 1 см^2 (читають: *один квадратний сантиметр*). Іншими одиницями вимірювання площі є 1 мм^2 , 1 дм^2 , 1 м^2 , 1 км^2 . Для площ ділянок землі використовують одиниці вимірювання *ар* і *гектар*: $1 \text{ а} = 100 \text{ м}^2$, $1 \text{ га} = 100 \text{ а} = 10\,000 \text{ м}^2$.

Площу фігури прийнято позначати літерою S .

Приклад 1. Знайти площу многокутника, зображеного на малюнку 22.2, якщо сторона клітинки дорівнює 1 см.

Розв'язання. Внутрішня область многокутника складається із шістнадцяти клітинок зі стороною 1 см завдовжки, площа кожної з яких – 1 см^2 , і чотирьох трикутників, площа кожного з яких дорівнює половині площі клітинки. Отже, площа фігури:



Мал. 22.2

$$S = 16 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 18 (\text{см}^2).$$

Відповідь: 18 см^2 .

2. Площа прямокутника. Площа квадрата

Площі деяких фігур можна знаходити за формулами. Наприклад, з попередніх класів нам відомо формули для обчислення площі прямокутника, квадрата, круга.

Т Теорема (про площу прямокутника). Площа S прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою $S = a \cdot b$.

Доведення цієї теореми є досить громіздким, ознайомитися з ним можна у Додатку 2 (с. 195).

Якщо сторони прямокутника $a = 1 \text{ дм}$ і $b = 6 \text{ см}$, то $S = 10 \times 6 = 60 (\text{см}^2)$, а якщо $a = \sqrt{8} \text{ м}$ і $b = \sqrt{2} \text{ м}$, то $S = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4 (\text{м}^2)$.

Н Наслідок. Площа S квадрата зі стороною a обчислюється за формулою $S = a^2$.

Приклад 2. Квадрат і прямокутник мають однакові площі. Сторона квадрата дорівнює 6 см, а одна зі сторін прямокутника в 4 рази більша за другу. Знайти периметр прямокутника.

Розв'язання. Нехай $S_{\text{к}}$ – площа квадрата, $S_{\text{п}}$ – площа прямокутника, P – периметр прямокутника.

1) $S_{\text{к}} = S_{\text{п}} = 6^2 = 36 (\text{см}^2)$.

2) Нехай одна зі сторін прямокутника дорівнює x см, тоді друга дорівнює $4x$ см. За формулою площі прямокутника маємо рівняння: $x \cdot 4x = 36$, тобто $4x^2 = 36$, звідки $x^2 = 9$.

- Враховуючи, що $x > 0$, маємо: $x = 3$. Отже, сторони прямокутника дорівнюють 3 см і $4 \cdot 3 = 12$ (см).
- 3) $P = 2(3 + 12) = 30$ (см).
- Відповідь: 30 см.

А ще раніше...

Дещо про вимірювання площ було відомо геометрам багато тисячоліть тому.

За 2–3 тисячі років до нашої ери вавилоняни вже вміли обчислювати площі прямокутника та трапеції у квадратних одиницях. Еталоном обчислення площ для них був квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці довжини.

Для обчислення площ прямокутника, трикутника й трапеції давні єгиптяни 4000 років тому використовували ті самі формули, що й ми зараз.

У «Началах» Евклід не вживав термін «площа», оскільки під терміном «фігура» мав на увазі частину площини, що обмежена замкненою лінією, тобто площу. Евклід не подавав результат вимірювання площі числом, а порівнював площі різних фігур між собою, використовуючи термін «рівновеликі». Так, наприклад, у першій книзі «Начал» можна зустріти задачу 16: «Паралелограми, що містяться на рівних основах і між тими самими паралельними, рівновеликі. Доведіть!».

Як й інші вчені, Евклід досліджував питання перетворення одних фігур в інші, їм рівновеликі. Так, наприклад, він розв'язав задачу про побудову квадрата, рівновеликого даному многокутнику.



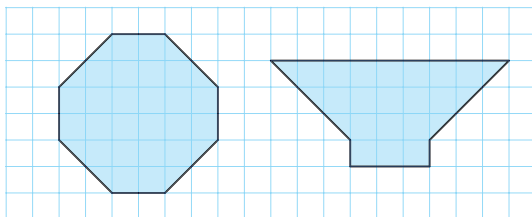
Поясніть, що таке площа многокутника. ○ Сформулюйте основні властивості площі. ○ Сформулюйте теорему про площу прямокутника та наслідок з неї.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 22.1. Знайдіть площу квадрата, сторона якого дорівнює:
 - 1) 3 см;
 - 2) 5 дм;
 - 3) 12 см;
 - 4) 8 м.
- 22.2. Знайдіть площу квадрата, сторона якого дорівнює:
 - 1) 2 см;
 - 2) 6 дм;
 - 3) 9 см;
 - 4) 7 м.
- 22.3. Знайдіть площу прямокутника, сторони якого дорівнюють:
 - 1) 7 см і 9 см;
 - 2) 11 дм і 4 дм.
- 22.4. Знайдіть площу прямокутника, сторони якого дорівнюють:
 - 1) 8 см і 6 см;
 - 2) 10 дм і 7 дм.
- 22.5. Площа прямокутника дорівнює 12 см^2 , а одна з його сторін – 4 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.
- 22.6. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 5 см, а його площа – 20 см^2 . Знайдіть другу сторону прямокутника.

- 2** 22.7. (Усно.) Знайдіть площі многокутників, зображених на малюнках 22.3 і 22.4, якщо сторона клітинки дорівнює 1 см.

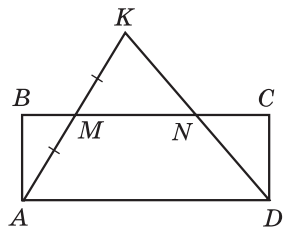


Мал. 22.3

Мал. 22.4

- 22.8. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:
 1) 4 см^2 ; 2) 25 дм^2 .
- 22.9. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:
 1) 9 дм^2 ; 2) 100 см^2 .
- 22.10. Розміри футбольного поля $110 \text{ м} \times 70 \text{ м}$. Більша чи менша за гектар його площа?
- 22.11. Квадрат і прямокутник мають однакові площі. Сторона квадрата дорівнює 4 см, а одна зі сторін прямокутника – 2 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.
- 22.12. Прямокутник і квадрат мають однакові площі. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 4 см, а сторона квадрата – 8 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.
- 22.13. Знайдіть площу прямокутника, одна зі сторін якого дорівнює 12 см, а діагональ – 13 см.
- 22.14. Діагональ прямокутника дорівнює 17 см, а одна з його сторін – 8 см. Знайдіть площу прямокутника.
- 3** 22.15. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює:
 1) 8 см; 2) d см.
- 22.16. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см.
- 22.17. Периметр прямокутника 26 см, а одна з його сторін на 5 см більша за другу. Знайдіть сторону квадрата, що має таку саму площу, як і прямокутник.
- 22.18. Прямокутник і квадрат мають однакові площі. Периметр прямокутника дорівнює 50 см, а одна з його сторін на 15 см більша за другу. Знайдіть сторону квадрата.
- 22.19. Як зміниться площа прямокутника, якщо:
 1) одну з його сторін збільшити вдвічі;
 2) одну з його сторін зменшити втричі;
 3) кожен зі сторін збільшити в 4 рази;
 4) одну сторону збільшити вдвічі, а другу – у 5 разів;
 5) одну зі сторін збільшити у 12 разів, а другу – зменшити вдвічі?
- 22.20. Як зміниться площа квадрата, якщо кожен зі його сторін:
 1) збільшити в 5 разів; 2) зменшити втричі?

- 22.21.** (Усно.) Чи можуть два не рівних між собою квадрати мати однакові площі?
- 22.22.** 1) Чи можуть два не рівних між собою прямокутники мати однакові площі?
 2) Два прямокутники мають однакові площі. Чи можна стверджувати, що вони рівні?
 3) Два прямокутники мають однакові площі. Чи можна стверджувати, що вони рівні, якщо одна зі сторін першого прямокутника дорівнює стороні другого?
- 22.23.** Сторони квадратів 15 см і 17 см. Визначте сторону квадрата, площа якого дорівнює різниці площ цих квадратів.
- 22.24.** Сторони квадратів 8 дм і 6 дм. Визначте сторону квадрата, площа якого дорівнює сумі площ цих квадратів.
- 22.25.** Прямокутник, сторони якого 8 м і 6,5 м, розрізали на квадрати зі стороною 0,5 м. Скільки утворилося квадратів?
- 22.26.** Знайдіть площу квадрата, описаного навколо кола, радіус якого r .
- 22.27.** Знайдіть сторони прямокутника, якщо вони відносяться як $3 : 4$, а площа дорівнює 108 см^2 .
- 22.28.** Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 24 см^2 , а одна зі сторін у 1,5 раза більша за другу.
- 22.29.** Бісектриса AM кута прямокутника $ABCD$ поділяє сторону BC на відрізки $BM = 3 \text{ см}$ і $MC = 5 \text{ см}$. Знайдіть площу прямокутника.
- 22.30.** Бісектриса BK кута прямокутника $ABCD$ поділяє сторону AD на відрізки $AK = 7 \text{ см}$ і $KD = 5 \text{ см}$. Знайдіть площу прямокутника.
- 22.31.** Одна зі сторін прямокутника на 3 см більша за іншу, а діагональ прямокутника дорівнює 15 см. Знайдіть площу прямокутника.
- 22.32.** Одна зі сторін прямокутника дорівнює 7 см, а його діагональ на 1 см більша за іншу сторону. Знайдіть площу прямокутника.
- 4** **22.33.** На малюнку 22.5 $ABCD$ – прямокутник, M – середина відрізка AK . Доведіть, що $S_{ABCD} = S_{AKD}$.
- 22.34.** Відношення площ двох квадратів дорівнює 5. Знайдіть відношення їхніх периметрів.
- 22.35.** Відношення периметрів двох квадратів дорівнює 3. Знайдіть відношення їхніх площ.



Мал. 22.5



Вправи для повторення

- 22.36.** Сума кутів одного опуклого многокутника дорівнює сумі кутів іншого опуклого многокутника. Чи можна стверджувати, що многокутники мають однакову кількість сторін?
- 22.37.** Доведіть, що навколо паралелограма, який не має прямих кутів, не можна описати коло.



Піготуйтеся до вивчення нового матеріалу

22.38. Накресліть будь-який паралелограм, у якого одна зі сторін дорівнює 5 см, а висота, що проведена до цієї сторони, – 3 см.



Життєва математика

22.39. Басейн має форму прямокутного паралелепіпеда, довжина якого дорівнює 50 м, ширина – 25 м і глибина – 4 м. Скільки плиток квадратної форми розміром 50 см $\times$ 50 см потрібно для облицювання дна та стін басейну?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

22.40. Центри трьох рівних між собою кіл є вершинами рівностороннього трикутника. Ці кола не мають спільних точок. Скільки існує кіл, які мають зовнішній або внутрішній дотик із трьома цими колами?

§ 23. Площа паралелограма



Теорема (про площу паралелограма). Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.

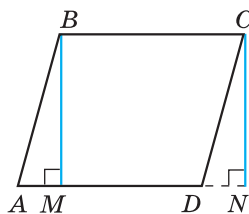
Доведення. Нехай $ABCD$ – довільний паралелограм, BM – його висота (мал. 23.1). Доведемо, що площу S паралелограма можна обчислити за формулою $S = AD \cdot BM$.

1) Проведемо висоту CN до прямої, що містить сторону AD паралелограма $ABCD$.

2) $\angle BAM = \angle CDN$ (як відповідні кути при паралельних прямих AB і CD та січній AN). Тому $\triangle BAM = \triangle CDN$ (за гіпотенузою і гострим кутом).

3) Паралелограм $ABCD$ складається з трапеції $MBCD$ і трикутника BAM , а прямокутник $MBCN$ – з трапеції $MBCD$ і трикутника CDN . Оскільки трикутники BAM і CDN між собою рівні, то рівні також їхні площі, а тому рівними є площі паралелограма $ABCD$ та прямокутника $MBCN$.

4) Площа прямокутника $MBCN$ дорівнює $MN \cdot BM$. Але $AM = DN$, а тому $MN = AD$. Отже, $S = AD \cdot BM$. ■



Мал. 23.1

Зауважимо, що коли основа висоти BM – точка M – збігається з точкою D або лежить на продовженні сторони AD , то доведення теореми є аналогічним.

У загальному вигляді формулу площі S паралелограма можна записати так:

$$S = ah_a,$$

де a – сторона паралелограма, h_a – висота, проведена до неї.

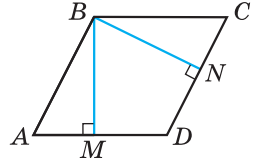


Приклад 1. Довести, що висоти ромба, проведені з однієї вершини, між собою рівні.

Доведення. Нехай $ABCD$ – даний ромб, BM і BN – його висоти (мал. 23.2). Оскільки ромб є паралелограмом, то

$$S_{ABCD} = AD \cdot BM = DC \cdot BN.$$

Але $AD = DC$, тому $BM = BN$. ■



Мал. 23.2



Приклад 2. Периметр паралелограма дорівнює 36 см, а його висоти – 4 см і 5 см. Знайти площу паралелограма.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCD$ – даний паралелограм, $BM = 4$ см і $BN = 5$ см – його висоти (мал. 23.2).

2) $P_{ABCD} = 2(AD + DC)$. За умовою $2(AD + DC) = 36$, тому $AD + DC = 18$ (см).

3) Нехай $AD = x$ см, тоді $DC = (18 - x)$ см.

4) За формулами площі паралелограма:

$$S_{ABCD} = AD \cdot BM \text{ або } S_{ABCD} = DC \cdot BN.$$

Тому маємо рівняння: $x \cdot 4 = (18 - x) \cdot 5$.

Тобто $4x = 90 - 5x$; звідки $x = 10$ (см).

5) Тоді $S = 10 \cdot 4 = 40$ (см²).

Відповідь: 40 см². ■



Сформулюйте й доведіть теорему про площу паралелограма.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

23.1. Сторона паралелограма дорівнює a , h – висота, проведена до цієї сторони. Знайдіть площу паралелограма, якщо:

1) $a = 6$ см, $h = 5$ см;

2) $a = 7$ дм, $h = 3$ дм.

23.2. Сторона паралелограма дорівнює a , h – висота, проведена до цієї сторони. Знайдіть площу паралелограма, якщо:

1) $a = 5$ см, $h = 4$ см;

2) $a = 6$ дм, $h = 8$ дм.

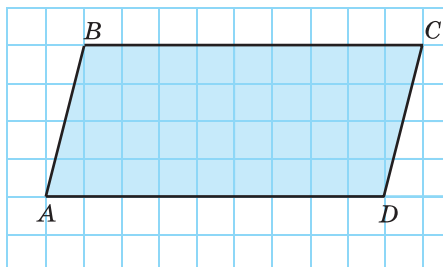
23.3. Площа паралелограма дорівнює 24 см², а одна з його сторін – 6 см. Знайдіть висоту паралелограма, проведену до цієї сторони.

23.4. Площа паралелограма – 18 дм², а одна з його висот дорівнює 3 дм. Знайдіть довжину сторони, до якої проведено цю висоту.

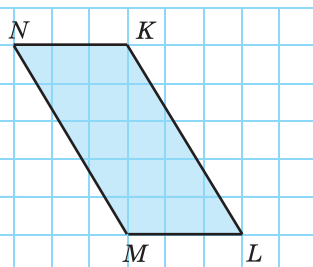
2

23.5. Діагональ паралелограма 5 см завдовжки перпендикулярна до сторони паралелограма, що дорівнює 6 см. Знайдіть площу паралелограма.

- 23.6.** Сторона паралелограма 8 см завдовжки перпендикулярна до діагоналі паралелограма, що дорівнює 5 см. Знайдіть площу паралелограма.
- 23.7.** Знайдіть площі фігур, зображених на малюнках 23.3 і 23.4, якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.

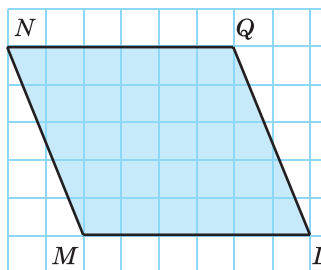


Мал. 23.3

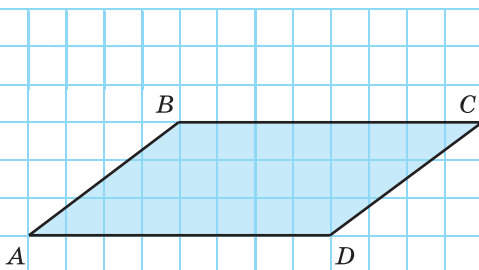


Мал. 23.4

- 23.8.** Знайдіть площі фігур, зображених на малюнках 23.5 і 23.6, якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.
- 23.9.** Одна зі сторін паралелограма дорівнює 6 см, а висота, проведена до другої сторони, – 4 см. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його площа дорівнює 36 см^2 .



Мал. 23.5



Мал. 23.6

- 23.10.** Площа паралелограма дорівнює 48 см^2 . Одна з його сторін – 8 см, а одна з висот – 4 см. Знайдіть периметр паралелограма.
- 3** **23.11.** Сторони паралелограма дорівнюють 4 см і 5 см. Висота, проведена до меншої сторони, дорівнює 3 см. Знайдіть висоту, проведenu до більшої сторони.
- 23.12.** Одна зі сторін паралелограма дорівнює 8 см, а висота, проведена до неї, – 6 см. Знайдіть другу сторону паралелограма, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 4,8 см.
- 23.13.** Сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 12 см, а його гострий кут – 30° . Знайдіть площу паралелограма.
- 23.14.** Сторона ромба дорівнює 4 см, а один з його кутів – 150° . Знайдіть площу ромба.
- 23.15.** Висота паралелограма втричі більша за сторону, до якої вона проведена. Знайдіть цю висоту, якщо площа паралелограма дорівнює 12 см^2 .

- 23.16.** Сторона паралелограма в 5 разів більша за висоту, проведену до неї. Знайдіть цю сторону, якщо площа паралелограма дорівнює 45 см^2 .
- 23.17.** Периметр ромба дорівнює P см. Знайдіть його площу, якщо одна з діагоналей ромба утворює зі стороною кут 75° .
- 4** **23.18.** Дві сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 12 см, а сума двох його висот, проведених з однієї вершини, дорівнює 15 см. Знайдіть площу паралелограма.
- 23.19.** Дві висоти паралелограма дорівнюють 2 см і 3 см, а сума двох його суміжних сторін – 10 см. Знайдіть площу паралелограма.
- 23.20.** Висоти паралелограма дорівнюють 8 см і 6 см, а кут між ними – 30° . Знайдіть площу паралелограма.
- 23.21.** Дві сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 5 см. Чи може його площа дорівнювати:
 1) 41 см^2 ;
 2) 40 см^2 ;
 3) 39 см^2 ?
- 23.22.** Сторони паралелограма дорівнюють 9 см і 12 см, а одна з його висот – 6 см. Знайдіть другу висоту паралелограма. Скільки розв'язків має задача?



Вправи для повторення

- 23.23.** Сума кутів одного з многокутників на 540° більша за суму кутів другого многокутника. На скільки більше вершин у першого многокутника, ніж у другого?
- 23.24.** Середини сторін ромба послідовно сполучено відрізками. Обчисліть площу чотирикутника, що утворився, якщо діагоналі ромба дорівнюють 6 см і 10 см.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 23.25.** Накресліть два нерівних між собою трикутники, у кожного з яких одна зі сторін дорівнює 4 см, а висоти, проведені до цих сторін, – 2,5 см.



Життєва математика

- 23.26.** Відношення висоти до ширини екрана телевізора дорівнює $9 : 16$. Діагональ екрана телевізора – 32 дюйми. Знайдіть ширину екрана в сантиметрах, якщо 1 дюйм = 2,54 см.





Цікаві задачі – поміркуй одначе

23.27. (Задача аль-Кораджи.) Знайдіть площу прямокутника, основа якого вдвічі більша за висоту, а площа чисельно дорівнює периметру¹.

§ 24. Площа трикутника



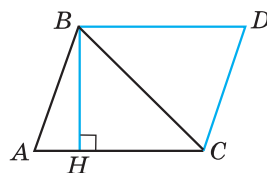
Теорема (про площу трикутника). Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.

Доведення. Нехай ABC – довільний трикутник, BH – його висота (мал. 24.1). Доведемо, що

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH.$$

1) Проведемо через вершину B пряму, паралельну AC , а через вершину C – пряму, паралельну AB . Одержимо паралелограм $ABDC$.

2) $\triangle ABC = \triangle DCB$ (за трьома сторонами). Тому $S_{ABDC} = 2S_{ABC}$, звідки



Мал. 24.1

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC}.$$

3) Оскільки $S_{ABDC} = AC \cdot BH$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$. ■

У загальному вигляді формулу площі трикутника S можна записати так:

$$S = \frac{1}{2} ah_a,$$

де a – сторона трикутника, h_a – висота, проведена до неї.



Наслідок 1. Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку катетів.



Наслідок 2. Якщо сторона одного трикутника дорівнює стороні другого, то площі таких трикутників відносяться як їхні висоти, проведені до цих сторін.

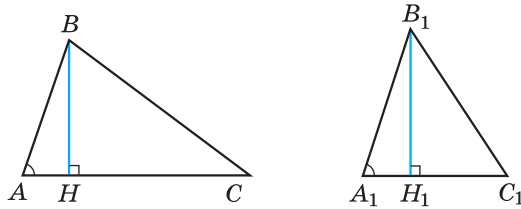
¹ Основою і висотою аль-Кораджи називав дві сторони прямокутника.



Наслідок 3. Якщо висота одного трикутника дорівнює одній з висот другого трикутника, то площі цих трикутників відносяться як сторони, до яких проведено ці висоти.



Приклад 1. Довести, що коли кут одного трикутника дорівнює куту другого трикутника, то площі цих трикутників відносяться як добутки сторін, що утворюють цей кут.



Мал. 24.2

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$. Проведемо висоти BH і B_1H_1 (мал. 24.2).

$$1) \text{ Маємо: } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BH}{\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1H_1} = \frac{AC \cdot BH}{A_1C_1 \cdot B_1H_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BH}{B_1H_1}.$$

$$2) \triangle ABH \sim \triangle A_1B_1H_1 \text{ (як прямокутні, за гострим кутом). Тому } \frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

$$3) \text{ Маємо: } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}. \quad \blacksquare$$



Приклад 2. Знайти площу рівностороннього трикутника зі стороною a .

Розв'язання. Нехай $\triangle ABC$ – рівносторонній зі стороною a завдовжки.

Тоді $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$. У рівносторонньому трикутнику $h_a = m_a$, де m_a – медіана. Але $m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (§ 17, приклад 4), тому й $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Отже,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \quad \blacksquare$$

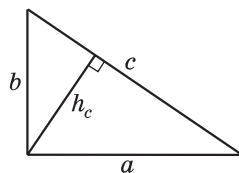
Приклад 3. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 15 см і 17 см.

Знайти висоту трикутника, проведену до найбільшої його сторони.

Розв'язання. Оскільки $17^2 = 8^2 + 15^2$ ($289 = 289$), то за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник є прямокутним. Прямий кут лежить проти сторони, що дорівнює 17 см.

Скористаємося малюнком 24.3. Нехай $c = 17$ см – гіпотенуза, $b = 8$ см і $a = 15$ см – катети трикутника, h_c – його висота. Знайдемо h_c .

Площу цього трикутника можна знайти за формулами: $S = \frac{1}{2} a \cdot b$ або $S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$.



Мал. 24.3

Тоді $\frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$, тобто $ab = ch_c$, звідки $h_c = \frac{ab}{c}$.

Отже, маємо: $h_c = \frac{8 \cdot 15}{17} = 7 \frac{1}{17}$ (см).

Відповідь: $7 \frac{1}{17}$ см. ■



Сформулюйте й доведіть теорему про площу трикутника. ○ Сформулюйте наслідки з теореми про площу трикутника.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

24.1. Сторона трикутника дорівнює a , h – висота, проведена до цієї сторони. Знайдіть площу трикутника, якщо:

- 1) $a = 9$ см, $h = 6$ см;
- 2) $a = 4$ дм, $h = 7$ дм.

24.2. Нехай a – сторона трикутника, h – висота, проведена до цієї сторони. Знайдіть площу трикутника, якщо:

- 1) $a = 7$ дм, $h = 3$ дм;
- 2) $a = 5$ см, $h = 2$ см.

24.3. Знайдіть площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють:

- 1) 5 см і 4 см;
- 2) 8 дм і 7 дм.

24.4. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:

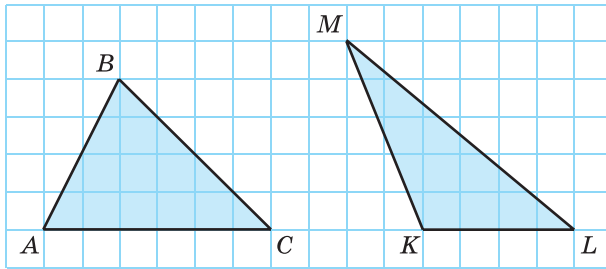
- 1) 6 см і 2 см;
- 2) 9 дм і 4 дм.

2

24.5. Площа трикутника дорівнює 36 дм², а одна з його висот – 8 дм. Знайдіть довжину сторони, до якої проведено цю висоту.

24.6. Площа трикутника дорівнює 20 см², а одна з його сторін – 8 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до цієї сторони.

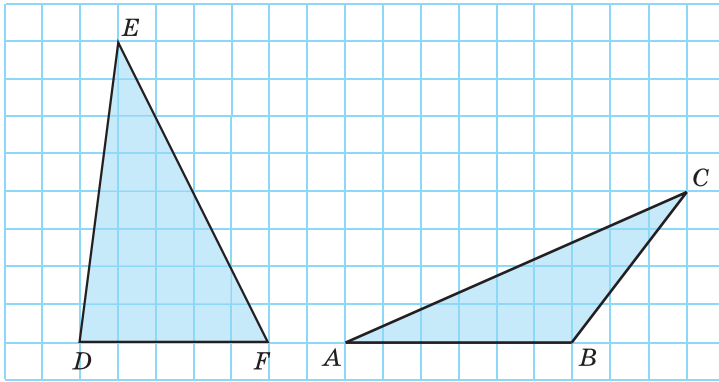
24.7. Знайдіть площі фігур, зображених на малюнках 24.4 і 24.5, якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.



Мал. 24.4

Мал. 24.5

24.8. Знайдіть площі фігур, зображених на малюнках 24.6 і 24.7, якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.



Мал. 24.6

Мал. 24.7

24.9. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а висота, проведена до основи, – 3 см. Знайдіть площу трикутника.

24.10. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 7 см, а гіпотенуза – 25 см. Знайдіть площу трикутника.

3 24.11. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 8 см. Знайдіть площу трикутника.

24.12. Висота рівнобедреного прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 6 см. Знайдіть площу трикутника.

24.13. 1) Діагоналі ромба дорівнюють 8 см і 10 см. Знайдіть площу ромба.
2) Використовуючи формулу площі прямокутного трикутника, виведіть формулу площі ромба через його діагоналі d_1 і d_2 .

24.14. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 12 см і 6 см.

24.15. У прямокутнику $ABCD$ $BD = 10$ см. Вершина B віддалена від прямої AC на 3 см. Знайдіть площі трикутника ABC і прямокутника $ABCD$.

24.16. Сторона трикутника вдвічі більша за висоту, проведену до неї. Знайдіть цю сторону, якщо площа трикутника – 16 см^2 .



- 24.17.** Висота трикутника в 4 рази більша за сторону, до якої вона проведена. Знайдіть цю висоту, якщо площа трикутника дорівнює 18 см^2 .
- 24.18.** На стороні AC трикутника ABC , площа якого дорівнює 12 см^2 , узятю точку D так, що $AD : DC = 1 : 2$. Знайдіть площі трикутників ABD і DBC .
- 24.19.** На стороні AB трикутника ABC , площа якого дорівнює 20 см^2 , узятю точку K так, що $AK : KB = 1 : 3$. Знайдіть площі трикутників ACK і CKB .
- 24.20.** $ABCD$ – трапеція, $AD \parallel BC$. Доведіть, що $S_{ACD} = S_{ABD}$.
- 24.21.** У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки 4 см і 1 см , починаючи від вершини кута між бічними сторонами. Знайдіть площу трикутника.
- 24.22.** У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки 4 см і 6 см , починаючи від вершини при основі. Знайдіть площу трикутника.
- 24.23.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см . Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.
- 24.24.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см . Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.
- 4** **24.25.** У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки 9 см і 6 см . Знайдіть площу трикутника.
- 24.26.** У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить катет на відрізки 3 см і 5 см . Знайдіть площу трикутника.
- 24.27.** Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 6 см . Чи може площа трикутника дорівнювати:
1) 11 см^2 ; 2) 12 см^2 ; 3) 13 см^2 ?
- 24.28.** Відрізки AB і CD перетинаються в точці O , яка є серединою відрізка AB . Знайдіть відношення площ трикутників AOC і BOD , якщо $CO = 3 \text{ см}$, $DO = 6 \text{ см}$.
- 24.29.** MN – середня лінія трикутника ABC , $M \in AB$, $N \in AC$. Знайдіть відношення площ трикутників AMN і ABC .



Вправи для повторення

- 24.30.** Навколо кола, радіус якого дорівнює 3 см , описано квадрат. Знайдіть периметр і площу квадрата.
- 24.31.** Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні $1 : 2$. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 48 см .



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 24.32.** Накресліть трапецію, основи якої дорівнюють 5 см і 3 см , а висота – 4 см .



Життєва математика

24.33. Чавунна труба має квадратний перетин, її зовнішня ширина дорівнює 25 см, товщина стінок – 3 см. Яка маса одного погонного метра труби? Густина чавуну становить 7,3 г/см³.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

24.34. Стіна 3,5 м заввишки відкидає тінь від сонця 5 м завдовжки. Олександр Семенович, зріст якого 1 м 75 см, стоїть на відстані 10 м від краю тіні. Яку найменшу кількість кроків він має зробити, щоб повністю потрапити в тінь, якщо довжина його кроку 0,5 м?

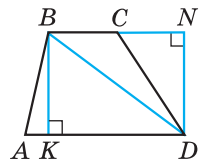
§ 25. Площа трапеції



Теорема (про площу трапеції). Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.

Доведення. Нехай $ABCD$ – довільна трапеція з основами AD і BC , BK – її висота (мал. 25.1). Доведемо, що площу трапеції S можна знайти за формулою:

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK.$$



Мал. 25.1

1) Діагональ BD розбиває трапецію на два трикутники ABD і BDC . Тому $S = S_{ABD} + S_{BDC}$.

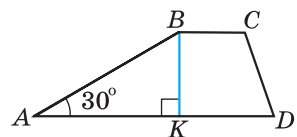
2) BK – висота трикутника ABD , тому $S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BK$.

3) Проведемо в трапеції висоту DN , вона є і висотою трикутника BDC , тому $S_{BDC} = \frac{1}{2} BC \cdot DN$.

4) $DN = BK$ (як висоти трапеції). Отже,

$$\begin{aligned} S &= S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{1}{2} AD \cdot BK + \frac{1}{2} BC \cdot DN = \frac{AD \cdot BK}{2} + \frac{BC \cdot BK}{2} = \\ &= \frac{(AD + BC)BK}{2} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

У загальному вигляді формулу площі трапеції S можна записати так: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, де a і b – основи трапеції, h – її висота.



Мал. 25.2



Наслідок. Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії на висоту.

Приклад 1. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $AD = 8$ см, $BC = 5$ см, $AB = 12$ см, $\angle A = 30^\circ$. Знайти площу трапеції.

Розв'язання. 1) Проведемо в трапеції $ABCD$ висоту BK (мал. 25.2).

У $\triangle ABK$ ($\angle K = 90^\circ$) $BK = \frac{AB}{2}$ (за властивістю катета, що лежить проти кута 30°). Отже, $BK = \frac{12}{2} = 6$ (см).

2) $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK = \frac{8 + 5}{2} \cdot 6 = 39$ (см²).

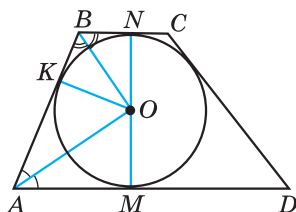
Відповідь: 39 см².

Приклад 2. Периметр трапеції 60 см, а точка дотику вписаного кола ділить одну з бічних сторін на відрізки 9 см і 4 см. Знайти площу трапеції.

Розв'язання. 1) Оскільки трапецію описано навколо кола (мал. 25.3), то

$$AD + BC = AB + CD = \frac{P}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ (см)}.$$

2) Центр вписаного кола – точка O – є точкою перетину бісектрис кутів трапеції, отже, і кутів BAD і ABC . Тому $\angle AOB = 90^\circ$ (див. задачу 6.30, с. 46).



Мал. 25.3

3) Точка K – точка дотику кола до сторони AB , тому $OK \perp AB$. Отже, OK – радіус кола й висота прямокутного трикутника BOA , проведена на до гіпотенузи. За теоремою про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику маємо:

$OK^2 = AK \cdot KB = 9 \cdot 4 = 36$, звідки $OK = 6$ (см).

4) MN – діаметр кола, а також висота трапеції, $MN = 2 \cdot OK = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

5) Отже, $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot MN = \frac{30}{2} \cdot 12 = 180$ (см²).

Відповідь: 180 см².



Сформулюйте й доведіть теорему про площу трапеції. ○ Сформулюйте наслідок із цієї теореми.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 25.1. Нехай a і b – основи трапеції, h – її висота. Знайдіть площу трапеції, якщо:
 1) $a = 4$ см, $b = 8$ см, $h = 5$ см;
 2) $a = 7$ дм, $b = 3$ дм, $h = 6$ дм.
- 25.2. Нехай a і b – основи трапеції, h – її висота. Знайдіть площу трапеції, якщо:
 1) $a = 5$ см, $b = 3$ см, $h = 4$ см;
 2) $a = 1$ дм, $b = 9$ дм, $h = 8$ дм.
- 25.3. Знайдіть площу трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 7 см, а висота – 6 см.
- 25.4. Висота трапеції дорівнює 4 см, а середня лінія – 10 см. Знайдіть площу трапеції.
- 2** 25.5. Основи трапеції дорівнюють 7 см і 13 см, а її площа – 40 см². Знайдіть висоту трапеції.
- 25.6. Площа трапеції дорівнює 36 см², а її основи – 8 см і 10 см. Знайдіть висоту трапеції.
- 25.7. Висота трапеції дорівнює 6 см, а її площа – 24 см². Знайдіть суму основ трапеції.
- 25.8. Висота трапеції дорівнює 8 см, а площа – 40 см². Знайдіть середню лінію трапеції.
- 25.9. Площа трапеції дорівнює 63 см², одна з її основ – 5 см, а висота – 7 см. Знайдіть другу основу трапеції.
- 25.10. Одна з основ трапеції дорівнює 17 см, а її висота – 3 см. Знайдіть другу основу трапеції, якщо її площа дорівнює 33 см².
- 25.11. $ABCD$ ($AD \parallel BC$) – рівнобічна трапеція з тупим кутом B , BK – її висота, $AK = 3$ см, $BC = 5$ см, $BK = 4$ см. Знайдіть площу трапеції.
- 25.12. $ABCD$ ($AB \parallel CD$) – прямокутна трапеція з тупим кутом D , DK – висота трапеції, $AK = 4$ см, $CD = 7$ см, $DK = 5$ см. Знайдіть площу трапеції.
- 3** 25.13. Площа прямокутної трапеції дорівнює 30 см², її периметр – 28 см, а менша бічна сторона – 3 см. Знайдіть більшу бічну сторону.
- 25.14. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 32 см, її бічна сторона – 5 см, а площа – 44 см². Знайдіть висоту трапеції.
- 25.15. У трапеції $ABCD$ менша основа AB дорівнює 6 см, а висота трапеції – 8 см. Знайдіть площу трапеції, якщо площа трикутника ADC дорівнює 40 см².
- 25.16. У трапеції $ABCD$ основи AD і BC дорівнюють відповідно 10 см і 8 см. Площа трикутника ABD дорівнює 25 см². Знайдіть площу трапеції.
- 25.17. Площа трапеції дорівнює 36 см², а її висота – 6 см. Знайдіть основи трапеції, якщо вони відносяться як 1 : 3.

- 25.18.** Основи трапеції відносяться як 1 : 4. Знайдіть ці основи, якщо висота трапеції дорівнює 4 см, а площа трапеції – 50 см².
- 25.19.** Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють a см і b см, а бічна сторона c см завдовжки утворює з меншою основою кут 150° .
- 25.20.** У прямокутній трапеції менша основа дорівнює 6 см і утворює з меншою діагоналлю кут 45° . Знайдіть площу трапеції, якщо її тупий кут дорівнює 135° .
- 25.21.** У прямокутній трапеції менша бічна сторона дорівнює 4 см і утворює з меншою діагоналлю кут 45° . Гострий кут трапеції також дорівнює 45° . Знайдіть площу трапеції.
- 25.22.** Більша діагональ прямокутної трапеції дорівнює 13 см, а більша основа – 12 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 4 см.
- 25.23.** Більша діагональ прямокутної трапеції дорівнює 17 см, а висота – 8 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 5 см.
- 25.24.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 38 см і 52 см, а бічна сторона – 25 см. Знайдіть площу трапеції.
- 25.25.** Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 18 см, бічна сторона – 13 см, а висота – 12 см. Знайдіть площу трапеції.
- 25.26.** Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 6 см, бічна сторона – 5 см, а висота – 3 см. Знайдіть площу трапеції.
- 4** **25.27.** Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 10 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 2 см і 3 см. Знайдіть площу трапеції.
- 25.28.** Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 18 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 5 см і 6 см. Знайдіть площу трапеції.
- 25.29.** Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, а висота дорівнює h см. Знайдіть площу трапеції.
- 25.30.** Знайдіть площу рівнобічної трапеції, діагоналі якої взаємно перпендикулярні, а основи дорівнюють 10 см і 4 см.
- 25.31.** Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить більшу бічну сторону на відрізки 1 см і 4 см. Знайдіть площу трапеції.



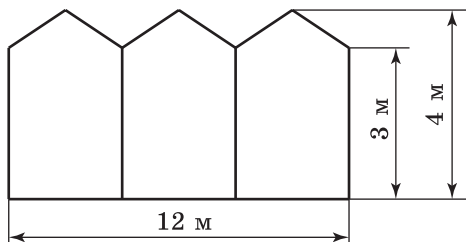
Вправи для повторення

- 25.32.** Обчисліть суму кутів опуклого 17-кутника.
- 25.33.** Скільки плиток квадратної форми зі стороною 20 см знадобиться, щоб викласти ними підлогу в кімнаті прямокутної форми, довжина якої дорівнює 4,6 м, а ширина – 3,4 м?
- 25.34.** Один з кутів ромба на 120° більший за другий, а сторона ромба дорівнює 6 см. Знайдіть площу ромба.



Життєва математика

- 25.35. Скільки кілограмів фарби потрібно, щоб пофарбувати паркан (мал. 25.4) з одного боку, якщо для фарбування 1 м^2 паркана витрачається 250 г фарби?



Мал. 25.4



Цікаві задачі – поміркуй одначе

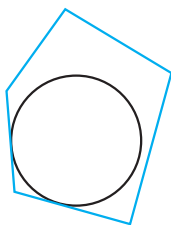
- 25.36. З трьох квадратів, довжина сторони кожного з яких є цілим числом сантиметрів, складено прямокутник, площа якого 150 см^2 . Знайдіть периметр прямокутника.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5 (§§ 21–25)

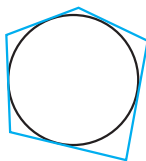
Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.



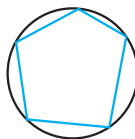
1. На якому з малюнків (А–Г) зображено п'ятикутник, описаний навколо кола?



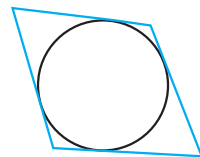
А.



Б.



В.



Г.

2. Знайдіть площу прямокутника, сторони якого дорівнюють 7 см і 4 см.

А. 28 см Б. 22 см В. 28 см^2 Г. 11 см^2

3. Знайдіть площу паралелограма, одна зі сторін якого дорівнює 8 см, а висота, проведена до цієї сторони, – 5 см.

А. 40 см^2 Б. 26 см^2 В. 20 см^2 Г. 13 см^2



4. Обчисліть суму внутрішніх кутів опуклого 10-кутника.

А. 360° Б. 1800° В. 1620° Г. 1440°

5. Знайдіть сторону трикутника, якщо його площа дорівнює 24 см^2 , а висота, проведена до цієї сторони, – 6 см.

А. 4 см Б. 18 см В. 8 см Г. 12 см

6. Одна з основ трапеції дорівнює 5 см, а її висота – 4 см. Знайдіть другу основу трапеції, якщо її площа дорівнює 28 см^2 .

А. 11 см Б. 2 см В. 7 см Г. 9 см

3 7. Прямокутник, сторони якого дорівнюють 16 дм і 9,5 дм, розрізали на квадрати зі стороною 0,5 дм. Скільки отримали квадратів?

А. 612 Б. 608 В. 51 Г. 618

8. Більша діагональ прямокутної трапеції дорівнює 13 см, а висота – 5 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 8 см.

А. 50 см^2 Б. $52,5 \text{ см}^2$ В. 100 см^2 Г. $62,5 \text{ см}^2$

9. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 8 см і 10 см.

А. 80 см^2 Б. 20 см^2 В. 40 см^2 Г. 36 см^2

4 10. У прямокутному трикутнику гіпотенуза точкою дотику вписаного кола ділиться на відрізки 3 см і 10 см. Знайдіть площу трикутника.

А. 60 см^2 Б. 50 см^2 В. 40 см^2 Г. 30 см^2

11. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 12 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 2 см і 3 см. Знайдіть площу трапеції.

А. 75 см^2 Б. 50 см^2 В. 100 см^2 Г. 150 см^2

12. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 9 см, а сума двох його висот, проведених з однієї вершини, – 7 см. Знайдіть площу паралелограма.

А. 108 см^2 Б. 48 см^2 В. 36 см^2 Г. 27 см^2

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 13. Установіть відповідність між інформацією про многокутник (1–3) та кількістю його сторін (А–Г).

Інформація про многокутник

Кількість сторін
многокутника

1. Сума внутрішніх кутів дорівнює 900°
2. Усі зовнішні кути рівні між собою і становлять по 45°
3. Многокутник має 9 діагоналей

- А. 5
- Б. 6
- В. 7
- Г. 8

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 21–25

1. Накресліть коло, впишіть у нього п'ятикутник та опишіть навколо нього семикутник.
2. Знайдіть площу прямокутника, сторони якого дорівнюють 6 см і 9 см.
3. Знайдіть площу паралелограма, одна зі сторін якого дорівнює 7 см, а висота, проведена до цієї сторони, – 4 см.
4. Обчисліть суму кутів опуклого 15-кутника.
5. Площа трикутника дорівнює 30 см^2 , а одна з його сторін – 12 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до цієї сторони.
6. Площа трапеції дорівнює 35 см^2 , одна з її основ – 8 см, а висота – 7 см. Знайдіть другу основу трапеції.
7. Прямокутник, сторони якого 12 дм і 7,5 дм, розрізали на квадрати зі стороною 0,5 дм. Скільки утворилося квадратів?
8. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 12 см.
9. Менша основа трапеції дорівнює 12 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 3 см і 5 см. Знайдіть площу трапеції.

Додаткові завдання

10. Відношення площ двох квадратів дорівнює 7. Знайдіть відношення їхніх периметрів.
11. Висоти паралелограма дорівнюють 5 см і 6 см, а сума двох його суміжних сторін – 22 см. Знайдіть площу паралелограма.

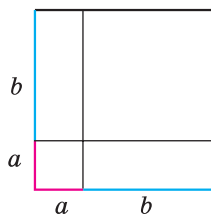
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 4

До § 21

1. Накресліть опуклий п'ятикутник $A_1A_2A_3A_4A_5$ та неопуклий шестикутник $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$. Проведіть усі діагоналі в п'ятикутнику, обчисліть їхню кількість.
2. Накресліть коло. Впишіть у нього та опишіть навколо нього будь-які многокутники з однаковою кількістю сторін.
3. Усі зовнішні кути п'ятикутника між собою рівні. Скільки градусів мають внутрішні кути цього п'ятикутника?
4. Знайдіть, скільки діагоналей у восьмикутника.
5. Усі внутрішні кути n -кутника дорівнюють по 135° . Знайдіть n .
6. Як зміниться сума внутрішніх кутів опуклого многокутника, якщо кількість його сторін збільшиться на дві?
7. Сума кутів опуклого n -кутника у k разів більша за суму кутів опуклого $(n - 1)$ -кутника (k – натуральне число). Знайдіть k .

До § 22

- 1 8. Порівняйте площу квадрата зі стороною 6 см із площею прямокутника зі сторонами 4 см і 9 см.
- 2 9. 1) Накресліть довільний прямокутник, площа якого 12 см^2 .
2) Накресліть квадрат, площа якого 9 см^2 .
10. На продовженні сторони AD квадрата $ABCD$ за вершину A взято точку P , $CP = 10 \text{ см}$, $\angle CPD = 30^\circ$. Знайдіть площу квадрата.
- 3 11. 1) Периметр квадрата дорівнює P см. Знайдіть його площу.
2) Площа квадрата дорівнює $S \text{ см}^2$. Знайдіть його периметр.
3) Площа квадрата чисельно дорівнює його периметру. Знайдіть сторону квадрата.
12. На малюнку 1 зображено геометричне доведення формули $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Поясніть його.
13. Скільки треба плиток прямокутної форми зі сторонами 30 см і 20 см, щоб викласти ними частину стіни, що має форму прямокутника зі сторонами 2,4 м і 3,6 м?
- 4 14. Бісектриса кута прямокутника ділить його сторону на відрізки 4 см і 5 см. Знайдіть площу цього прямокутника. Скільки розв'язків має задача?
15. У прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано квадрат $MNKL$ так, що точки N і K належать гіпотенузі (причому N лежить між A і K), M належить AC , L належить BC , $AN = m$, $KB = n$. Знайдіть площу квадрата.



Мал. 1

До § 23

- 1 16. Накресліть паралелограм, одна зі сторін якого дорівнює 4 см, а висота, проведена до неї, – 2 см. Знайдіть площу паралелограма.
- 2 17. Знайдіть площу ромба $ABCD$, у якого $AB = 4 \text{ см}$, а висота, проведена до сторони BC , дорівнює 3 см.
- 3 18. У паралелограмі $ABCD$ $\angle B$ – тупий, CE – висота паралелограма, $\angle DCE = 60^\circ$, $AD = 5 \text{ см}$, $AB = 4 \text{ см}$. Знайдіть площу паралелограма.
19. Чи існує паралелограм, у якого:
1) сторони дорівнюють 6 см і 8 см, а висоти – 3 см і 4 см;
2) сторони дорівнюють 9 см і 6 см, а висоти – 4 см і 2 см?
- 4 20. Квадрат і ромб мають рівні між собою сторони, а тупий кут ромба дорівнює 150° . Яка з фігур має більшу площу? У скільки разів?
21. У паралелограмі $ABCD$ гострий кут дорівнює 30° , а бісектриса цього кута, перетинаючи сторону, ділить її навпіл. Знайдіть площу паралелограма, якщо його периметр дорівнює 24 см.

22. У ромб $ABCD$ вписано коло, радіус якого 8 см. K – точка дотику кола до сторони AB . Знайдіть площу ромба, якщо $AK : KB = 1 : 4$.

До § 24

23. Накресліть три різних трикутники (гострокутний, прямокутний і тупокутний), у кожного з яких одна зі сторін дорівнює 3 см, а висота, проведена до неї, – 4 см. Знайдіть площу кожного з трикутників.

24. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 9 см, а висота, проведена до більшої з них, – 4 см. Знайдіть висоту, проведену до меншої з них.

25. У трикутнику ABC : $\angle C = 135^\circ$, $AC = 4$ см, BD – висота трикутника, $CD = 3$ см. Знайдіть площу трикутника.

26. У трикутнику проведено всі середні лінії. Доведіть, що площа кожного із чотирьох трикутників, які утворилися, дорівнює $\frac{1}{4}$ площі початкового трикутника.

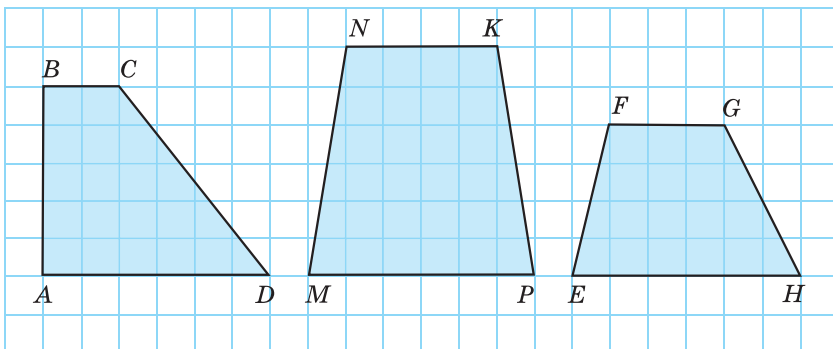
27. CK – медіана рівнобедреного трикутника ABC з основою AB . На цій медіані вибрано деяку точку M . Доведіть, що $S_{AMC} = S_{BMC}$.

До § 25

28. Накресліть трапецію, основи якої 4 см і 2 см, а висота – 3 см. Знайдіть площу цієї трапеції.

29. Площа трапеції дорівнює 32 см^2 , а її середня лінія – 8 см. Знайдіть висоту трапеції.

30. Знайдіть площі трапецій, зображених на малюнках 2–4. Довжина однієї клітинки дорівнює 0,5 см.



Мал. 2

Мал. 3

Мал. 4

31. Висоти, проведені з вершин меншої основи рівнобічної трапеції, ділять більшу основу на три відрізки, сума двох з яких дорівнює третьому. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа й висота дорівнюють по a см.

32. Обчисліть площу прямокутної трапеції, у якої дві менші сторони дорівнюють по b см, а гострий кут $- 45^\circ$.

4

33. EF – середня лінія трикутника ABC , $EF \parallel AB$. У скільки разів площа трикутника CEF менша від площі трапеції $AEFB$?

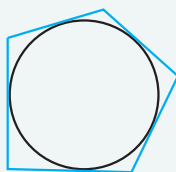
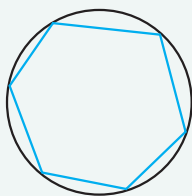
34. У рівнобічну трапецію вписано коло, яке ділить бічну сторону на відрізки 2 см і 8 см завдовжки. Знайдіть площу трапеції.



Толовне в розділі 4

**МНОГОКУТНИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ.
СУМА КУТІВ ОПУКЛОГО МНОГОКУТНИКА.
МНОГОКУТНИК, ВПИСАНИЙ У КОЛО,
І МНОГОКУТНИК, ОПИСАНИЙ НАВКОЛО КОЛА**

Теорема (про суму кутів опуклого n -кутника). Сума кутів опуклого n -кутника дорівнює $180^\circ(n - 2)$.



Многокутник вписаний у коло – якщо всі його вершини лежать на колі. **Коло** у такому разі – **описане** навколо многокутника.

Многокутник описаний навколо кола – якщо всі його сторони дотикаються до кола. **Коло** у такому разі – **вписане** в многокутник.

**ПОНЯТТЯ ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКА.
ПЛОЩА ПРЯМОКУТНИКА**

Сформулюємо *основні властивості площі*:

- 1) площа кожного многокутника є додатним числом;
- 2) рівні між собою многокутники мають рівні площі;
- 3) якщо многокутник розбито на кілька многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;
- 4) одиницею вимірювання площі є площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці вимірювання довжини (такий квадрат – одиничний квадрат).

Теорема (про площу прямокутника). Площа S прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою

$$S = a \cdot b.$$

Наслідок. Площа S квадрата зі стороною a обчислюється за формулою $S = a^2$.

ПЛОЩА ПАРАЛЕЛОГРАМА

Теорема (про площу паралелограма). Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.

У загальному вигляді формулу площі S паралелограма записують так:

$$S = ah_a,$$

де a – сторона паралелограма, h_a – висота, проведена до неї.

ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

Теорема (про площу трикутника). Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.

У загальному вигляді формулу площі трикутника S записують так:

$$S = \frac{1}{2}ah_a,$$

де a – сторона трикутника, h_a – висота, проведена до неї.

ПЛОЩА ТРАПЕЦІЇ

Теорема (про площу трапеції). Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.

У загальному вигляді формулу площі трапеції S записують так:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

де a і b – основи трапеції, h – її висота.

Наслідок. Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії на висоту.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС ГЕОМЕТРІЇ 8 КЛАСУ

- 1** 1. Знайдіть периметр паралелограма, сторони якого дорівнюють 4 см і 9 см.
2. Один з кутів ромба дорівнює 46° . Знайдіть інші кути ромба.
3. Знайдіть площу трикутника, одна зі сторін якого дорівнює 8 см, а висота, проведена до цієї сторони, – 5 см.
- 2** 4. Середня лінія трапеції дорівнює 12 см. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них на 4 см більша за іншу.
5. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 4$ см, $AC = 6$ см, $A_1C_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 12$ см. Знайдіть A_1B_1 і BC .
6. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 10 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до меншого з катетів.
- 3** 7. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$ см, $AB = 10$ см. Розв'яжіть цей трикутник (кути трикутника знайдіть із точністю до градуса).
8. Знайдіть сторони прямокутника, якщо вони відносяться як 2 : 3, а площа прямокутника дорівнює 96 см^2 .
- 4** 9. Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить більшу бічну сторону на відрізки 2 см і 8 см. Знайдіть площу трапеції.

ВОНА ВВАЖАЛА, ЩО СПРАВЕДЛИВІСТЬ ВАЖЛИВІША

Колишня вулиця Ломоносова в Києві тепер носить ім'я молодій дівчини-математика – Юлії Здановської.

Народилася Юлія 4 травня 2000 року в Харкові, у сім'ї програміста і фінансистки. Мама Юлії – співзасновниця благодійного фонду «Станція “Харків”», який з 2014 року допомагає постраждалим від війни. Їхня донька з юного віку проявляла здібності до точних наук. У шкільні роки брала участь у Всеукраїнських олімпіадах із математики та фізики. У 14 років переїхала до Києва, аби продовжувати навчання в Українському фізико-математичному ліцеї (УФМЛ) Київського національного університету імені Тараса Шевченка (КНУ). Окрім цього, після закінчення 10 класу Юлія стала викладачкою і тренеркою в літній школі з математики «Мудрамакітра», а також – у математичному гуртку «Кванта». Згодом цей гурток став не тільки платформою для вивчення математики, а й центром розвитку програмування для тих, хто бажав отримати більше знань, аніж передбачено шкільними програмами.

У 2017 році Юлія Здановська у складі української команди здобула срібну медаль на Європейській математичній олімпіаді серед дівчат із 44 країн світу.

Того ж року Юлія склала ЗНО з математики на 200 балів і вступила на спеціальність «Комп'ютерна математика» на механіко-математичний факультет КНУ.



У центрі – Юлія Здановська

На другому курсі навчання Юлія була єдиною студенткою, котра отримала кваліфікацію для роботи в *Samsung R&D Institute Ukraine*. Талановитою, яскравою, чесною, порядною – такою пам'ятають Юлію Здановську викладачі КНУ. Професор кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики КНУ Богдан Рубльов, голова Всеукраїнської олімпіади з математики, розповідає: «Пам'ятаю, як на Всеукраїнській олімпіаді вона була 12-та в рейтингу і мала потрапити на відбір на міжнародну олімпіаду, про що всі мріють. За одну із задач їй поставили 7 балів, а вона прийшла на апеляцію і сказала, що в цій задачі журі помилилося, за критеріями в неї мало стояти 5 балів. Ми виправили, і вона стала 13-ю, не потрапивши туди, куди дуже-дуже мріяла». Хтось дивувався, хтось ледь не крутив пальцем біля скроні, але рудоволоса дівчина точно знала, що чинить правильно. Бо справедливість важливіша.

Закінчивши бакалаврат, Юлія Здановська ухвалила несподіване рішення. Дівчина, яку були б раді бачити серед своїх студентів найкращі університети світу, відмовилася вступати на магістерську програму і приєдналася до проєкту «Навчай для України» / *Teach For Ukraine*. Вона мріяла займатися реформою шкільної освіти і водночас розуміла, що для цього треба мати досвід навчання у середній школі. Тому дівчина поїхала викладати у школу на Дніпропетровщині. Найбільше Юля хотіла, щоб діти «кайфували від вивчення математики», тож планувала відкриття й гуртка робототехніки. Вона прагнула змінити українську систему освіти. «Не хочу бути професоркою в Гарварді, а от міністеркою освіти України стати згодна», – казала Юлія.

На кожному поверсі школи з її ініціативи поставили столи для гри в настільний теніс. Діти були просто в захваті, адже навіть не уявля-

ли, що й учителька може грати разом з ними, та ще й дуже вправно. Тож у ліцеї регулярно вишикувалися черги з учнів, охочих пограти з Юлією Янівною в настільний теніс. Вона була для них подругою.

У лютому 2022 року дівчина приїхала до батьків у Харків. Тут і застала її війна, повномасштабне вторгнення росіян. Юлія одразу вирішила волонтерити у штабі оборони, що в обласній адміністрації. А на початку березня росіяни завдали ракетного удару саме по цьому приміщенню. Загибло до 30 людей. Серед полеглих була, на жаль, і Юлія Здановська. Напередодні в листі друзям, які пропонували їй виїхати у безпечніші місця, дівчина подякувала й відписала, що залишиться у своєму рідному місті до перемоги.

«Коли помирає хтось такий, як Юлія, – це ніби помирає майбутнє», – сказала українська науковиця-математик Марина В'язовська під час отримання однієї з найпрестижніших нагород у математиці – премії Філдса.

У Києві з ініціативи студентів КНУ на честь Юлії Здановської назвали вулицю, прилеглу до студмістечка, яка раніше носила ім'я росіянина Михайла Ломоносова.

Для переможців та переможниць Міжнародного конкурсу з інформатики та комп'ютерної грамотності «Бербас» у Новій Зеландії нині встановлено почесні відзнаки імені Юлії Здановської.

У пам'ять про Здановську факультет математики Массачусетського технологічного інституту (MIT) – один із найкращих технологічних університетів у США та загалом у світі – організував безкоштовну освітню програму з математики «Мрія Юлії/*Yulia's Dream*». У рамках цієї програми старшокласники і старшокласниці з України разом із наставниками з MIT працюють над розв'язанням складних математичних завдань.

На факультеті математики та інформаційних технологій Ягеллонського університету в Польщі засновано стипендіальний фонд імені Юлії Здановської для талановитих студентів і студенток з України.

А заснований нею гурток «Кванта» і досі продовжує свою діяльність. У ньому молоді колеги Юлії допомагають учням та ученицям готуватися до олімпіад та вступу на профільні факультети. Навчальні методики Юлії досі застосовуються у процесі викладання.

Їй назавжди 21 рік. Ім'я Юлії Здановської стало символом сили, самопожертви та нескореності перед агресором.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Розділ 1

Чотирикутники

1. На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ зовні нього побудовано два рівносторонніх трикутники ABK і CDL . Доведіть, що відрізок KL проходить через точку перетину діагоналей паралелограма.
2. На основі AB рівнобедреного трикутника ABC взято довільну точку K . Через цю точку паралельно BC і AC проведено прямі, які перетинають сторони трикутника. Доведіть, що периметр паралелограма, який при цьому утворився, не залежить від положення точки K .
3. Точки A , B і C лежать на колі із центром O , $ABCO$ – паралелограм. Знайдіть його кути.
4. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями й висотою.
5. Діагоналі опуклого чотирикутника розбивають його на чотири трикутники, периметри яких однакові. Визначте вид чотирикутника.
6. Коло з діаметром AC проходить через середину сторони AB ромба $ABCD$. Знайдіть тупий кут ромба.
7. Зовні прямокутника $ABCD$ вибрано точку K так, що $\angle AKC = 90^\circ$. Знайдіть $\angle DKB$.
8. На катетах AC і BC прямокутного трикутника ABC побудовано квадрати $ACDE$ і $BCKL$. Прямі ED і KL перетинаються в точці P . Під яким кутом перетинаються прямі PC і AB ?
9. Сторони прямокутника дорівнюють a і b ($a > b$). Бісектриси чотирьох кутів прямокутника, перетинаючись, утворюють чотирикутник. Знайдіть його діагоналі.
10. Доведіть, що бісектриса кута паралелограма ділить навпіл кут між висотами, проведеними з вершини цього кута.
11. Усередині квадрата $ABCD$ узяті точку P і на відрізку AP , як на стороні, побудовано квадрат $APNM$, сторона якого PN перетинає сторону AD квадрата $ABCD$. Порівняйте між собою відрізки BP і DM .
12. Доведіть, що в будь-якій трапеції сума бічних сторін більша за різницю більшої і меншої основ.
13. Відомо, що існує точка, рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони трапеції. Знайдіть периметр трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 10 см.
14. Відомо, що існує точка, рівновіддалена від усіх вершин трапеції, один з кутів якої дорівнює 40° . Знайдіть інші кути трапеції.
15. Основи трапеції дорівнюють a і b ($a > b$), а сума кутів, прилеглих до більшої основи, дорівнює 90° . Знайдіть відстань між серединами основ трапеції.
16. Діагоналі чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, перетинаються в точці M . Відомо, що $\angle ABC = 73^\circ$, $\angle BCD = 103^\circ$, $\angle AMD = 110^\circ$. Знайдіть $\angle ACD$.

17. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AH_1 , BH_2 і CH_3 . H – точка їхнього перетину. Серед семи точок A , B , C , H_1 , H_2 , H_3 і H укажіть усі такі їхні четвірки, через які можна провести коло.

Розділ 2

Подібність трикутників

18. У п'ятикутнику $ABCDE$ всі кути між собою та всі сторони між собою рівні. Діагоналі AD і BE перетинаються в точці O . Доведіть, що $\triangle AED \sim \triangle AOE$.
19. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає продовження сторін CB і CD відповідно в точках N і M . Доведіть, що добуток $BN \cdot DM$ не залежить від того, як проведено цю пряму.
20. Діагональ трапеції ділить її на два подібних трикутники. Визначте довжину цієї діагоналі, якщо основи трапеції дорівнюють a і b .
21. Через середину найбільшої сторони трикутника проведено пряму, яка відтинає від нього трикутник, подібний даному. Знайдіть найменшу сторону трикутника, що відтинається, якщо сторони даного дорівнюють:
 1) 42 см, 49 см, 56 см; 2) 42 см, 49 см, 63 см;
 3) 42 см, 49 см, 70 см.
 Скільки розв'язків має задача в кожному з випадків?
22. У трикутнику ABC кут B – тупий. Позначте на стороні AC таку точку D , щоб виконувалася рівність $AB^2 = AD \cdot AC$.
23. AD і BC – основи трапеції $ABCD$. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні, $AC = 15$ см, CE – висота трапеції, $AE = 9$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

Розділ 3

Розв'язування прямокутних трикутників

24. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ взаємно перпендикулярні. Доведіть, що $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.
25. Точка M лежить усередині кута, який дорівнює 60° . Відстані від точки M до сторін кута дорівнюють a і b . Знайдіть відстань від точки M до вершини кута.
26. Два кола різних радіусів мають зовнішній дотик. MN – їхня спільна зовнішня дотична, M і N – точки дотику. Доведіть, що довжина відрізка MN є середнім геометричним діаметрів кіл.
27. 1) У гострокутному трикутнику ABC BH – висота. Доведіть, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$.
 2) У трикутнику ABC $\angle A$ – тупий, BH – висота. Доведіть, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$.
28. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику ділить гіпотенузу у відношенні $2 : 3$. Знайдіть периметр трикутника, якщо центр вписаного кола міститься на відстані $m\sqrt{2}$ від вершини прямого кута.

29. Нехай a і b – катети прямокутного трикутника, c – його гіпотенуза, h – висота, проведена до гіпотенузи. Доведіть, що трикутник зі сторонами h , $c + h$ і $a + b$ – прямокутний.
30. $ABCD$ – прямокутна трапеція, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $AB = a$, $CD = b$, $BC = c$, $BC < DA$. Знайдіть відстань від точки B до прямої, що містить CD .
31. Обчисліть: 1) $\sin 15^\circ$; 2) $\sin 75^\circ$.

Розділ 4

Многокутники. Площі многокутників

32. Чи існує многокутник, у якого:
1) 20 діагоналей; 2) 21 діагональ?
33. В опуклому n -кутнику п'ять кутів мають градусну міру 140° кожний, інші кути – гострі. Знайдіть n .
34. Доведіть, що відстані від довільної точки діагоналі паралелограма до непаралельних сторін обернено пропорційні довжинам цих сторін.
35. Усередині прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) узято точку M так, що площі трикутників AMB , BMC і CMA рівні між собою. Доведіть, що $MA^2 + MB^2 = 5MC^2$.
36. У скільки разів площа трикутника ABC більша за площу трикутника ABM , де M – точка перетину медіан трикутника ABC ?
37. У трикутнику ABC h_1 , h_2 , h_3 – висоти, проведені відповідно до сторін AB , BC і CA , а d_1 , d_2 , d_3 – відстані від довільної точки P , що міститься всередині цього трикутника, до сторін AB , BC і CA відповідно. Доведіть, що $\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} = 1$.
38. Точка перетину бісектрис трикутника на 3 см віддалена від прямої, що містить одну зі сторін трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо його периметр дорівнює 36 см.
39. На сторонах AB , BC , AC трикутника ABC позначено точки M , K , P так, що $AM : MB = BK : KC = CP : PA = 2 : 1$. Площа трикутника ABC дорівнює S . Знайдіть площу чотирикутника $APKM$.
40. Бісектриси всіх кутів трапеції перетинаються в точці O , яка міститься на відстані d від більшої сторони трапеції. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють m і n .
41. AD і BC – основи трапеції $ABCD$, $CD = c$, точка K – середина бічної сторони AB . Відстань від точки K до прямої, що містить сторону CD , дорівнює d . Знайдіть площу трапеції.
42. У трапеції $ABCD$ M – середина більшої основи AD , $AB = BC = CD = a$. Точка перетину діагоналей трапеції збігається з точкою перетину висот трикутника BMC . Знайдіть площу трапеції.

Європейська математична олімпіада для дівчат

Міжнародні математичні олімпіади (ММО) запроваджено 1959 року. Перші пів століття їхніми учасниками були тільки хлопці. Щоб надихнути й дівчат брати участь у математичному русі, у 2012 році в Кембриджі (Велика Британія) вперше було проведено дівчачу Європейську математичну олімпіаду (*European Girl's Mathematical Olympiad, EGMO*). У ній узяли участь 70 дівчат із 19 країн. Наступні EGMO проходили у Люксембурзі, Туреччині, Білорусі, Румунії, Швейцарії та Італії. З того часу українські учасниці тричі набирали найвищу сумарну кількість балів у офіційному заліку й здобували статус найкращої команди. Досі жодній з інших країн не вдалося повторити такі високі результати.

VIII Європейська математична олімпіада для дівчат уперше була проведена в Україні, у Києві, у квітні 2019 року. Співорганізаторами олімпіади виступили Міністерство освіти і науки України, КНУ імені Тараса Шевченка, Мала академія наук (МАН). У ній взяли участь 49 міжнародних команд.

Двісті учасниць у віці від 13 до 20 років під час інтелектуальних змагань розв'язували доволі складні математичні завдання з алгебри, комбінаторики, геометрії та теорії чисел. Щодня дівчата розв'язували по три задачі, за кожную з яких вони могли отримати від 0 до 7 балів. Оцінювалася не лише правильність, а й оригінальність рішень. Українська команда в цих змаганнях посіла почесне перше місце!

Хоча EGMO має статус європейської олімпіади, представники інших країн теж можуть брати в ній участь, але поза конкурсом. Так, у 2024 році XIII Європейська олімпіада для дівчат проходила в місті Цхалтубо (Грузія). У ній узяли участь 212 школярок із 54 країн світу, зокрема 151 дівчина з 38 країн Європи.

За підсумками EGMO-2024, перемогу в командному заліку вибороли чотири українки – Євгенія Франкевич (Львів, золото), Марина Спектрова (Харків, золото), Аліса Потьомкіна (Київ, золото) та Катерина Сидоренко (Київ, срібло). У напруженій боротьбі, відстаючи від румунок, у кінцевому підсумку наші дівчата випередили команду суперниць на 5 балів! Так, українська команда дівчат показала четвертий командний результат, пропустивши вперед тільки команди Сполучених Штатів, Австралії й Китаю. Але ці команди – неєвропейські. А от серед офіційних європейських учасниць команда України – перша!



Українська четвірка
переможниць на EGMO-2024

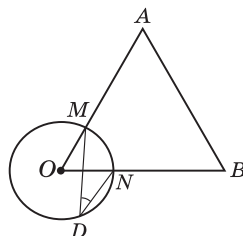
ГОТУЄМОСЯ ДО ЗНО (НМТ)

Розв'яжіть задачі, що пропонувалися на зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО) з математики минулих років, які охоплюють курс геометрії 8-го класу. У дужках указано, у якому році це завдання пропонувалося на ЗНО.

До кожного із завдань 1, 2, 4, 6, 9 оберіть правильний варіант відповіді з п'яти запропонованих варіантів (А–Д). До кожного із завдань 3, 5, 7, 8, 10–13 відповідь запишіть.

Тема «ЧОТИРИКУТНИКИ»

1. (2011 р.) На малюнку зображено коло із центром у точці O та рівносторонній трикутник AOB , що перетинає коло в точках M і N . Точка D належить колу. Знайдіть градусну міру кута MDN .



А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	120°

2. (2015 р.) На діагоналі AC квадрата $ABCD$ задано точку, відстань від якої до сторін AB і BC дорівнює 2 см і 6 см відповідно. Визначте периметр квадрата $ABCD$.

А	Б	В	Г	Д
16 см	24 см	32 см	48 см	64 см

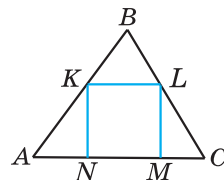
3. (2012 р.) Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає його більшу сторону BC в точці M . Визначте радіус кола (у см), описаного навколо прямокутника, якщо $BC = 24$ см, $AM = 10\sqrt{2}$ см.

Тема «ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ»

4. (2011 р.) У трикутнику ABC : $AB = 31$ см, $BC = 15$ см, $AC = 26$ см. Пряма a , паралельна стороні AB , перетинає сторони BC і AC у точках M і N відповідно. Обчисліть периметр трикутника MNC , якщо $MC = 5$ см.

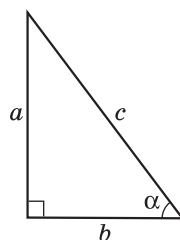
А	Б	В	Г	Д
15 см	24 см	48 см	21 см	26 см

5. (2013 р.) У трикутник ABC вписано квадрат $KLMN$ (див. мал.). Висота цього трикутника, проведена до сторони AC , дорівнює 6 см. Знайдіть периметр квадрата (у см), якщо $AC = 10$ см.



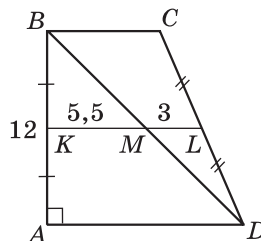
Тема «РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ»

6. (2015 р.) На малюнку зображено прямокутний трикутник з катетами a і b , гіпотенузою c та гострим кутом α . Укажіть правильну рівність.



А	Б	В	Г	Д
$\cos \alpha = \frac{a}{b}$	$\cos \alpha = \frac{c}{b}$	$\cos \alpha = \frac{a}{c}$	$\cos \alpha = \frac{c}{a}$	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$

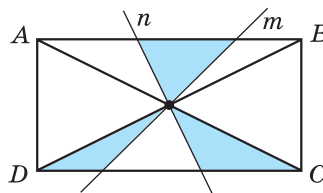
7. (2009 р.) У трапеції $ABCD$: $\angle A = 90^\circ$, $AB = 12$ см (див. мал.). Діагональ BD ділить середню лінію KL трапеції на відрізки KM і ML , причому $KM = 5,5$ см і $ML = 3$ см. Обчисліть периметр трапеції $ABCD$ (у см).



8. (2006 р.) (Задача Л. Пізанського, XII–XIII ст.) Дві вежі, одна з яких 40 футів, а друга – 30 футів заввишки, розташовано на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що розміщена між ними, одночасно з обох веж злетіло по пташці. Рухаючись з однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі (у футах).

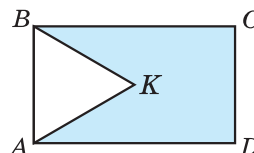
Тема «МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ»

9. (2006 р.) У прямокутнику $ABCD$ прямі m і n проходять через точку перетину діагоналей. Площа фігури, що складається з трьох зафарбованих трикутників, дорівнює 12 см^2 . Обчисліть площу прямокутника $ABCD$.



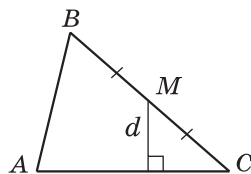
А	Б	В	Г	Д
24 см^2	30 см^2	36 см^2	42 см^2	48 см^2

10. (2010 р.) На малюнку зображено прямокутник $ABCD$ і рівносторонній трикутник ABK , периметри яких відповідно дорівнюють 20 см і 12 см. Знайдіть периметр п'ятикутника $AKBCD$ (у см).



11. (2013 р.) Менша сторона прямокутника дорівнює 16 м та утворює з його діагоналлю кут 60° . Середини всіх сторін прямокутника сполучено послідовно. Знайдіть значення виразу $\frac{S}{\sqrt{3}}$, де S – площа (у м^2) утвореного чотирикутника.

12. (2013 р.) У трикутнику ABC точка M – середина сторони BC , $AC = 24$ см (див. мал.). Знайдіть відстань d (у см) від точки M до сторони AC , якщо площа трикутника ABC дорівнює 96 см².



13. (2014 р.) Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута й ділить середню лінію трапеції на відрізки 13 см і 23 см завдовжки. Обчисліть (у см²) площу трапеції.

ДОДАТОК 2

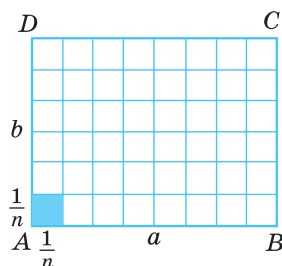
ТЕОРЕМА ПРО ПЛОЩУ ПРЯМОКУТНИКА



Площа S прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою $S = a \cdot b$.

Доведення. Нехай $ABCD$ – довільний прямокутник, у якого $AB = a$, $AD = b$ (мал. 1). Доведемо, що $S = ab$.

1) Якщо довжини відрізків AB і AD є раціональними числами (цілими або дробовими), то існує відрізок такої довжини h , який можна відкласти ціле число разів і на відрізку AB , і на відрізку AD .



Мал. 1

Зведемо числа a і b до спільного знаменника n .

Матимемо: $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$. Тоді $h = \frac{1}{n}$. Маємо $a = ph$,

$b = qh$. Розіб'ємо відрізок AB на p рівних частин h завдовжки, а AD – на q рівних частин h завдовжки. Через точки поділу проведемо прямі, паралельні сторонам прямокутника (мал. 1). Ці прямі розіб'ють увесь прямокутник на pq рівних між собою квадратів зі стороною $h = \frac{1}{n}$ (один з таких квадратів зафарбовано на мал. 1). Оскільки одиничний квадрат уміщує рівно n^2 квадратів зі стороною $\frac{1}{n}$, то площа одного квадрата з такою стороною дорівнює $\frac{1}{n^2}$. Площа прямокутника дорівнює сумі площ усіх квадратів. Маємо:

$$S = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.$$

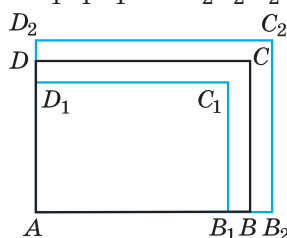
2) Розглянемо випадок, коли хоч одна з довжин відрізків AB або AD є числом ірраціональним (нескінченним десятковим дробом).

Нехай число a_n одержали із числа a відкиданням усіх десяткових знаків після коми, починаючи з $(n + 1)$ -го. Оскільки a відрізняється від a_n не більше ніж на $\frac{1}{10^n}$, то

$$a_n \leq a \leq a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Аналогічно розглянемо число b_n таке, що $b_n \leq b \leq b_n + \frac{1}{10^n}$. На прямих AB і AD відкладемо відрізки AB_1, AB_2, AD_1, AD_2 , де $AB_1 = a_n$,

$AB_2 = a_n + \frac{1}{10^n}$, $AD_1 = b_n$, $AD_2 = b_n + \frac{1}{10^n}$ і побудуємо прямокутники $AB_1C_1D_1$ і $AB_2C_2D_2$ (мал. 2). Тоді



Мал. 2

$$S_{AB_1C_1D_1} \leq S_{ABCD} \leq S_{AB_2C_2D_2};$$

$$a_n b_n \leq S_{ABCD} \leq \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right) \left(b_n + \frac{1}{10^n}\right).$$

Будемо необмежено збільшувати число n .

Тоді число $\frac{1}{10^n}$ стає дуже малим, а тому число

$a_n + \frac{1}{10^n}$ практично не відрізнятиметься від чис-

ла a_n , а число $b_n + \frac{1}{10^n}$ практично не відрізнятиметься від числа b_n .

Тому добуток $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right) \left(b_n + \frac{1}{10^n}\right)$ практично не відрізнятиметься від

добутку $a_n b_n$. Отже, з останньої подвійної нерівності випливає, що площа прямокутника $ABCD$ практично не відрізняється від числа $a_n b_n$. Тому $S = a_n b_n$.

Але з нерівностей $a_n \leq a \leq a_n + \frac{1}{10^n}$ і $b_n \leq b \leq b_n + \frac{1}{10^n}$ при необмеженому збільшенні числа n слідує, що число a практично не відрізняється від числа a_n , а число b – від числа b_n . Отже, число $a_n b_n$ практично не відрізняється від числа ab .

Остаточно маємо: $S = ab$. ■

ВІДОМОСТІ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ

7 КЛАСУ

Елементарні геометричні фігури та їхні властивості

Основними геометричними фігурами на площині є *точка* й *пряма*.

Відрізок називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками, разом із цими точками. На малюнку 1: відрізок AB , точки A і B – кінці відрізка.



Мал. 1

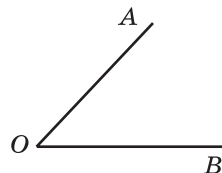
Точка A ділить пряму на дві частини (мал. 2). Кожну з отриманих частин разом з точкою A називають *променем*, що виходить із точки A . Тому A називають *початком* кожного з променів.



Мал. 2

Два промені, що мають спільний початок та доповнюють один одного до прямої, називають *доповняльними*.

Кут – це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що виходять з однієї точки. Промені називають *сторонами кута*, а їхній спільний початок – *вершиною кута*. На малюнку 3: кут AOB , точка O – його вершина, OA та OB – сторони кута. Записати цей кут можна так: $\angle AOB$, $\angle BOA$, $\angle O$.



Мал. 3

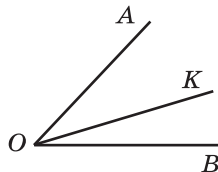
Бісектрисою кута називають промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами й ділить його навпіл.

Аксіоми планіметрії

- I. Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.
- II. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.
- III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
- IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.
- V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка його внутрішня точка. (На мал. 4: $AB = AC + CB$.)
- VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180° .
- VII. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які його розбиває будь-який промінь, що проходить між його сторонами. $\angle AOB = \angle AOK + \angle KOB$ (мал. 5).



Мал. 4



Мал. 5

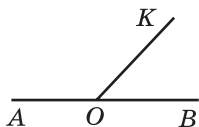
Суміжні та вертикальні кути

Два кути називають *суміжними*, якщо одна сторона в них спільна, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

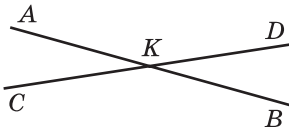
На малюнку 6: кути $\angle AOK$ і $\angle KOB$ – суміжні.

Властивість суміжних кутів. Сума суміжних кутів дорівнює 180° .

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного з них є доповняльними променями сторін іншого.



Мал. 6



Мал. 7

На малюнку 7: $\angle AKC$ і $\angle DKB$ – вертикальні, $\angle AKD$ і $\angle CKB$ також вертикальні.

Властивість вертикальних кутів. Вертикальні кути рівні між собою.

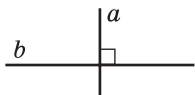
Перпендикулярні та паралельні прямі

Дві прямі називають *взаємно перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

На малюнку 8: прямі a і b – перпендикулярні.

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

На малюнку 9: прямі a і b – паралельні.



Мал. 8



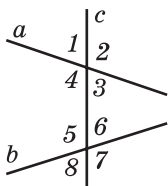
Мал. 9

Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих). Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Кути, що утворилися при перетині двох прямих січною.

Ознаки та властивість паралельності прямих.

Властивості кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною



Мал. 10

Прямую c називають *січною* для прямих a і b , якщо вона перетинає їх у двох точках (мал. 10).

Пари кутів 4 і 5, 3 і 6 називають *внутрішніми односторонніми кутами*; пари кутів 4 і 6, 3 і 5 – *внутрішніми різносторонніми*; пари кутів 1 і 5, 2 і 6, 3 і 7, 4 і 8 – *відповідними кутами*.

Ознаки паралельності прямих

1. Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.

2. Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні між собою, то прямі паралельні.
3. Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° , то прямі паралельні.
4. Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Властивість паралельних прямих. Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні одна одній.

Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

1. Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою.
2. Внутрішні різносторонні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою.
3. Сума внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 180° .

Трикутник і його елементи

Трикутником називають фігуру, що складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки (мал. 11).

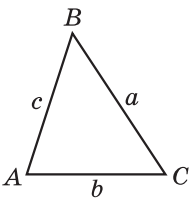
Точки A, B, C – вершини трикутника; відрізки $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ – сторони трикутника; $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$ – кути трикутника.

Периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін: $P_{ABC} = AB + BC + CA$.

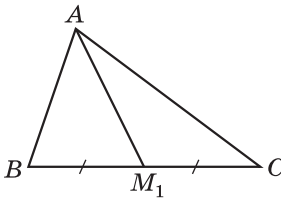
Медіаною трикутника називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

На малюнку 12: AM_1 – медіана трикутника ABC .

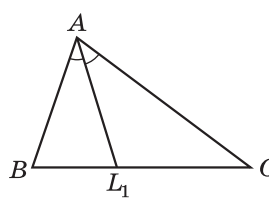
Бісектрисою трикутника називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.



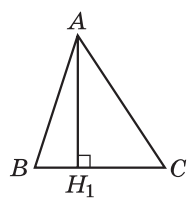
Мал. 11



Мал. 12



Мал. 13



Мал. 14

На малюнку 13: AL_1 – бісектриса трикутника ABC .

Висотою трикутника називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

На малюнку 14: AH_1 – висота $\triangle ABC$.

Сума кутів трикутника дорівнює 180° .

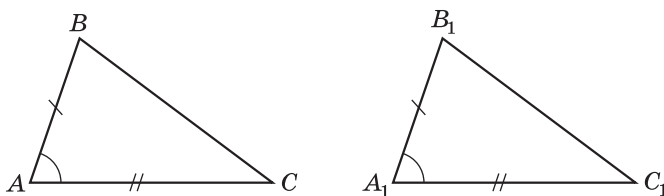
Нерівність трикутника. Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших сторін.

У трикутнику:

- 1) проти більшої сторони лежить більший кут;
- 2) проти більшого кута лежить більша сторона.

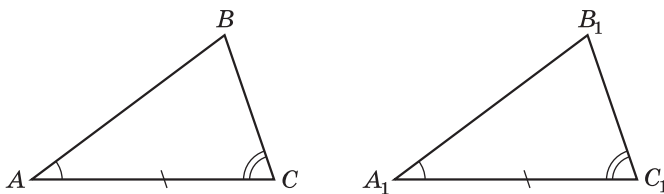
Ознаки рівності трикутників

Перша ознака рівності трикутників (за двома сторонами й кутом між ними). Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою (мал. 15).



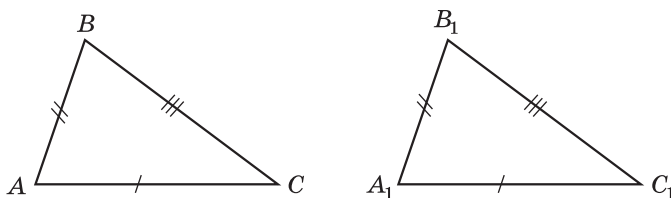
Мал. 15

Друга ознака рівності трикутників (за стороною і двома прилеглими до неї кутами). Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою (мал. 16).



Мал. 16

Третя ознака рівності трикутників (за трьома сторонами). Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою (мал. 17).



Мал. 17

Види трикутників

Трикутник називають *рівнобедреним*, якщо в нього дві сторони між собою рівні.

На малюнку 18: $\triangle ABC$ – рівнобедрений, AC і BC – його бічні сторони, AB – основа.

Властивість кутів рівнобедреного трикутника. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

Ознака рівнобедреного трикутника. Якщо в трикутнику два кути між собою рівні, то він рівнобедрений.

Трикутник, усі сторони якого між собою рівні, називають *рівностороннім*.

На малюнку 19: $\triangle ABC$ – рівносторонній.

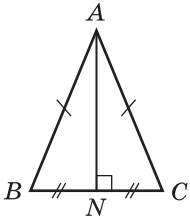
Властивість кутів рівностороннього трикутника. Усі кути рівностороннього трикутника дорівнюють по 60° .

Ознака рівностороннього трикутника. Якщо в трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.

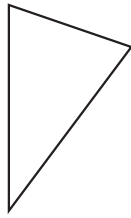
Трикутник, усі сторони якого різняться довжиною, називають *різностороннім*.

Властивість бісектриси рівнобедреного трикутника. У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є його медіаною і висотою.

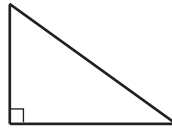
На малюнку 20: бісектриса AN , проведена до основи BC рівнобедреного трикутника ABC , є також його медіаною і висотою.



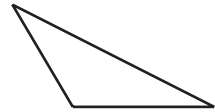
Мал. 20



Мал. 21



Мал. 22



Мал. 23

Залежно від кутів розглядають такі види трикутників:

- *гострокутний* (усі кути якого гострі – мал. 21);
- *прямокутний* (один з кутів якого прямий, а два інші – гострі – мал. 22);
- *тупокутний* (один з кутів якого тупий, а два інші – гострі – мал. 23).

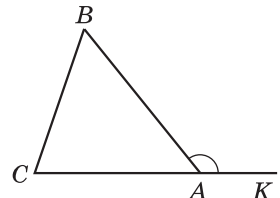
Зовнішній кут трикутника

Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний з кутом цього трикутника.

На малюнку 24: $\angle BAK$ – зовнішній кут трикутника ABC .

Властивість зовнішнього кута трикутника. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним, тобто

$$\angle BAK = \angle B + \angle C.$$



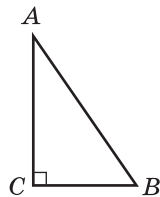
Мал. 24

Прямокутні трикутники

Якщо $\angle C = 90^\circ$, то $\triangle ABC$ – прямокутний (мал. 25). AC і BC – *катети прямокутного трикутника*, AB – *гіпотенуза прямокутного трикутника*.

Властивості прямокутних трикутників

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° .
2. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який з його катетів.
3. Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30° , дорівнює половині гіпотенузи.
4. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30° .
5. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.



Мал. 25

Ознаки рівності прямокутних трикутників

1. *За двома катетами.* Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого, то такі трикутники рівні.
2. *За катетом і прилеглим до нього гострим кутом.* Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього куту іншого, то такі трикутники рівні.
3. *За гіпотенузою і гострим кутом.* Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого, то такі трикутники рівні.
4. *За катетом і протилежним кутом.* Якщо катет і протилежний кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному куту іншого, то такі трикутники рівні.
5. *За катетом і гіпотенузою.* Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі іншого, то такі трикутники рівні.

Коло та круг

Колом називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від заданої точки (мал. 26).

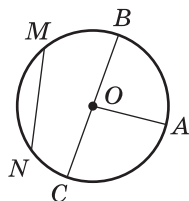
Цю точку називають *центром кола*; відрізок, що сполучає точку кола з його центром, називають *радіусом кола*.

На малюнку 26: точка O – центр кола, OA – радіус кола.

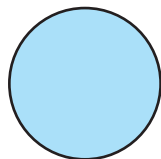
Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають *хордою*. Хорду, що проходить через центр кола, називають *діаметром*.

На малюнку 26: MN – хорда, BC – діаметр.

Частину площини, обмежену колом, разом із самим колом, називають *кругом* (мал. 27).



Мал. 26



Мал. 27

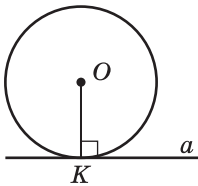
Центром, радіусом, діаметром, хордою круга називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, яке обмежує круг.

Властивості елементів кола

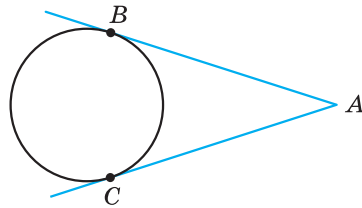
1. Діаметр кола вдвічі більший за його радіус.
2. Діаметр є найбільшою з хорд.
3. Діаметр з будь-якої точки кола видно під прямим кутом.
4. Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.
5. Діаметр кола, що проходить через середину хорди, яка не є діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.

Дотичною до кола називають пряму, яка має лише одну спільну точку з колом. Цю точку називають *точкою дотику*.

На малюнку 28: пряма a – дотична до кола, точка K – точка дотику.



Мал. 28



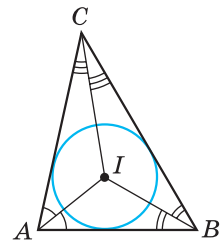
Мал. 29

Властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки. Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою. На малюнку 29: $AB = AC$.

Коло, вписане у трикутник

Коло називають *вписаним у трикутник*, якщо воно дотикається до всіх сторін цього трикутника. Водночас трикутник називають *описаним навколо кола* (мал. 30).

У будь-який трикутник можна вписати коло. Центром кола, вписаного у трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника.

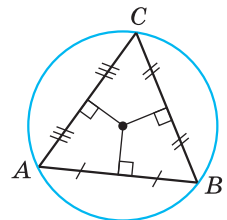


Мал. 30

Коло, описане навколо трикутника

Коло називають *описаним навколо трикутника*, якщо воно проходить через усі вершини цього трикутника. Водночас трикутник називають *вписаним у коло* (мал. 31).

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.



Мал. 31

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

Повторюємо геометрію за 7 клас

14. 1) 70° , 110° ; 2) 80° ; 100° . 15. 1) 60° ; 120° ; 2) 40° ; 140° . 16. Вінниця.
17. 1) 20° ; 2) 15° . 18. 1) 30° ; 2) 130° . 19. 1) 145° , 35° ; 2) 100° , 80° .
20. 1) 75° , 105° ; 2) 108° , 72° . 21. Ні. 38. 7 см; 21 см; 17 см. 39. 8 см;
11 см; 16 см. 41. Пилип Орлик. 42. 40° , 60° , 80° . 43. 1) 32° , 58° ;
2) 40° , 50° . 44. 1) 75° , 15° ; 2) 54° , 36° . 45. 36 см. 46. 24 см. 47. 44° ,
 68° , 68° або 52° , 52° , 76° ; слід розглянути два випадки. 48. Ні. 59. 20° .
60. 42° . 61. 65° . 62. 140° . 63. 1) 40 см, 24 см; 2) 10 см, 6 см. 64. 4 см.
65. 24 см. 66. 20 см. 67. 50° , 65° , 65° або 130° , 25° , 25° , задача має два
розв'язки.

Розділ 1

§ 1

1.16. 10 см, 12,5 см, 20 см, 22,5 см. 1.17. 60° , 75° , 105° , 120° .
1.18. 105° , 75° , 90° . 1.19. 21 см, 9 см, 6 см. 1.22. Так, якщо чотири-
кутник неопуклий. 1.23. Два розв'язки. 1.24. Два розв'язки. 1.26. 6 см.
1.28. 70° , 70° і 40° або 70° , 55° і 55° . 1.29. 10 см. 1.33. Аліса; на 90 с.
1.34. $n = 4$.

§ 2

2.9. Вірченко. 2.16. 14 см. 2.21. 96° , 84° . 2.22. 34 см. 2.23. $BP = 4$ см,
 $PC = 8$ см. 2.29. 28 см. 2.30. 24 см. 2.31. 40° . 2.32. 110° . 2.33. 7 см,
13 см. 2.34. 9 см, 30 см. 2.35. 1) 75° ; 2) 105° . 2.36. 1) 96° ; 2) 84° .
2.39. 9 см. 2.41. Ні. 2.43. 1) 192 т; 2) 1 152 000 грн.

§ 3

3.11. Баюл. 3.18. 1) 55° ; 2) 50° . 3.19. 1) 30° ; 2) 40° . 3.20. 160° .
3.21. 40° . 3.24. 52 см. 3.25. 60 см. 3.26. 48 дм. 3.27. 1) $DB = 4a$, $AB = 2a$;
2) $AK = \frac{m}{4}$, $CD = \frac{m}{2}$. 3.28. $BD = 2b$, $OK = \frac{b}{2}$. 3.29. 50 см. 3.30. 40 см.
3.32. 1) 60° ; 2) 90° . 3.33. *Порада*. Побудуйте паралелограм, одна з вер-
шин якого точка B , дві інші лежать на сторонах кута, а точка P є точ-
кою перетину діагоналей. 3.35. 10 сходинок. 3.36. Ні.

§ 4

4.23. 80° і 100° . 4.24. 72° і 108° . 4.29. 70° і 110° . 4.30. 130° і 50° .
4.31. 1) 60° , 120° ; 2) $4a$ см. 4.32. 1) 60° , 120° ; 2) $4b$ см. 4.35. 60 см.
4.37. 10 см. 4.38. 1) Так; 2) ні; 3) ні. 4.39. Паралелограм. 4.41. 1) 9 руло-
нів; 2) 1539 грн. 4.42. *Порада*. Розгляньте $\triangle AMK$, де MK – діаметр
кола.

§ 5

5.19. 24 см. 5.20. 4 см. 5.24. $2b$ см. 5.25. 9 см. 5.28. $\angle A = 20^\circ$,

$\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, $\angle D = 200^\circ$. Неопуклий. 5.29. $AB = 15$ см, $AD = 40$ см. 5.31. Так. 5.32. $65\frac{5}{11}$ хв.

§ 6

6.14. 1) Так; 2) ні. 6.15. 1) Так; 2) ні. 6.16. Ні. 6.24. Рівнобічна. 6.25. 8 см. 6.26. 36 см. 6.27. 70° і 110° . 6.28. 40° і 140° . 6.31. 9 см і 5 см. 6.33. 60° і 120° . 6.34. 72° і 108° . 6.36. 2 : 1. 6.37. 2 : 1. 6.38. *Порада*. Нехай $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AB = d$. Через вершину C проведіть $CM \parallel AB$, $M \in AD$. Тоді $MD = a - b$. $\triangle CMD$ можна побудувати. 6.40. 20 см. 6.43. 1) 17,2 м; 2) 860 грн. 6.44. У точці перетину діагоналей чотирикутника.

§ 7

7.8. 4 см. 7.9. 20 дм. 7.12. $5R$. 7.13. $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \alpha$, $2\alpha - 180^\circ$. 7.14. $\frac{\alpha}{2}$, $90^\circ - \frac{\alpha}{4}$, $90^\circ - \frac{\alpha}{4}$ або $180^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{4}$. 7.16. 48 мішків.

§ 8

8.9. $A_1A_2 = A_2A_3 = 12$ см, $B_1B_2 = B_2B_3 = 20$ см. 8.10. $ON_2 = 42$ см, $OM_2 = 24$ см. 8.12. *Порада*. Проведіть через точки E , F , D прямі, паралельні CG . 8.13. *Порада*. Проведіть через точки M і D прямі, паралельні BN . 8.14. 1 : 2. *Порада*. Проведіть через точку D пряму, паралельну BM . 8.16. 10 см і 14 см. 8.17. $17,9$ м². 8.18. *Порада*. Візьміть до уваги, що сума кутів неопуклого чотирикутника $APBC$ дорівнює 360° .

§ 9

9.14. 40 см, 30 см, 50 см. 9.15. 16 см, 36 см, 28 см. 9.16. 12 см і 18 см або 12 см і 8 см. 9.17. 26 см. 9.18. 20 см. 9.22. $4a$ см. 9.23. 5 см. 9.25. 6 см. 9.26. 12 см. 9.28. 28 см. 9.29. 1) $a - b$; 2) $3a - b$; 3) $a = 3b$. 9.30. 600 000 м³. 9.31. Ні.

§ 10

10.7. Кравець. 10.15. 21 см і 25,5 см. 10.16. $BC = 4$ см, $AD = 20$ см. 10.17. 7 см. 10.18. 10 см. 10.19. 3 см. 10.20. 13 см. 10.21. 3 см, 4 см, 3 см. 10.22. 14 см і 30 см. 10.23. 9 см. 10.24. 44 см. 10.25. 32 см. 10.27. $4a$ см. 10.28. 10 см. 10.29. 1) $m = 180t$; 2) на 1,5 год.

Вправи для повторення розділу 1

5. 60° , 70° , 110° , 120° . 12. Ні. 13. *Порада*. Доведіть, що $ABNM$ – паралелограм. 14. Три. 17. 4 см, 10 см. 23. 24 см. 24. 12 см, 16 см. 25. $\frac{a}{2}$ см. 26. 46 см або 38 см. 31. Усі сторони по $\frac{m}{4}$ см. 32. 100° і 80° . 33. 1) 30° , 150° ; 2) 15° . 39. Так. 40. Квадрат. 41. $2d$ см. 46. 80° , 100° . 48. m см. 49. 36 см. 50. $BC = 5$ см, $CD = 5$ см. 51. 19 см. 52. 72° і 108° .

53. Порада. Проведіть через одну з вершин меншої основи трапеції пряму, паралельну діагоналі, до перетину з прямою, що містить більшу основу. Побудуйте трикутник, дві сторони якого – діагоналі трапеції, а третя – сума основ. Добудуйте цей трикутник до шуканої трапеції. **54.** 36 см. **58.** 30° . **59.** 60° , 80° , 120° , 100° . **60.** 62° . **61.** 6а см. **72.** 10 см і 14 см. **73.** 36 см, 18 см. **75.** Квадрат, $P = 2d$ (см). **79.** 18 см, 16 см, 14 см. **80.** 12 см і 24 см. **81.** 6 см і 30 см. **82.** 5 : 2. **84.** $\left(a - \frac{c}{2}\right)$ см.

Розділ 2

§ 11

11.10. $OB = 6$, $BD = 9$. **11.11.** $OA = 2,5$, $AC = 3,5$. **11.12.** 2 : 3. **Порада.** Проведіть через точку P пряму, паралельну CM . **11.13.** 5 : 6. **Порада.** Проведіть через точку D пряму, паралельну BM . **11.14.** 16 см. **11.15.** 3 : 4. **11.19.** 1) 24 000 л. **11.20.** 9.

§ 12

12.9. В'язовська. **12.10.** 1) 10 см, 12 см; 2) 15 см, 18 см, 27 см; 3) 25 см, 30 см, 45 см. **12.12.** 4 см, 6 см, 8 см і 6 см, 9 см, 12 см. **12.13.** 12 см, 16 см, 20 см і 9 см, 12 см, 15 см. **12.17.** 4 робітники. **12.18.** Ні.

§ 13

13.21. 1,5 м. **13.24.** Так. **13.25.** Так. **13.28.** $AD = 28$ см, $BC = 16$ см. **13.29.** $BO = 2,5$ см, $OD = 5,5$ см. **13.30.** 1) Так; 2) так; 3) 3 см. **13.31.** $3\frac{1}{3}$ см. **13.32.** 24 см. **13.33.** 15 м. **13.34.** $\triangle ABC \sim \triangle BDC$. **13.35.** $\triangle ABC \sim \triangle DBA$. **13.36.** 20 см, 35 см, 35 см або 42 см, 24 см, 24 см. **13.37.** 30 см, 48 см, 48 см або 35 см, 35 см, 56 см. **13.40.** 9 см. **13.41.** 3 см. **13.42.** $\frac{ab}{a+b}$ см. **13.43.** 7,5 см і 4,5 см. **13.44.** 5 см і 10 см. **13.45.** 6 см. **13.46.** 4,2 см. **13.49.** $2a$ см. **13.51.** 1,2 м. **13.52.** Так; 15° .

§ 14

14.14. 24 см. **14.15.** 24 см. **14.16.** 30 см і 40 см. **14.17.** 12 см. **14.18.** 2 см. **14.19.** 3 см. **14.20.** 6 см. **14.21.** 12 см. **14.22.** 36 см. **14.24.** Так. **14.26.** 320 кг.

§ 15

15.6. 7 см. **15.7.** 9 см. **15.8.** $BL = 10$ см, $LC = 8$ см. **15.9.** 21 см. **15.10.** 90 см. **15.11.** 36 см. **15.12.** 10 см і 14 см. **15.13.** $AL = 12$ см, $LB = 8$ см. **15.14.** b і $a - b$. **15.15.** Ні. **15.16.** **Порада.** Доведіть, що $\triangle CHB \sim \triangle AHC$. **15.17.** 48 мішків.

§ 16

16.9. 15 см. 16.10. 9 см. 16.11. 9 м. 16.12. 2 м. 16.13. 42 м.
 16.14. 20 см. 16.15. 16 см. 16.16. 8 см. 16.17. 6 см. 16.18. 5 см.
 16.19. 26 см. 16.20. 26 см. 16.21. 10 см. *Порада.* Використайте формулу $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL$ із приклада 2, § 16. 16.26. 12 см, 16 см, 24 см. 16.27. $\frac{a^2 - b^2}{4}$. 16.28. 1) 17,28 м²; 2) $\approx 3,456$ кг фарби; по одній банці 1 кг і 2,5 кг. 16.30. 1) Ні; 2) ні.

Вправи для повторення розділу 2

4. 9 : 4. *Порада.* Проведіть через точку E пряму, паралельну AD .
 7. 1) 52 см; 2) 65 см. 8. Так. 16. 15 см. 19. 30 см. 24. $BM = 20$ см, $P = 80$ см. 25. 70 см. 26. 16 см і 12 см. 27. 13 см і 5 см. 30. 42 см.
 31. 14 см і 16 см. 32. $\angle ACD < \angle BCD$. 33. 36 см, 36 см, 18 см.
 37. $AK = 5$ см, $AP = 20$ см, $KP = 15$ см. 38. $8\frac{2}{3}$ см. 39. $AB = 6$ см, $BC = 7,5$ см.

Розділ 3

§ 17

17.7. 17 м. 17.8. 2,4 м. 17.26. $\sqrt{11}$ см або $\sqrt{61}$ см. 17.27. $\sqrt{21}$ см або $\sqrt{29}$ см. 17.28. 10 м. 17.29. 8 м. 17.30. 112 см. 17.31. 80 см. 17.32. 20; 16; $\sqrt{14}$; 13. 17.33. 6; 10. 17.34. 24 см. 17.35. 30 см. 17.36. 28 см.
 17.37. 11 см. 17.38. $\sqrt{26}$ см. 17.39. $\sqrt{50}$ см. 17.40. 3 см і $\sqrt{73}$ см.
 17.41. $\sqrt{1850}$ см = $5\sqrt{74}$ см. 17.42. $\sqrt{468}$ см = $6\sqrt{13}$ см. 17.45. 90 см.
 17.46. 84 см. 17.47. 30 см. 17.48. 5 см. 17.50. 162 см. 17.51. 20 см.
 17.52. 6 см. 17.53. 40 см. 17.54. 60°; 60°; 120°; 120°. 17.58. 3 банки.
 17.59. Так.

§ 18

18.13. 17 см або 3 см. 18.14. 21 см або 9 см. 18.15. 30°. 18.16. 45°.
 18.17. 12 см. 18.18. 10 см. 18.19. 2 см; 10 см; $\sqrt{96}$ см = $4\sqrt{6}$ см.
 18.20. 5 см; 7 см; $\sqrt{24}$ см = $2\sqrt{6}$ см. 18.21. 6,6 см; 8,4 см. 18.22. 3,4 см; 21,6 см. 18.23. 90°. 18.24. 10 см. 18.25. 4 см. 18.27. 1) 90°; 30°; 60°; 2) 90°; 45°; 45°. 18.28. 1) 90 млн м³; 2) 3600 млн м³. 18.29. 11 ярдів.

§ 19

19.21. $2a(1 + \operatorname{tg} \beta)$. 19.22. $\frac{b^2}{\operatorname{tg} \alpha}$. 19.23. 15,63 см. 19.24. 12,43 см.
 19.25. $c \sin \alpha \cos \alpha$. 19.26. $\frac{h}{\sin \beta \cos \beta}$. 19.27. 39° і 51°. 19.28. 61° і 29°.
 19.29. 1) $AB = 10$ см; $BC = 8$ см; 2) $AC = 12$ см; $BC = 5$ см. 19.30. 1) $AB = 5$ см;

$BC = 3$ см; 2) $AC = 16$ см; $BC = 30$ см. **19.31.** $\frac{a-b}{\cos \alpha}$. **19.32.** $BC = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta}$;
 $CK = \frac{b \cos \gamma}{\operatorname{tg} \beta}$; $BK = \frac{b \sin \gamma}{\operatorname{tg} \beta}$. **19.33.** $BC = \frac{a}{\sin \alpha}$; $AC = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha}$; $AB = \frac{a}{\sin \alpha \cos \beta}$.
19.34. $41^\circ 36'$. **19.35.** $79^\circ 36'$ і $100^\circ 24'$. **19.36.** $m \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. **19.37.** $\frac{r}{\cos \beta \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$.
19.38. $10(\sqrt{2} - 1)$ см. **19.39.** $4\sqrt{3}$ см. **19.40.** $5(\sqrt{3} + 1)$ см. **19.41.** $4(3 - \sqrt{3})$ см.
19.43. 48 см. **19.45.** 3° .

§ 20

20.8. 31,9 м. **20.9.** 27,5 м. **20.11.** 1) $AB = 8$ см, $\angle B = 30^\circ$, $\angle A = 60^\circ$;
 2) $AB = 17$ дм, $\angle B \approx 28^\circ 4'$, $\angle A \approx 61^\circ 56'$; 3) $AB = 3\sqrt{10}$ см $\approx 9,49$ см,
 $\angle A \approx 71^\circ 34'$, $\angle B \approx 18^\circ 26'$; 4) $AB = 25$ м дм, $\angle A \approx 73^\circ 44'$, $\angle B \approx 16^\circ 16'$.
20.12. 1) $AB = 4$ см, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$; 2) $AB = 10$ см, $\angle A \approx 36^\circ 52'$,
 $\angle B \approx 53^\circ 8'$; 3) $AB = \sqrt{29}$ дм $\approx 5,39$ дм, $\angle A \approx 68^\circ 12'$, $\angle B \approx 21^\circ 48'$;
 4) $AB = 41$ к дм, $\angle A \approx 77^\circ 19'$, $\angle B \approx 12^\circ 41'$. **20.13.** 1) $BC = 3$ см, $\angle A = 30^\circ$,
 $\angle B = 60^\circ$; 2) $AC = 63$ дм, $\angle A \approx 14^\circ 15'$, $\angle B \approx 75^\circ 45'$; 3) $BC =$
 $= \sqrt{33}$ см $\approx 5,74$ см, $\angle A \approx 55^\circ 9'$, $\angle B \approx 34^\circ 51'$; 4) $AC = 12$ а см, $\angle A \approx 22^\circ 37'$,
 $\angle B \approx 67^\circ 23'$. **20.14.** 1) $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle A = \angle B = 45^\circ$; 2) $AC = 35$ дм,
 $\angle A \approx 18^\circ 55'$, $\angle B \approx 71^\circ 5'$; 3) $BC = \sqrt{51}$ см $\approx 7,14$ см, $\angle A \approx 45^\circ 34'$,
 $\angle B \approx 44^\circ 26'$; 4) $AC = 11$ б дм, $\angle A \approx 79^\circ 37'$, $\angle B \approx 10^\circ 23'$. **20.15.** $62^\circ 32'$.
20.16. $\alpha \approx 1^\circ 9'$. **20.17.** $\approx 4,29$ м. **20.18.** $x = \frac{l}{2}$ м. **20.20.** 36 см. **20.21.** 42 см.
20.22. 15 учнів. **20.23.** 18 прямих; 28 прямих.

Вправи для повторення розділу 3

7. 52 см. **8.** 6 см; $\sqrt{244}$ см $= 2\sqrt{61}$ см. **9.** 72 см. **10.** 32 см. **11.** 78 см.
12. 105° . **13.** 90° . **14.** 120 см. **18.** 7 см або 1 см. **19.** 26 см; 30 см; 24 см.
20. 3,2 см. **24.** $4R(\sin \alpha + \cos \alpha)$. **25.** 31,11 см. **26.** $CK = b \sin \alpha$;

$KB = b \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$. **27.** 50 см. **28.** $r \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right)$. **29.** $\sqrt{3}$ см; $2\sqrt{43}$ см; $2\sqrt{31}$ см.
30. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ см або $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ см. **34.** $\frac{a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$.

Розділ 4

§ 21

21.13. 140° . **21.14.** 120° . **21.17.** Ні. **21.18.** Ні. **21.19.** 72° , 96° , 120° ,
 120° , 144° , 168° . **21.20.** 88° , 98° , 108° , 118° , 128° . **21.21.** 1) Так, 8 сто-
 рін, 20 діагоналей; 2) ні. **21.22.** 1) Ні; 2) так, 9 вершин, 27 діагоналей.

21.23. 12. 21.24. Чотирикутник. 21.25. Так, це п'ятикутник. 21.26. 12. 21.27. 15. 21.28. Периметри рівні. 21.30. $\frac{P}{4}$ см. 21.33. 8330 грн.

§ 22

22.13. 60 см^2 . 22.14. 120 см^2 . 22.15. 1) 32 см^2 ; 2) $\frac{1}{2}d^2$. 22.16. 16 см^2 . 22.17. 6 см. 22.18. 10 см. 22.19. 3) Збільшиться в 16 разів; 4) збільшиться в 10 разів; 5) збільшиться в 6 разів. 22.21. Ні. 22.22. 1) Так; 2) ні; 3) так. 22.23. 8 см. 22.24. 10 дм. 22.25. 208. 22.26. $4r^2$. 22.27. 9 см і 12 см. 22.28. 20 см. 22.29. 24 см^2 . 22.30. 84 см^2 . 22.31. 108 см^2 . 22.32. 168 см^2 . 22.34. $\sqrt{5}$. 22.35. 9. 22.36. Так. 22.39. 7400. 22.40. 8.

§ 23

23.11. 2,4 см. 23.12. 10 см. 23.13. 60 см^2 . 23.14. 8 см^2 . 23.15. 6 см. 23.16. 15 см. 23.17. $\frac{P^2}{32} \text{ см}^2$. 23.18. 72 см^2 . 23.19. 12 см^2 . 23.20. 96 см^2 . 23.21. 1) Ні; 2), 3) так. 23.22. 8 см або 4,5 см. 23.23. На 3 вершини. 23.24. 15 см^2 . 23.26. $\approx 70,8 \text{ см}$. 23.27. 18.

§ 24

24.11. 16 см^2 . 24.12. 36 см^2 . 24.13. 1) 40 см^2 ; 2) $\frac{d_1 d_2}{2}$. 24.14. 36 см^2 . 24.15. 15 см^2 ; 30 см^2 . 24.16. 8 см. 24.17. 12 см. 24.18. 4 см^2 і 8 см^2 . 24.19. 5 см^2 і 15 см^2 . 24.21. $7,5 \text{ см}^2$. 24.22. 40 см^2 . 24.23. 4,8 см. 24.24. 6,72 см. 24.25. 54 см^2 . 24.26. 60 см^2 . 24.27. 1) і 2) Так; 3) ні. 24.28. 1 : 2. 24.29. 1 : 4. 24.31. 128 см^2 . 24.33. 192,72 кг. 24.34. 25 кроків.

§ 25

25.15. 64 см^2 . 25.16. 45 см^2 . 25.17. 3 см і 9 см. 25.18. 5 см і 20 см. 25.19. $\frac{(a+b)c}{4}$. 25.20. 54 см^2 . 25.21. 24 см^2 . 25.22. 40 см^2 . 25.23. 80 см^2 . 25.24. 1080 см^2 . 25.25. 156 см^2 . 25.26. 30 см^2 . 25.27. $62,5 \text{ см}^2$. 25.28. $181,5 \text{ см}^2$. 25.29. $h^2 \text{ см}^2$. 25.30. 49 см^2 . 25.31. 18 см^2 . 25.35. 10,5 кг. 25.36. 50 см. *Порада.* Потрібно розглянути два випадки розташування квадратів.

Вправи для повторення розділу 4

3. По 108° . 4. 20. 5. 8. 6. Збільшиться на 360° . 7. $k = 2$. 11. 1) $\frac{P^2}{16} \text{ см}^2$; 2) $4\sqrt{S} \text{ см}$; 3) 4. 13. 144. 14. 36 см^2 або 45 см^2 . 15. mn . 18. 10 см^2 . 19. 1) Так; 2) ні. 20. Квадрат, у 2 рази. 21. 16 см^2 . 22. 320 см^2 . 24. 6 см. 25. 6 см^2 . 31. $\frac{3a^2}{2} \text{ см}^2$. 32. $\frac{3b^2}{2} \text{ см}^2$. 33. У 3 рази. 34. 80 см^2 .

Задачі підвищеної складності

3. 60° ; 120° . 5. Ромб. 6. 120° . 7. 90° . 9. Кожна з діагоналей дорівнює $a - b$. 11. $BP = DM$. 13. 40 см. 14. 140° , 40° , 140° . 15. $\frac{a-b}{2}$. 16. 53° .

17. A, H_3, H, H_2 ; B, H_3, H, H_1 ; C, H_1, H, H_2 ; A, H_3, H_1, C ; A, H_2, H_1, B ; B, H_3, H_2, C . 19. Порада. Довести, що $BN \cdot DM = AB \cdot AD$. 20. $\sqrt{ab}$.

21. 1) 21 см, або 28 см, або 24 см; 2) 21 см або 27 см; 3) 21 см. Порада. Нехай AB – найбільша сторона трикутника. Пряма, що відтинає трикутник, подібний даному, може перетинати або сторону BC , або сторону AC , причому слід окремо розглянути випадок, коли ця пряма паралельна одній зі сторін трикутника. 22. Необхідно побудувати коло, що проходить через точки B і C та дотикається до AB у точці B . Це коло перетне AC у шуканій точці D . 23. 12,5 см. Порада. Через вершину C проведіть пряму, паралельну BD , що перетинає продов-

ження AD у точці M , $\triangle ACM$ – прямокутний. 25. $2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$. Порада.

Нехай MA і MB перпендикуляри, проведені до прямих, що містять сторони заданого кута, а C – точка перетину AM і OB . Розгляньте трикутники BMC і OAC . 28. $12m$. 29. Доведіть, що $(c+h)^2 = (a+b)^2 + h^2$.

30. $\frac{ac}{b}$. 31. 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Порада. Розгляньте рівнобедрений

прямокутний трикутник ABD ($\angle D = 90^\circ$) і прямокутний трикутник BDC ($\angle D = 90^\circ$), у якого $\angle DBC = 30^\circ$. Точки A, D, C лежать на одній прямій. Тоді $\angle ABC = 75^\circ$. 32. 1) Так; 2) ні. 33. 6. 36. У 3 рази.

38. 54 см^2 . 39. $\frac{5}{9}S$. 40. $(m+n)d$. 41. cd . Порада. Доведіть, що

$$S_{KCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \quad 42. \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ завдання \ № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	Б	В	В	А	Г	Б	Г	В	В	Б	Б	Г	1–В, 2–Г, 3–А
2	Б	В	Б	Г	Б	А	В	Г	В	Б	А	Г	1–Г, 2–В, 3–А
3	Б	Г	В	В	Б	А	Г	Б	А	В	В	А	1–Г, 2–А, 3–В
4	Б	Б	А	Б	Г	В	Б	Б	Г	В	А	В	1–В, 2–Б, 3–Г
5	Б	В	А	Г	В	Г	Б	А	В	Г	Б	В	1–В, 2–Г, 3–Б

Відповіді до завдань додатка 1
«Готуємося до ЗНО (НМТ)»

Тема	Чотирикутники			Подібність трикутників		Розв'язування прямокутних трикутників			Многокутники. Площі многокутників				
№ задачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Відповідь	Б	В	13	Б	15	Д	42	18	Д	24	128	4	864

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Бічні сторони трапеції** 42
- Вершини многокутника** 156
- – несусідні 156
 - – сусідні 156
- Вершини чотирикутника** 13
- – протилежні 13
 - – сусідні 13
- Висота паралелограма** 19
- трапеції 42
- Відношення відрізків** 78
- Властивість бісектриси трикутника** 98
- кутів вписаного чотирикутника 48
 - медіан трикутника 58
 - середньої лінії трапеції 61
 - – – трикутника 56
 - сторін описаного чотирикутника 50
- Властивості квадрата** 36
- паралелограма 18, 19
 - перпендикуляра та похилої 129, 130
 - прямокутника 26
 - рівнобічної трапеції 43
 - ромба 31
 - трапеції 42
- Внутрішній кут многокутника** 158
- Внутрішня область многокутника** 161
- Вписаний чотирикутник** 48
- Діагоналі многокутника** 156
- чотирикутника 13
- Єгипетський трикутник** 122
- Зовнішній кут многокутника** 158
- Квадрат** 35
- Коефіцієнт подібності трикутників** 82
- Коло, вписане в многокутник** 158
- , – в чотирикутник 50
 - , описане навколо многокутника 158
 - , – навколо чотирикутника 48
- Косинус гострого кута прямокутного трикутника** 134
- Кути чотирикутника** 13
- – протилежні 13
 - – сусідні 13
- Многокутник** 156
- , вписаний у коло 158
 - неопуклий 157
 - , описаний навколо кола 158
 - опуклий 157
- Одиничний квадрат** 161
- Ознака вписаного чотирикутника** 49
- описаного чотирикутника 51
- Ознаки квадрата** 36
- паралелограма 20
 - подібних трикутників 86–88
 - прямокутника 27
 - рівнобічної трапеції 44
 - ромба 32
- Описаний чотирикутник** 50
- Ортоцентр трикутника** 24
- Основа перпендикуляра** 129
- похилої 129
- Основи трапеції** 42
- Основні властивості площі** 161
- Паралелограм** 18
- Периметр многокутника** 156
- чотирикутника 13
- Перпендикуляр** 129
- Піфагорові трикутники** 122
- трійки чисел 122
- Площа** 161
- квадрата 162
 - паралелограма 166
 - прямокутника 162
 - трапеції 175
 - трикутника 170
- Подібні трикутники** 82
- Похила** 129
- Проекція похилої** 129
- Пропорційність відрізків хорд** 101
- січної і дотичної 103
- Прямокутник** 26
- Розв'язування трикутників** 141
- прямокутних трикутників 141
 - – – за гіпотенузою і гострим кутом 142

– – – за двома катетами 142
– – – за катетом і гіпотенузою 143
– – – за катетом і гострим кутом 142
Ромб 31

Середній пропорційний відрізок 95

Середня лінія трапеції 61

– – трикутника 56

Синус гострого кута прямокутного трикутника 134

Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника 135

Сторони многокутника 156

– – несусідні 156

– – сусідні 156

Сторони чотирикутника 13

– протилежні 13

– сусідні 13

Тангенс гострого кута прямокутного трикутника 134

Теорема, обернена до теореми Піфагора 122

– Піфагора 120

– про середні пропорційні відрізки 95

– – суму кутів опуклого n -кутника 157

– – – чотирикутника 14

– Фалеса 53

– – узагальнена 78

Трапеція 42

– прямокутна 42

– рівнобічна 43

Формула бісектриси трикутника 102

Центроїд трикутника 58

Четвертий пропорційний відрізок 80

Чотирикутник 13

– неопуклий 14

– опуклий 14

ЗМІСТ

<i>Шановні восьмикласниці та восьмикласники!</i>	3
<i>Шановні вчительки та вчителі!</i>	4
<i>Шановні дорослі!</i>	5
Повторюємо геометрію за 7 клас	6

Розділ 1. Чотирикутники

§ 1. Чотирикутник, його елементи. Сума кутів чотирикутника	13
§ 2. Паралелограм, його властивості й ознаки	18
§ 3. Прямокутник і його властивості	26
§ 4. Ромб і його властивості	31
§ 5. Квадрат і його властивості	35
<i>Домашня самостійна робота № 1 (§§ 1–5)</i>	40
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 1–5</i>	41
§ 6. Трапеція	42
§ 7. Вписані та описані чотирикутники	48
§ 8. Теорема Фалéса	53
§ 9. Середня лінія трикутника, її властивість	56
§ 10. Середня лінія трапеції, її властивість	61
<i>Домашня самостійна робота № 2 (§§ 6–10)</i>	65
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 6–10</i>	66
Вправи для повторення розділу 1	67
Головне в розділі 1	73

Розділ 2. Подібність трикутників

§ 11. Узагальнена теорема Фалеса	78
§ 12. Подібні трикутники	82
§ 13. Ознаки подібності трикутників	85
§ 14. Середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику	94
§ 15. Властивість бісектриси трикутника	98
§ 16. Застосування подібності трикутників до розв'язування задач	101
<i>Домашня самостійна робота № 3 (§§ 11–16)</i>	108
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 11–16</i>	109
Вправи для повторення розділу 2	110
Головне в розділі 2	114
<i>Найвеличніший геометр XX століття</i>	117

Розділ 3. Розв'язування прямокутних трикутників

§ 17. Теорема Піфагора	120
§ 18. Перпендикуляр і похила, їхні властивості	129

§ 19. Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника	133
§ 20. Розв'язування прямокутних трикутників	141
<i>Домашня самостійна робота № 4 (§§ 17–20)</i>	147
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 17–20</i>	149
Вправи для повторення розділу 3	150
Головне в розділі 3	153

Розділ 4. Многокутники. Площі многокутників

§ 21. Многокутник і його елементи. Сума кутів опуклого многокутника. Многокутник, вписаний у коло, і многокутник, описаний навколо кола	156
§ 22. Поняття площі многокутника. Площа прямокутника	161
§ 23. Площа паралелограма	166
§ 24. Площа трикутника	170
§ 25. Площа трапеції	175
<i>Домашня самостійна робота № 5 (§§ 21–25)</i>	179
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 21–25</i>	181
Вправи для повторення розділу 4	181
Головне в розділі 4	184
Завдання для перевірки знань за курс геометрії 8 класу	186
Вона вважала, що справедливість важливіша	186
Задачі підвищеної складності	189
Європейська математична олімпіада для дівчат	192
<i>Додаток 1. Готуємося до ЗНО (НМТ)</i>	193
<i>Додаток 2. Теорема про площу прямокутника</i>	195
Відомості з курсу геометрії 7 класу	197
<i>Відповіді та поради до вправ</i>	204
<i>Предметний покажчик</i>	212

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

**Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти**

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

У підручнику використано ілюстративний матеріал з відкритих джерел інтернету, зокрема сайтів *vecteezy.com*, *depositphotos.com*. Усі матеріали в підручнику використано з навчальною метою відповідно до законодавства України про авторське право і суміжні права.

**Редактор Олена Мовчан
Обкладинка Олександра Павленка
Художнє оформлення, ілюстрації Василя Марущинця
Комп'ютерна верстка Юрія Лебедєва
Коректор Інна Борік**

Формат 70×100/16.
Ум. друк. арк. 17,55. Обл.-вид. арк. 14,82.
Тираж _____ пр. Вид. № _____.
Зам. № _____

ТОВ «Генеза»,
вул. Генерала Алмазова, 18/7 (літ. В), офіс 404, м. Київ, 01133, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 7692 від 24.10.2022.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ»,
вул. Максиміліанівська, 17, м. Харків, 61024, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 6847 від 19.07.2019.