

ГЕНЕЗА

НОВА УКРАЇНЬСЬКА ШКОЛА

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРОВАНІЙ КУРС

ЧАСТИНА 1



Олександр Семенович Істер

МАТЕМАТИКА

(ІНТЕГРОВАНІЙ КУРС)

Частина 1

Навчальний посібник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти, які беруть участь
в інноваційному освітньому проєкті всеукраїнського
рівня за темою «Розроблення і впровадження
навчально-методичного забезпечення для закладів
загальної середньої освіти в умовах реалізації
Державного стандарту базової середньої освіти»
у 2024/2025 навчальному році

Схвалено для використання в освітньому процесі

Київ

«Генеза»

2024

Схвалено для використання в освітньому процесі
(Протокол № 7 засідання експертної комісії з математики від 19.08.2024 року)

Відповідає модельній навчальній програмі
«Математика (інтегрований курс). 7–9 класи»
для закладів загальної середньої освіти
(автор: *Істер О. С.*)

Переглянути електронний додаток до навчального посібника можна за
посиланням <https://cutt.ly/Zeb5gwcU>

або QR-кодом



Шановні восьмикласниці та восьмикласники!

Продовжуємо вивчати курс математики, який міститиме дві складові частини – *алгебру* і *геометрію*. Допоможе вам у цьому навчальний посібник, який ви тримаєте в руках.

У навчальному посібнику використано такі умовні позначення:



– пригадай (раніше вивчене);



– зверни особливу увагу;



– запитання і завдання до теоретичного матеріалу;

1.13

– завдання для класної та 1.15 – домашньої роботи;



– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв'язування інших задач);



– рубрика «Україна – це ми»;



– рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;



– рубрика «Життєва математика»;



– вправи для підготовки до вивчення нової теми;



– вправи для повторення;



– рубрика «Головне в темі».

Текст, надрукований **жирним** шрифтом, звертає вашу увагу на нове поняття або таке, яке треба пригадати.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки **1** починаються вправи початкового рівня;

з позначки **2** починаються вправи середнього рівня;

з позначки **3** починаються вправи достатнього рівня;

з позначки **4** починаються вправи високого рівня;

з позначки ***** починаються вправи підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Після кожної теми наведено вправи для її повторення, основний теоретичний матеріал (рубрика «Головне в темі»), а в кінці навчального посібника – «Завдання для перевірки знань за курс математики 8 класу». «Задачі підвищеної складності» допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики.

Автор намагався подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно опрацювати вдома.

Навчальний посібник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У рубриці «*Життєва математика*» зібрано задачі, які часто доводиться розв'язувати в повсякденному житті.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів та розвитку математики як науки ви знайдете в рубриці «*А ще раніше...*».

Бажаємо успіхів в опануванні математики!

Шановні вчительки та вчителі!

Пропонований навчальний посібник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках, факультативних, індивідуальних, додаткових заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів/учениць, диференціації навчання тощо.

Додаткові вправи в «*Завданнях для перевірки знань*» призначено для учнів/учениць, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Чи правильно їх розв'язано, учитель/вчителька може оцінити окремо.

Вправи для повторення тем можна запропонувати учням/ученицям, наприклад, під час узагальнювальних уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

У рубриці «*Життєва математика*» зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, економічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, а в рубриці «*Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу*» – задачі, що допоможуть актуалізувати відповідні знання.

«*Задачі підвищеної складності*», які розміщено в кінці навчального посібника, допоможуть підготувати учнів/учениць до різноманітних математичних змагань і підвищити їхню цікавість до математики.

«*Завдання для перевірки знань за курс математики 8 класу*», які також розміщено в кінці навчального посібника, можна запропонувати учням/ученицям для підготовки до річної контрольної роботи.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати матеріал цих уроків за навчальним посібником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою, проі-

люстровано значною кількістю прикладів. Після цього потрібно розв'язати вправи, що посилені, з розглянутого параграфа.

Упродовж курсу математики 8 класу, який опрацьовує дитина, ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Якщо ваша дитина виявляє підвищену цікавість до математики та бажає поглибити свої знання, зверніть увагу на *«Задачі підвищеної складності»*, які розміщено в кінці навчального посібника.

ПОВТОРЮЄМО АЛГЕБРУ ЗА 7 КЛАС

Лінійні рівняння з однією змінною

- 1** 1. (Усно.) Яке з рівнянь є лінійним рівнянням з однією змінною:
1) $12x = 0$; 2) $4x + 2y = 9$; 3) $7x = x^2$;
4) $0x = 12$; 5) $\frac{1}{x} - 7 = 0$; 6) $0x = 0$?
- 2** 2. Яке з чисел є коренем рівняння $x^2 - x = 2x + 4$:
1) 0; 2) -1; 3) 1;
4) 2; 5) 4; 6) -3?
3. Яке з чисел є коренем рівняння $x^2 - 3x = x + 5$:
1) 1; 2) 0; 3) -1;
4) 3; 5) 5; 6) -2?
4. Розв'яжіть рівняння:
1) $4x = -8$; 2) $9x - 13 = 3x + 5$; 3) $7 - (3x + 2) = 5$;
4) $-\frac{1}{8}x = -1\frac{1}{8}$; 5) $8 - 2x = -(4x + 3)$; 6) $3(x - 3) = 4x + 21$.
5. Розв'яжіть рівняння:
1) $-5x = -20$; 2) $7x - 11 = 2x + 1$; 3) $9 - (5x + 1) = 10$;
4) $2x = -1\frac{1}{5}$; 5) $7 - 3x = -(2x - 7)$; 6) $9(x - 1) = 8x + 13$.
6. Складіть лінійне рівняння, яке рівносильне рівнянню $9x + 36 = 0$.
7. У вазі тістечок утричі більше, ніж на тарілці. Скільки тістечок у вазі, якщо їх там на 12 більше, ніж на тарілці?
8. За два тижні магазин електроніки продав 48 ноутбуків, причому першого тижня було продано на 6 ноутбуків більше, ніж другого. Скільки ноутбуків продали другого тижня?
9. За 2 год велосипедистка долає ту саму відстань, що й пішохід за 5 год. Швидкість пішохода на 9 км/год менша від швидкості велосипедистки. Знайдіть швидкість кожного.
- 10** 10. Ящик з яблуками на 8 кг важчий за ящик зі сливами. Яка маса кожного ящика, якщо маса двох ящиків з яблуками така сама, як і маса трьох ящиків зі сливами?
- 3** 11. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-5}{3} = \frac{5x+1}{9}$ і $7(y+3) - 9(y-1) = 24$.
-  Знайдіть значення виразу $100x + 10y + 2$ та дізнайтеся рік заснування Національного університету «Києво-Могилянська академія».
- 12** 12. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-1}{3} = \frac{3+4x}{7}$ і $7(y-2) - 3(y+5) = 11$. Знайдіть значення виразу $200x + 11y$ та дізнайтеся рік прийняття першої Конституції Пилипа Орлика.

13. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $|x| - 2 = 9$; 2) $5 - |x| = 7$; 3) $|x - 2| = 3$;
 4) $|2x - 1| = 0$; 5) $|5x + 2| = 3$; 6) $\frac{1}{3}|x - 2| + 3 = 7$.

14. Одна сторона трикутника утричі менша від другої і на 12 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, периметр якого дорівнює 52 см.

15. В одному мішку на 6 кг борошна більше, ніж у другому, і вдвічі менше, ніж у третьому. Скільки кілограмів борошна у кожному мішку, якщо у трьох мішках разом 66 кг борошна?

16. За якого значення a рівняння $x + a = 9$ і $4x - a = 3x$ мають однакові корені?

17. За якого значення b рівняння $x - b = 7$ і $5x + b = 4x$ мають однакові корені?

Цілі вирази

18. Подайте у вигляді степеня:

- 1) c^3c^5 ; 2) m^9mm^{15} ; 3) $p^{12} : p^3$; 4) $(x^9)^7$.

19. Подайте у вигляді степеня:

- 1) p^7p^2 ; 2) tt^2t^3 ; 3) $c^{15} : c^5$; 4) $(a^3)^8$.

20. Виконайте множення:

- 1) $p(x - 2)$; 2) $-c(m - 4)$; 3) $x(c - 3 - d)$.

21. Виконайте множення:

- 1) $t(3 - c)$; 2) $-x(p - 2)$; 3) $a(t - b - 9)$.

22. Знайдіть значення виразу:

- 1) $(-3)^4$; 2) $(-6)^3$; 3) $0,1 \cdot 10^3$; 4) $(2,6 - 2,7)^2$.

23. Знайдіть значення виразу:

- 1) $(-2)^4$; 2) $(-5)^3$; 3) $0,2 \cdot 5^3$; 4) $(1,5 - 1,8)^2$.

24. Перетворіть вираз на многочлен:

- 1) $4a^2(3 - a)$; 2) $7(x - 2) - 2(x - 7)$;
 3) $(x - 5)(x + 3)$; 4) $-5c^2(8 - c^3 + c)$;
 5) $4(2x - 3) - (8x - 9)$; 6) $(2b - a)(a + b)$.

25. Перетворіть на многочлен вираз:

- 1) $7b^2(b - 3)$; 2) $4(b - 3) - 2(2b + 1)$;
 3) $(m + 2)(m - 4)$; 4) $-2x^3(4 - x^2 + x)$;
 5) $3(2c - 6) - (5c - 18)$; 6) $(3x + y)(x - y)$.

26. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) $(b - 6)^2$; 2) $(7x + 2)^2$; 3) $(4a - 1)^2 - 16a^2$;
 4) $(p - 3)(p + 3)$; 5) $(7 + x)(x - 7)$; 6) $(2y - 3)(2y + 3) + 9$.

27. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) $(c + 5)^2$; 2) $(8b - 3)^2$; 3) $(4x + 3)^2 - 9$;
 4) $(c + 2)(c - 2)$; 5) $(m - 9)(9 + m)$; 6) $(5p - 2)(5p + 2) - 25p^2$.

28. Розкладіть на множники:

- 1) $4a + 12b$; 2) $15ac - 20a$; 3) $a(c - x) + 9c - 9x$;
 4) $-7c^2 - 21c^5$; 5) $a^3 + a^7 - a^5$; 6) $5a + 5b - ay - yb$.

29. Розкладіть на множники:

- 1) $9x - 18y$; 2) $4xm + 6m$; 3) $m(x - p) + 3x - 3p$;
 4) $-2x^3 - 8x^5$; 5) $b^2 - b^5 + b^3$; 6) $7c + 7n - cx - xn$.

30. Знайдіть значення виразу, використовуючи властивості степенів:

- 1) $256 : 2^7 \cdot 8$; 2) $\frac{125 \cdot 5^7}{5^4 \cdot 625}$; 3) $0,5^9 \cdot 2^9$; 4) $\frac{27^8}{81^5}$.

31. Знайдіть значення виразу, використовуючи властивості степенів:

- 1) $3^9 : 81 : 27$; 2) $\frac{1000 \cdot 10^7}{10 \cdot 100^4}$; 3) $0,25^7 \cdot 4^7$; 4) $\frac{16^4}{8^5}$.

32. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:

- 1) $(x^2 - 3x)(x + 1) - x^2(x - 2)$; 2) $(2a - 3)^2 - (4a - 1)(a + 3)$.

33. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:

- 1) $m^2(m + 3) - (m^2 + 4m)(m - 1)$; 2) $(9x - 1)(x + 3) - (3x - 2)^2$.

34. Спростіть вираз $(9x - 1)(4x + 2) - (6x - 7)(6x + 7)$ та знайдіть його значення, якщо $x = -3$, відтак дізнаєтеся, скільки разів чоловіча збірна України із шахів ставала призером командного чемпіонату світу.

35. Спростіть вираз $(4a - 3)(4a + 3) - (8a - 7)(2a - 1)$ та знайдіть його

значення, якщо $a = 1\frac{1}{11}$, відтак дізнаєтеся, скільки разів жіноча збірна України із шахів ставала призером Всесвітніх шахових олімпіад.

36. Розкладіть многочлен на множники:

- 1) $6a^3 - 2a^2 - 12a$; 2) $x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 6$;
 3) $-4x^2 + 20x - 25$; 4) $0,36p^8 - c^{10}x^{12}$;
 5) $64m^3c^9 + t^{30}$; 6) $c^2 + 2cd + d^2 - 25$.

37. Розкладіть многочлен на множники:

- 1) $8p^4 - 4p^5 + 12p$; 2) $a^5 - 2a^2 - 3a^3 + 6$; 3) $-9m^2 - 6m - 1$;
 4) $0,49m^4 - t^{16}p^2$; 5) $125a^6 - b^9$; 6) $a^2 - 2ax + x^2 - 36$.

38. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $4x^2 - x = 0$; 2) $25x^2 + 10x + 1 = 0$; 3) $(x - 1)^2 - 4 = 0$.

39. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2x^2 + x = 0$; 2) $36x^2 - 12x + 1 = 0$; 3) $(x + 2)^2 - 9 = 0$.

40. Доведіть, що якщо n – натуральне число, то значення виразу $(2n - 3)(5n - 1) - 2n(5n - 12) + n$ є непарним числом.

41. Доведіть, що якщо m – натуральне число, то значення виразу $(3m + 2)(4m - 1) - 2m(6m - 7) + m$ є парним числом.

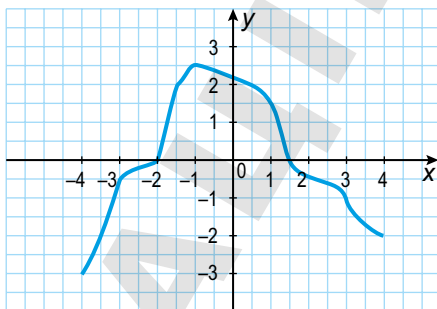
42. Виконайте множення $(m^2 - 2m + 3)(m^2 + m - 5)$.
43. Відомо, що $2xy^2 = 5$. Знайдіть значення виразу:
 1) xy^2 ; 2) $3xy^2$; 3) $-4x^2y^4$; 4) $8x^3y^6$.
44. Відомо, що $5ab^2 = 7$. Знайдіть значення виразу:
 1) ab^2 ; 2) $4ab^2$; 3) $-25a^2b^4$; 4) $125a^3b^6$.

Функції

- 1** 45. (Усно.) Які з поданих записів задають функцію? Укажіть для них незалежну змінну (аргумент) та залежну змінну:
- 1) $m = 2p - 9$; 2) $4x - 9 = 9 - 4x$; 3) $y = \frac{2x}{x-3}$;
 4) $36 : 9 - 4 = 0$; 5) $c = n^2 - n^3$; 6) $2x - 9 > 3$.
46. (Усно.) Чи є лінійною функція:
 1) $y = 2x^2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = 2$;
 4) $y = \frac{1}{2x-3}$; 5) $y = 2x - 3$; 6) $y = 2x^2 - 3$?
- 2** 47. Функцію задано формулою $y = 3 - 2x$. Знайдіть:
 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -4 ; $1,5$;
 2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює -7 ; 5 .
48. Функцію задано формулою $y = 4x - 5$. Знайдіть:
 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює $-1,5$; 6 ;
 2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює -9 ; 1 .
49. Знайдіть область визначення функції:
 1) $y = 3x - 6$; 2) $y = \frac{3x-6}{5}$; 3) $y = \frac{5}{3x-6}$; 4) $y = \frac{7}{x+6}$.
50. Знайдіть область визначення функції:
 1) $y = 2x + 4$; 2) $y = \frac{2x+4}{7}$; 3) $y = \frac{7}{2x+4}$; 4) $y = \frac{9}{x-4}$.
51. Не виконуючим побудови графіка, знайдіть нулі функції:
 1) $y = 7x$; 2) $y = 2x - 9$; 3) $y = -\frac{x}{7}$; 4) $y = \frac{x+9}{11}$.
52. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:
 1) $y = -4x$; 2) $y = 7 + 14x$; 3) $y = \frac{x}{5}$; 4) $y = \frac{x-4}{5}$.
53. Побудуйте графік лінійної функції:
 1) $y = x + 3$; 2) $y = 7 - 0,5x$;
 3) $y = -4x$; 4) $y = 2$.
54. Побудуйте графік лінійної функції:
 1) $y = 2 - x$; 2) $y = \frac{1}{3}x + 1$; 3) $y = 2x$; 4) $y = -3$.

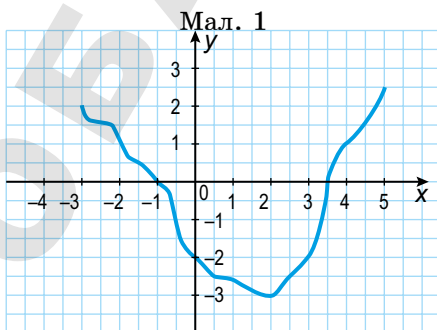
55. На малюнку 1 зображено графік функції, визначеної для $-4 \leq x \leq 4$. За графіком знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -3,5; -1; 0,5$;
- 2) значення x , якщо $y = -0,5; 2; 2,5$;
- 3) нулі функції;
- 4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;
- 5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.



56. На малюнку 2 зображено графік функції, визначеної для $-3 \leq x \leq 5$. За графіком знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -1; -0,5; 2,5$;
- 2) значення x , якщо $y = -3; -2; -1$;
- 3) нулі функції;
- 4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;
- 5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.



Мал. 2

57. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

- 1) $y = 0,5x - 4$; 2) $y = 16 - x^2$.

58. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

- 1) $y = 3 - 2x$; 2) $y = x^2 + 2x$.

4 59. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -3x, & \text{якщо } x \leq -1, \\ 4 + x, & \text{якщо } x > -1. \end{cases}$

60. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 4x, & \text{якщо } x < 1, \\ 5 - x, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

Системи лінійних рівнянь з двома змінними

1 61. (Усно.) Чи належить графіку рівняння $x + y = 7$ точка:

- 1) (6; 1); 2) (8; -2); 3) (1; -6); 4) (3; 4)?

62. (Усно.) Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$ пара чисел:

- 1) (4; 3); 2) (3; 2); 3) (4; 1)?

2 63. Побудуйте графік рівняння:

1) $x - y = 4$; 2) $0,5x + y = 1$; 3) $3x + 0y = -6$; 4) $6y = 18$.

64. Побудуйте графік рівняння:

1) $x + y = 3$; 2) $x - 0,5y = 2$; 3) $4x = 12$; 4) $0x + 2y = -8$.

65. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = -x, \\ y = 6 + x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2y = -6, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

66. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x, \\ y = 4 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + 2y = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 7x = 14, \\ x + 3y = 15. \end{cases}$

67. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x = 12, \\ 2x + 3y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = y - 2, \\ 4x - 3y = -5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + y = 3, \\ 4x + 5y = -7. \end{cases}$

68. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4y = -8, \\ 5x - 2y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x + 3, \\ 2x - 3y = -8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 5y = 4. \end{cases}$

69. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x + y = 2, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 2x - 4y = -13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x - 3y = 11, \\ 5x + 9y = 1. \end{cases}$

70. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 3y = 1, \\ -x + 4y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 5y = 11, \\ 4x - 5y = 13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x - 3y = 15, \\ 8x + 5y = 19. \end{cases}$

71. Два ящики з бананами і один із апельсинами важать 40 кг, а ящик з бананами і два ящики з апельсинами – 44 кг. Скільки важить один ящик з бананами і скільки – один ящик з апельсинами?

72. За 3 ручки і зошит заплатили 44 грн, а за ручку і 3 зошити – 68 грн. Скільки коштує одна ручка і скільки – один зошит?

3 73. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

1) $2x - 3y = 24$; 2) $0x + 5y = 15$; 3) $-4x = 12$.

74. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

1) $4x + 5y = 40$; 2) $2x + 0y = -16$; 3) $3y = 6$.

75. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2a + 3b = 0, \\ 4a - 5b = -22; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 5y = 1, \\ 3x + 10y = 42; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + 5y = 9, \\ 4x - 3y = -17. \end{cases}$

76. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2m - 3n = 7, \\ 5m + 6n = 4; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 8x + 5y = 24; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 5x - 3y = 18. \end{cases}$$

77. Човен за 2 год руху за течією і 3 год руху проти течії долає 88 км. За 4 год руху за течією човен долає таку саму відстань, що й за 5 год проти течії. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії.

4 78. Складіть рівняння прямої, графік якої проходить через точки $(-1; 11)$ і $(2; 5)$.

79. Графік лінійної функції проходить через точки $(-3; 2)$ і $(4; 23)$. Задайте цю функцію формулою.

80. За 4 циркулі й 3 лінійки заплатили 195 грн. Після того як циркуль подорожчав на 10 %, а лінійка подешевшала на 20 %, один циркуль і одна лінійка разом стали коштувати 53 грн. Якою була початкова вартість циркуля і якою – лінійки?

ТЕМА 1

ДРОБОВІ ВИРАЗИ. ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ ДРОБУ. ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** основну властивість звичайного дробу;
- **ознайомитеся** з поняттями раціонального виразу, раціонального дробу;
- **навчитися** скорочувати раціональні дроби та зводити їх до нового знаменника; додавати та віднімати дроби.

§ 1. Раціональні вирази. Раціональні дроби

1. Раціональні вирази



З 7 класу ви вже знаєте, що вирази, які не містять ділення на вираз зі змінною, наприклад: $5t^2p$; $4c^3 + t^9$; $(m - n)(m^2 + n^7)$; $k^9 - \frac{p+l}{4}$ – **цілі раціональні вирази**.

Будь-який цілий вираз можна подати у вигляді многочлена стандартного вигляду, наприклад:

$$(m - n)(m^2 + n^7) = m^3 + mn^7 - nm^2 - n^8;$$

$$k^9 - \frac{p+l}{4} = k^9 - \frac{1}{4}p - \frac{1}{4}l.$$

На відміну від цілих виразів, вирази

$$5t - \frac{3}{p}; \quad \frac{x+2}{y-9}; \quad \frac{1}{5}x - \frac{19}{m^2}; \quad \frac{a-b}{a^2+ab+b^2}; \quad \frac{1}{(x-y)(x^2+7)}$$

містять ділення на вираз зі змінною. Такі вирази називають **дробовими раціональними виразами**.

Цілі раціональні та дробові раціональні вирази називають **раціональними виразами**.

Раціональні вирази – це математичні вирази, які містять дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня.

2. Область визначення виразу

Цілий раціональний вираз має зміст для будь-яких значень змінних, що до нього входять, оскільки для знаходження його значення треба виконати дії додавання, віднімання і множення та ділення на число, відмінне від нуля, що завжди можливо.

Вираз вигляду $\frac{P}{Q}$, де P і Q – многочлени, називають **раціональним дробом**.

Розглянемо раціональний дріб $\frac{5}{x-3}$. Його значення можна знайти для будь-якого значення x , крім $x = 3$, оскільки для $x = 3$ знаменник дробу дорівнюватиме нулю. У такому випадку кажуть, що вираз $\frac{5}{x-3}$ має зміст для всіх значень змінної x , крім $x = 3$ (або для $x = 3$ вираз не має змісту).

Значення змінних, для яких вираз має зміст, називають **допустимими значеннями змінних** у виразі.

Ці значення утворюють **область визначення виразу**, або **область допустимих значень змінних** у виразі.

Приклад 1. Знайти допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{m-3}{9}$; 2) $\frac{5}{p+2}$; 3) $\frac{x+7}{x(x-9)}$; 4) $\frac{7}{|y|-3}$.

Розв'язання. 1) Вираз має зміст для будь-яких значень змінної m .

2) Допустимі значення змінної p – усі числа, крім числа -2 , оскільки це значення змінної перетворює знаменник дробу на нуль.

3) Знаменник дробу перетворюється на нуль, якщо $x = 0$ або $x = 9$. Тому допустимі значення змінної x – усі числа, крім чисел 0 і 9 .

4) Допустимі значення змінної y – усі числа, крім 3 і -3 .

Скорочено **відповіді** можна записати так:

1) m – будь-яке число; 2) $p \neq -2$; 3) $x \neq 0$; $x \neq 9$; 4) $y \neq 3$; $y \neq -3$.

3. Умова рівності дробу нулю

Розглянемо умову рівності дробу нулю. Оскільки $\frac{0}{Q} = 0$, якщо $Q \neq 0$, то

$$\frac{P}{Q} = 0 \text{ тоді і тільки тоді, коли } P = 0, \text{ а } Q \neq 0, \text{ тобто за умови } \begin{cases} P = 0, \\ Q \neq 0. \end{cases}$$

Приклад 2. Для яких значень змінної дорівнює нулю значення дробу:

1) $\frac{x-3}{x+1}$; 2) $\frac{(a-2)(a+1)}{a+5}$; 3) $\frac{b(b-7)}{b-7}$?

Розв'язання. 1) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $x = 3$, при цьому знаменник нулю не дорівнює. Тому число 3 є тим значенням змінної, за якого цей дріб дорівнює нулю.

2) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $a = 2$ або $a = -1$. Для кожного із цих значень знаменник дробу нулю не дорівнює. Тому числа 2 і -1 є тими значеннями змінної, для яких цей дріб дорівнює нулю.

3) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $b = 0$ або $b = 7$. Якщо $b = 0$, знаменник дробу нулю не дорівнює, а якщо $b = 7$, знаменник перетворюється на нуль, тобто дріб не має змісту. Отже, дріб дорівнює нулю лише при $b = 0$.

Відповідь: 1) $x = 3$; 2) $a = 2, a = -1$; 3) $b = 0$.

А ще раніше...

Давньогрецький математик Діофант (бл. III ст. н. е.) розглянув раціональні дробу та дії над ними у своїй праці «Арифметика». Зокрема, на сторінках цієї книжки можна зустріти доведення тотожностей

$$30 \cdot \frac{144}{x^4 + 900 - 60x^2} + \frac{60}{x^2 - 30} = \frac{60x^2 + 2520}{x^4 + 900 - 60x^2}$$

$$\text{та } \frac{96}{x^4 + 36 - 12x^2} - \frac{12}{6 - x^2} = \frac{12x^2 + 24}{x^4 + 36 - 12x^2},$$

які записано тодішньою символікою.

Видатний англійський учений Ісаак Ньютон (1643–1727) у своїй монографії «Універсальна арифметика» (1707 р.) означає дріб так: «Запис однієї з двох величин під іншою, нижче якої між ними проведено риску, означає частку або ж величину, що виникає при діленні верхньої величини на нижню». У цій роботі Ньютон розглядає не тільки звичайні дробу, а й раціональні.

? Які вирази називають цілими раціональними виразами, а які – дробовими раціональними виразами? Наведіть приклади таких виразів. **○** Які вирази називають раціональними виразами? **○** Що таке раціональний дріб? Наведіть приклади. **○** Що називають допустимими значеннями змінної? **○** Сформулюйте умову рівності дробу $\frac{P}{Q}$ нулю.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 1.1. (Усно.) Які з виразів є цілими, а які – дробовими:

1) $\frac{1}{7}m^3n$; 2) $\frac{a+1}{a}$; 3) $m^2 + 2m - 8$; 4) $\frac{b-2}{8}$;
5) $\frac{1}{x^2 + m^2}$; 6) $\frac{x+y-a}{10}$; 7) $(p-2)^2 + 7p$; 8) $a^2 + \frac{2}{a}$?

1.2. Серед раціональних виразів $a^3 - ab$; $\frac{m}{17}$; $\frac{17}{a}$; $t(t-1) + \frac{t}{p}$;

$\frac{1}{9}a - \frac{1}{8}b$; $\frac{7}{x^2 + 1} - 5$ знайдіть і випишіть ті, що є:

1) цілими; 2) дробовими.

1.3. Які з дробів є раціональними дробами:

1) $\frac{a}{a^2 - 3}$; 2) $\frac{m\left(n + \frac{1}{k}\right)}{p^2 - 2}$; 3) $\frac{x^2 - 4x + 5}{y^2 - 9}$; 4) $\frac{x}{\frac{x+2}{m-3}}$?

2 1.4. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{3a+9}{a^2}$, якщо $a = 1; -2; -3$; 2) $\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-2}$, якщо $x = 4; -1$.

1.5. Дізнайтеся прізвище видатного українського авіаконструктора.



Для цього знайдіть значення виразу з першої таблиці та перенесіть літери, що відповідають цим значенням, у другу таблицю. Користуючись будь-якими інформаційними джерелами, ознайомтеся з біографією цього авіаконструктора.

x	-3	-1	0	2	3
$\frac{1+x}{1-x}$					
Літери	Т	В	А	О	Н

1	-2	-0,5	-3	-2	-3	0



1.6. Складіть дріб:

1) чисельником якого є різниця змінних a і b , а знаменником – їх сума;

2) чисельником якого є добуток змінних x і y , а знаменником – сума їх квадратів.

1.7. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $m^2 - 5$; 2) $\frac{3a-5}{a}$; 3) $\frac{7b+9}{8}$; 4) $\frac{t-9}{t+1}$;
 5) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{2}{x-7}$; 6) $\frac{p+2}{p(p-1)}$; 7) $\frac{3}{x^2+1}$; 8) $\frac{1}{m} + \frac{1}{|m|+5}$.

1.8. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $p + 9$; 2) $\frac{a-7}{a+4}$; 3) $\frac{b-9}{4}$;
 4) $\frac{x^2-3}{x(x+2)}$; 5) $\frac{2y}{y-1} + \frac{3}{y+6}$; 6) $\frac{4}{m^2+2}$.

1.9. За t год автомобіль подолав 240 км. Складіть вираз для обчислення швидкості автомобіля (у км/год). Знайдіть значення цього виразу, якщо $t = 3$; 4.

1.10. Учениця витратила 48 грн для придбання n ручок. Складіть вираз для обчислення ціни ручки (у грн) та обчисліть його значення, якщо $n = 8$; 10.

3 1.11. Для якого значення змінної значення дробу $\frac{x+2}{8}$ дорівнює:

- 1) -2; 2) 9; 3) 0,01; 4) -4,9?

1.12. Для якого значення змінної значення дробу $\frac{m-1}{10}$ дорівнює:

- 1) -8; 2) 0,25?

1.13. Для якого значення x дорівнює нулю дріб:

- 1) $\frac{4x-8}{x}$; 2) $\frac{x(x+3)}{x^2}$; 3) $\frac{(x-1)(x+7)}{x+5}$; 4) $\frac{3x-6}{8-4x}$?

1.14. Для якого значення y дорівнює нулю дріб:

- 1) $\frac{y}{5y-7}$; 2) $\frac{(y+1)y}{y^7}$; 3) $\frac{(y+2)(y-3)}{y+4}$; 4) $\frac{y+1}{5y+5}$?

1.15. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

- 1) $\frac{a+1}{(a-1)(2a+7)}$; 2) $\frac{t+2}{t^2-7t}$; 3) $\frac{m}{m^2-25}$; 4) $\frac{5}{(x-9)^2}$.

1.16. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

- 1) $\frac{p-7}{(9-p)(4p+10)}$; 2) $\frac{a+2}{5a-a^2}$; 3) $\frac{c}{4-c^2}$; 4) $\frac{a}{(a+1)^2}$.

1.17. Складіть вираз зі змінною x , що мав би зміст для будь-яких значень x , крім:

- 1) $x = 2$;
2) $x = 1$ і $x = -4$.

4 1.18. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

- 1) $\frac{37}{a(a-2)-3a+6}$; 2) $\frac{x}{|x|-1}$; 3) $\frac{5m}{1-\frac{1}{m}}$; 4) $\frac{4k}{4-|k-2|}$.

1.19. Знайдіть область визначення виразу:

- 1) $\frac{12}{x(x+2)-4x-8}$; 2) $\frac{m}{4-|m|}$; 3) $\frac{7}{\frac{1}{x}+1}$; 4) $\frac{2a}{|a+2|-3}$.

1.20. Визначте знак дробу:

- 1) $\frac{x^7}{y^8}$, якщо $x > 0$, $y < 0$; 2) $\frac{m+1}{n^7}$, якщо $m > 0$, $n < 0$;
3) $\frac{|p-1|}{n^{19}}$, якщо $p < 0$, $n > 0$; 4) $\frac{|a|+1}{c^8}$, якщо $a < 0$, $c < 0$.

1.21. Доведіть, що для будь-якого значення змінної значення дробу:

1) $\frac{7}{a^2 + 1}$ є додатним;

2) $\frac{4}{-p^2 - 2}$ є від'ємним;

3) $\frac{(a + 1)^2}{a^2 + 7}$ є невід'ємним;

4) $\frac{-(p^2 - 4)^2}{p^4 + 1}$ є недодатним.



Вправи для повторення

1.22. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $(a^2 + 2a - 7) - (a^2 - 4a - 9)$;

2) $3x^2y(2x - 3y + 7)$;

3) $(x^2 - 2x)(x + 9)$;

4) $(x^2 - 5)^2 + 10x^2$.

1.23. Розв'яжіть рівняння $4x(2x - 7) + 3x(5 - 2x) = 2x^2 + 39$.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1.24. Скоротіть дріб:

1) $\frac{7}{14}$;

2) $\frac{25}{35}$;

3) $\frac{12}{18}$;

4) $\frac{30}{45}$;

5) $\frac{36}{48}$;

6) $\frac{51}{85}$.

1.25. Зведіть дріб:

1) $\frac{1}{8}$ до знаменника 24;

2) $\frac{2}{7}$ до знаменника 28;

3) $\frac{4}{15}$ до знаменника 30;

4) $\frac{8}{9}$ до знаменника 63.

1.26. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) m^3m^4 ;

2) pp^7 ;

3) $x^9 : x^3$;

4) $(a^3)^7$;

5) $b^2 \cdot (b^3)^4$;

6) $(c^4)^5 : c^{12}$.

1.27. На який вираз треба помножити одночлен $2a^2b$, щоб отримати:

1) $2a^3b$;

2) $2a^2b^4$;

3) $4a^5b$;

4) $16a^4b^3$?

1.28. Розкладіть на множники многочлен:

1) $ab - b^2$;

2) $m^7 + m^5$;

3) $8m^2 - 4mn$;

4) $6a^3b - 15a^2b^2$;

5) $x^2 + 6x + 9$;

6) $c^2 - 10c + 25$;

7) $x^2 - 25$;

8) $p^4 - 49m^2$;

9) $a^2 + ab + 7a + 7b$.



Життєва математика

1.29. Лікарка Наталя Борисівна веде здоровий спосіб життя, тому на роботу і з роботи їздить на велосипеді. Вранці вона дістається до роботи за 15 хв, рухаючись зі швидкістю 12 км/год. З роботи повертається зі швидкістю 10 км/год. Скільки часу витрачає Наталя Борисівна на шлях з роботи додому?



Цікаві задачі – поміркуй окремо

1.30. Скільки існує двоцифрових натуральних чисел, які дорівнюють сумі добутку й суми своїх цифр?

§ 2. Основна властивість раціонального дробу

1. Основна властивість раціонального дробу



Основна властивість звичайного дробу: якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, то одержимо дріб, що дорівнює даному. Або для будь-яких натуральних чисел a , b і c справджуються рівності:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \text{ і } \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Доведемо, що ці рівності є правильними не тільки для натуральних значень a , b і c , а й для будь-яких інших значень за умови $b \neq 0$ і $c \neq 0$.

Доведемо спочатку, що $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Нехай $\frac{a}{b} = a : b = p$. Тоді за означенням частки $a = bp$. Помножимо обидві частини цієї рівності на c , матимемо: $ac = (bp)c$. Використовуючи переставну і сполучну властивості множення, одержимо: $ac = (bc)p$. Оскільки $b \neq 0$ і $c \neq 0$, то і $bc \neq 0$. З останньої рівності (за означенням частки) маємо: $\frac{ac}{bc} = p$. Оскільки $\frac{a}{b} = p$ і $\frac{ac}{bc} = p$, то $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Ця рівність є тотожністю, отже, можемо поміняти в ній ліву і праву частини місцями:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Ця тотожність дає змогу замінити дріб $\frac{ac}{bc}$ на дріб $\frac{a}{b}$, тобто скоротити дріб $\frac{ac}{bc}$ на спільний множник c чисельника і знаменника.

Властивість дробу, що записується рівностями $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ і $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, називають *основною властивістю раціонального дробу*.

Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий відмінний від нуля вираз, то одержимо дріб, що дорівнює даному, тобто

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \text{ та } \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

2. Скорочення раціонального дробу

Розглянемо приклади застосування цієї властивості для дробів на їх області допустимих значень.

Приклад 1. Скоротити дріб $\frac{24a^2}{16a}$.

Розв'язання. Подамо чисельник і знаменник цього дробу у вигляді добутків, що містять однаковий (спільний) множник $8a$, і скоротимо дріб на цей вираз:

$$\frac{24a^2}{16a} = \frac{8a \cdot 3a}{8a \cdot 2} = \frac{3a}{2}.$$

Відповідь: $\frac{3a}{2}$.

Приклад 2. Скоротити дріб $\frac{x^2 - 9y^2}{5x + 15y}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу та скоротимо дріб на спільний множник чисельника і знаменника:

$$\frac{x^2 - 9y^2}{5x + 15y} = \frac{(x - 3y)(x + 3y)}{5(x + 3y)} = \frac{x - 3y}{5}.$$

Відповідь: $\frac{x - 3y}{5}$.

Отже, щоб скоротити дріб, треба:

- 1) розкласти на множники чисельник і знаменник дробу (за потреби);
- 2) виконати ділення чисельника і знаменника на їх спільний множник та записати результат.

Приклад 3. Знайти область визначення функції $y = \frac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Областю визначення функції є усі числа, крім тих, що перетворюють знаменник $2x - 4$ на нуль. Оскільки $2x - 4 = 0$ для $x = 2$, то областю визначення функції є усі числа, крім числа 2.

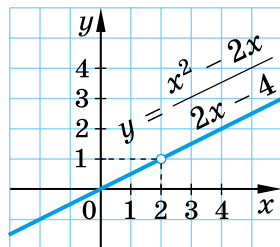
Спростимо дріб у формулі функції:

$$\frac{x^2 - 2x}{2x - 4} = \frac{x(x - 2)}{2(x - 2)} = \frac{x}{2}.$$

Отже, функція $y = \frac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ має вигляд $y = \frac{x}{2}$ за

умови $x \neq 2$, а її графіком є пряма $y = \frac{x}{2}$ без

точки з абсцисою 2, тобто без точки $(2; 1)$. Таку точку називають «виколотою» і обов'язково вилучають її з графіка, зображуючи «порожньою». Зрозуміло, що графік цієї функції не може міс-



Мал. 2.1

тити точку з абсцисою 2, оскільки число 2 не належить області визначення функції.

Графік функції $y = \frac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ зображено на малюнку 2.1.

3. Зведення раціонального дробу до нового знаменника

Тотожність $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ дає змогу зводити дроби до іншого (нового) знаменника.

Приклад 4. Звести дріб $\frac{5t}{4p}$ до знаменника $12p^4$.

Розв'язання. Оскільки $12p^4 = 4p \cdot 3p^3$, то, помноживши чисельник і знаменник даного в умові дробу на $3p^3$, одержимо дріб зі знаменником $12p^4$:

$$\frac{5t}{4p} = \frac{5t \cdot 3p^3}{4p \cdot 3p^3} = \frac{15tp^3}{12p^4}.$$

Множник $3p^3$, як і для звичайних дробів, називають *додатковим множником* чисельника і знаменника дробу $\frac{5t}{4p}$.

Відповідь: $\frac{15tp^3}{12p^4}$.

Приклад 5. Звести дріб $\frac{7}{a-b}$ до знаменника $b-a$.

Розв'язання. Оскільки $b-a = -1 \cdot (a-b)$, то, помноживши чисельник і знаменник дробу $\frac{7}{a-b}$ на додатковий множник -1 , одержимо

дріб зі знаменником $b-a$: $\frac{7}{a-b} = \frac{7 \cdot (-1)}{(a-b) \cdot (-1)} = \frac{-7}{b-a}$.

Оскільки зміна знака перед дробом приводить до зміни знака в чисельнику або знаменнику, то $\frac{7}{a-b} = \frac{-7}{b-a} = -\frac{7}{b-a}$.

Відповідь: $-\frac{7}{b-a}$.

Якщо змінити знак у чисельнику (або знаменнику) дробу одночасно зі знаком перед дробом, то одержимо дріб, тотожно рівний даному, тобто

$$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}.$$

Наприклад, $\frac{c-2}{5} = -\frac{2-c}{5}$.



Якими рівностями записують основну властивість дробу? Сформулюйте цю властивість. Доведіть тотожність $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Поясніть, як скоротити раціональний дріб.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 2.1. (Усно.) Скоротіть дріб:

1) $\frac{7x}{7y}$; 2) $\frac{3a}{15b}$; 3) $\frac{xy}{xm}$; 4) $\frac{ab}{b^2}$; 5) $\frac{5ac}{4ab}$; 6) $\frac{10xy}{10my}$.

2.2. Скоротіть дріб:

1) $\frac{3m}{3p}$; 2) $\frac{4x}{12y}$; 3) $\frac{ab}{ap}$; 4) $\frac{t^2}{tx}$; 5) $\frac{9xy}{8xz}$; 6) $\frac{4mn}{4pn}$.

2 2.3. Скоротіть дріб:

1) $\frac{15ab}{20am}$; 2) $\frac{-2a^2m}{5ap}$; 3) $\frac{16ax^2}{20xb}$; 4) $\frac{-8m^2n}{-2n^3}$;
5) $\frac{-ap^2}{p^3c}$; 6) $\frac{4abc}{12ac^3}$; 7) $\frac{26m^2n}{39mn^2}$; 8) $\frac{a^5c^4}{-c^3a^6}$.

2.4. Скоротіть дріб:

1) $\frac{8at}{12ap}$; 2) $\frac{-3xy}{7x^2y}$; 3) $\frac{12m^2n}{20xm}$; 4) $\frac{-6p^3c}{-3p^4}$;
5) $\frac{-kp^3}{p^4t}$; 6) $\frac{5xyz}{15y^2z}$; 7) $\frac{22x^2y}{-33y^2x}$; 8) $\frac{t^7p^8}{p^6t^9}$.

2.5. Подайте частку у вигляді дробу і скоротіть цей дріб:

1) $12x^2y : (4xy^3)$; 2) $3a^2bc : (-18ab^2c^2)$;
3) $-10ap^3 : (-15a^2)$; 4) $-14x^9 : (2x^7y)$.

2.6. Зведіть дріб:

1) $\frac{5}{4m}$ до знаменника $20m$; 2) $\frac{p}{a^2}$ до знаменника a^5 .

2.7. Зведіть дріб:

1) $\frac{4}{3p}$ до знаменника $15p$; 2) $\frac{x}{y^3}$ до знаменника y^7 .

2.8. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m(a-2)}{p(a-2)}$; 2) $\frac{4(x+2)^2}{(x+2)^3}$;
3) $\frac{mn(p+7)}{m^2n(p+7)^2}$; 4) $\frac{16m^3(a+3)^2}{20m^4(a+3)}$.

2.9. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{x(b+7)}{y(b+7)}; \quad 2) \frac{5(m-3)^3}{(m-3)^4}; \quad 3) \frac{a^2y(x-2)^2}{ay(x-2)}; \quad 4) \frac{12x^3(y-7)}{16x^2(y-7)^2}.$$

2.10. Розкладіть на множники чисельник і знаменник й скоротіть дріб:

$$1) \frac{4a+12b}{16ab}; \quad 2) \frac{5x-5y}{7(x-y)}; \quad 3) \frac{3m(x+2)}{x^2+2x}; \quad 4) \frac{ax-a}{a};$$

$$5) \frac{y}{y^2-yx}; \quad 6) \frac{2x-6y}{5x-15y}; \quad 7) \frac{a+2b}{a^2+2ab}; \quad 8) \frac{2x^2-10xy}{x-5y}.$$

2.11. Скоротіть дріб, попередньо розклавши його чисельник і знаменник на множники:

$$1) \frac{3a+15b}{9ab}; \quad 2) \frac{mn-m}{4(n-1)}; \quad 3) \frac{p^2-3p}{4k(p-3)};$$

$$4) \frac{xy-2x}{x}; \quad 5) \frac{m}{m^2+mn}; \quad 6) \frac{4a-12c}{7a-21c}.$$

2.12. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{a(x-y)}{5(y-x)}; \quad 2) \frac{3a-9b}{15b-5a}; \quad 3) \frac{7y-14}{y^2-4};$$

$$4) \frac{m^2-9}{m^2-6m+9}; \quad 5) \frac{p^2-1}{p^3-p^2}; \quad 6) \frac{x^2+10x+25}{mx+5m}.$$

2.13. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{m(p-2)}{a(2-p)}; \quad 2) \frac{3a+12}{a^2-16}; \quad 3) \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}; \quad 4) \frac{mc+4c}{m^2+8m+16}.$$

3 2.14. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{m^2n-m}{m^2-m^3n}; \quad 2) \frac{15m^3-15mn}{10n^2-10nm^2}; \quad 3) \frac{m^3+27}{m^2-3m+9};$$

$$4) \frac{20+10a+5a^2}{a^3-8}; \quad 5) \frac{3p+pn-3y-yn}{7p-7y}; \quad 6) \frac{am+an-bm-bn}{am-an-bm+bn}.$$

2.15. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{16p^3-16pq}{12p^3q-12pq^2}; \quad 2) \frac{a^2-2a+4}{a^3+8};$$

$$3) \frac{7+7a+7a^2}{a^3-1}; \quad 4) \frac{5m+an-5n-am}{a^2-10a+25}.$$

2.16. Зведіть дріб: 1) $\frac{5}{a-b}$ до знаменника a^2-ab ;

2) $\frac{4}{m+n}$ до знаменника $m^2+2mn+n^2$;

3) $\frac{9}{x-y}$ до знаменника x^2-y^2 ; 4) $\frac{4}{k-1}$ до знаменника k^3-1 ;

5) $\frac{a}{a-b}$ до знаменника $b-a$; 6) $\frac{p}{p-2}$ до знаменника $4-p^2$.

2.17. Зведіть дріб:

- 1) $\frac{7}{m+n}$ до знаменника $m^2 + mn$;
- 2) $\frac{4}{x-y}$ до знаменника $x^2 - 2xy + y^2$;
- 3) $\frac{a}{a+b}$ до знаменника $a^2 - b^2$;
- 4) $\frac{c}{c-7}$ до знаменника $7 - c$.

2.18. Знайдіть значення виразу $-\frac{(c^3)^5(x^{12})^2}{9(c^6)^2(x^3)^8}$, якщо $c = -3$, $x = 2025$, та



дізнайтеся скільки разів українські виконавці вигравали в пісенному конкурсі «Євробачення».

2.19. Обчисліть значення дробу $\frac{6x^2 - 3xy}{8xy - 4y^2}$, якщо $x = -4$, $y = -\frac{1}{4}$, та



дізнайтеся, у якому столітті було засновано місто Кам'янець-Подільський (Хмельницька обл.).



2.30. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{a^5 - a^3}{a^4 - a^2}$;
- 2) $\frac{p^9 + p^7}{p^5 + p^7}$;
- 3) $\frac{2a^2 - a^3}{a^6 - 2a^5}$;
- 4) $\frac{5c^5 - 10c^4}{12c^5 - 6c^6}$.

2.31. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{t^9 - t^8}{t^8 - t^7}$;
- 2) $\frac{a^6 + a^3}{a^9 + a^6}$;
- 3) $\frac{3b^2 - b^3}{b^8 - 3b^7}$;
- 4) $\frac{4a^4 - 8a^3}{12a^2 - 6a^3}$.



2.32. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{48x}$;
- 2) $\frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4}$;
- 3) $\frac{(3b-9c)^2}{5b-15c}$.

2.33. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{(m+5)^2 + (m-5)^2}{m^2 + 25}; \quad 2) \frac{a^4 - b^4}{a^3 + b^3}; \quad 3) \frac{6m + 2n}{(12m + 4n)^2}.$$

2.34. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

$$1) y = \frac{x^2 + 6x}{6x + 36}; \quad 2) y = \frac{x^2 - 4x + 4}{2 - x}.$$

2.35. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

$$1) y = \frac{x^2 - 5x}{25 - 5x}; \quad 2) y = \frac{x^2 + 6x + 9}{3 + x}.$$



Вправи для повторення

2.36. Обчисліть значення виразу:

$$1) \frac{2^{12}}{2^{14}}; \quad 2) \frac{3^9}{3^6}; \quad 3) \frac{7^4}{49}; \quad 4) \frac{125}{5^5}.$$

2.37. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + 3y = 2, \\ 3x - 2y = 17; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y = 2, \\ 7x - 2y = -22. \end{cases}$$

2.38. Спростіть вираз:

$$1) (2x + 3y)^2 - (x + 7y)(4x - y); \quad 2) (m + 3)(m^2 - 5) - m(m - 4)^2.$$



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

2.39. Обчисліть:

$$1) \frac{1}{7} + \frac{3}{7}; \quad 2) \frac{7}{13} + \frac{8}{13}; \quad 3) \frac{9}{11} - \frac{5}{11}; \quad 4) \frac{3}{17} - \frac{9}{17};$$

$$5) \frac{4}{5} + \frac{1}{5}; \quad 6) -\frac{11}{15} + \frac{2}{15}; \quad 7) -\frac{3}{10} - \frac{7}{10}; \quad 8) -\frac{2}{7} - \left(-\frac{1}{7}\right).$$



Життєва математика

2.40. На 1 січня 2016 року сільського населення в Україні було на 37,8 % менше, ніж міського. Знайдіть кількість міського і кількість сільського населення в Україні станом на 1 січня 2016 року, якщо загальна кількість населення на цю дату складала 42 590 880 осіб.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

2.41. Катер за течією річки долає відстань від пункту А до пункту В за 2 год, а проти течії – за 3 год. За який час від пункту А до пункту В пропливе пліт?

§ 3. Додавання та віднімання дробів з однаковими знаменниками

1. Додавання дробів з однаковими знаменниками



Щоб додавати дроби з однаковими знаменниками. Треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий. Наприклад:

$$\frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{3+5}{11} = \frac{8}{11}, \text{ або у вигляді формули: } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Ця формула справджується для будь-яких дробів за умови $c \neq 0$. Доведемо це.

Нехай $\frac{a}{c} = p$ і $\frac{b}{c} = q$. Тоді за означенням частки $a = cp$ і $b = cq$. Маємо: $a + b = cp + cq = c(p + q)$.

Оскільки $c \neq 0$, то за означенням частки $p + q = \frac{a+b}{c}$, отже,

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}. \quad \blacksquare$$

Маємо *правило додавання дробів з однаковими знаменниками*.

Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити без змін, тобто

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Приклад 1. $\frac{5p}{2x} + \frac{3p}{2x} = \frac{5p+3p}{2x} = \frac{8p}{2x} = \frac{4p}{x}.$

2. Віднімання дробів з однаковими знаменниками

Аналогічно можна довести тотожність $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$, якою записують правило віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Маємо *правило віднімання дробів з однаковими знаменниками*.

Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити без змін, тобто

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Приклад 2.

$$\frac{10x - 14}{7p} - \frac{3x}{7p} = \frac{10x - 14 - 3x}{7p} = \frac{7x - 14}{7p} = \frac{7(x - 2)}{7p} = \frac{x - 2}{p}.$$

Розглянемо ще кілька прикладів.

3. Застосування правил додавання та віднімання многочленів під час розв'язування вправ

Приклад 3. Знайти суму та різницю дробів $\frac{2x + y}{2xy}$ і $\frac{2x - y}{2xy}$.

Розв'язання. $\frac{2x + y}{2xy} + \frac{2x - y}{2xy} = \frac{2x + y + 2x - y}{2xy} = \frac{4x}{2xy} = \frac{2}{y};$

$\frac{2x + y}{2xy} - \frac{2x - y}{2xy} = \frac{2x + y - (2x - y)}{2xy} = \frac{2x + y - 2x + y}{2xy} = \frac{2y}{2xy} = \frac{1}{x}.$

Відповідь: $\frac{2}{y}; \frac{1}{x}.$

Приклад 4. Спростити вираз $\frac{m^2 + 5m}{m^2 - 3m} + \frac{7}{m^2 - 3m} - \frac{11m - 2}{m^2 - 3m}.$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \frac{m^2 + 5m}{m^2 - 3m} + \frac{7}{m^2 - 3m} - \frac{11m - 2}{m^2 - 3m} &= \frac{m^2 + 5m + 7 - (11m - 2)}{m^2 - 3m} = \\ &= \frac{m^2 + 5m + 7 - 11m + 2}{m^2 - 3m} = \frac{m^2 - 6m + 9}{m^2 - 3m} = \frac{(m - 3)^2}{m(m - 3)} = \frac{m - 3}{m}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{m - 3}{m}.$

Приклад 5. Знайти суму $\frac{10x}{y - 2x} + \frac{5y}{2x - y}.$

Розв'язання. Оскільки $2x - y = -(y - 2x)$, то другий доданок можна подати з тим самим знаменником, що й у першого доданка (ми вже розглядали таку дію на с. 21): $\frac{5y}{2x - y} = \frac{5y}{-(y - 2x)} = -\frac{5y}{y - 2x}.$

Тоді $\frac{10x}{y - 2x} + \frac{5y}{2x - y} = \frac{10x}{y - 2x} - \frac{5y}{y - 2x} = \frac{10x - 5y}{y - 2x} = \frac{-5(y - 2x)}{y - 2x} = -5.$

4. Подання дробу у вигляді суми або різниці кількох дробів

Якщо в тотожностях $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$ та $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$ поміняти місцями ліві та праві частини, то одержимо тотожності:

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \quad \text{та} \quad \frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

За допомогою цих тотожностей дріб, чисельник якого є сумою або різницею кількох виразів, можна записати у вигляді суми або різниці кількох дробів.

Приклад 6.
$$\frac{2x + 5y - 9}{xy} = \frac{2x}{xy} + \frac{5y}{xy} - \frac{9}{xy} = \frac{2}{y} + \frac{5}{x} - \frac{9}{xy}.$$

Приклад 7. Записати дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу

і дробу: 1) $\frac{a^2 + 2a - 7}{a}$; 2) $\frac{5m + 3n}{m + n}.$

Розв'язання.

1) $\frac{a^2 + 2a - 7}{a} = \frac{a^2}{a} + \frac{2a}{a} - \frac{7}{a} = a + 2 - \frac{7}{a};$

2) $\frac{5m + 3n}{m + n} = \frac{2m + 3m + 3n}{m + n} = \frac{2m + 3(m + n)}{m + n} = \frac{2m}{m + n} + \frac{3(m + n)}{m + n} =$
 $= \frac{2m}{m + n} + 3 = 3 + \frac{2m}{m + n}.$

Відповідь: 1) $a + 2 - \frac{7}{a}$; 2) $3 + \frac{2m}{m + n}.$



Сформулюйте правило додавання дробів з однаковими знаменниками. Доведіть його. ○ Сформулюйте правило віднімання дробів з однаковими знаменниками.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 3.1. (Усно.) Виконайте дію:

1) $\frac{a}{5} + \frac{b}{5};$

2) $\frac{x}{9} - \frac{y}{9};$

3) $\frac{2}{a} + \frac{3}{a};$

4) $\frac{7}{b} - \frac{5}{b}.$

3.2. Знайдіть суму або різницю:

1) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{5};$

2) $\frac{7y}{3} - \frac{2y}{3};$

3) $\frac{a + b}{x} - \frac{a}{x};$

4) $\frac{7x^2}{y} + \frac{5x^2}{y}.$

3.3. Виконайте дію:

1) $\frac{3m}{8} + \frac{2m}{8};$

2) $\frac{9p}{17} - \frac{p}{17};$

3) $\frac{x - y}{m} + \frac{y}{m};$

4) $\frac{5c^2}{n} - \frac{2c^2}{n}.$

2 3.4. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{7a}{4x} - \frac{3a}{4x};$

2) $\frac{x + y}{8} - \frac{x - 3y}{8};$

3) $\frac{a + 4}{9} + \frac{5 - a}{9};$

4) $\frac{x + 3y}{10} + \frac{4x + 7y}{10};$

5) $\frac{5m - 2}{8m} - \frac{m - 10}{8m};$

6) $\frac{7a + 13}{6a} + \frac{17 - a}{6a}.$

3.5. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{5x}{2a} + \frac{3x}{2a}; & 2) \frac{a+b}{12} - \frac{a-5b}{12}; & 3) \frac{b-3}{5} + \frac{13-b}{5}; \\ 4) \frac{a+2b}{8} + \frac{3a+6b}{8}; & 5) \frac{6m-3}{10m} - \frac{m-13}{10m}; & 6) \frac{5x-3}{4x} + \frac{11-x}{4x}. \end{array}$$

3.6. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{3x-7y}{4xy} + \frac{15y-3x}{4xy}; & 2) \frac{7a+p^3}{3p} - \frac{7a-2p^3}{3p}; \\ 3) \frac{5a-b^4}{6b^5} - \frac{b^4+5a}{6b^5}; & 4) \frac{3a-4}{8a} + \frac{4a+5}{8a} - \frac{1-a}{8a}. \end{array}$$

3.7. Подайте у вигляді дробу:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{3a-b}{ab} - \frac{5b+3a}{ab}; & 2) \frac{9m+2k^2}{5k} - \frac{9m-3k^2}{5k}; \\ 3) \frac{5b-m^2}{4m^3} - \frac{m^2+5b}{4m^3}; & 4) \frac{4a-3}{6a} + \frac{a+8}{6a} - \frac{5-a}{6a}. \end{array}$$

3.8. Обчисліть значення виразу $\frac{7a-5}{4a^2} + \frac{5+a}{4a^2}$, якщо



$a = \frac{1}{8}$, та дізнайтеся, у якому віці фігуристка

Оксана Баюл стала першою олімпійською чемпіонкою незалежної України.



3.9. У 1995 р. українська легкоатлетка Інеса Кравець установила світовий рекорд з потрійного стрибка. Знайдіть значення виразу



$\frac{11b-7}{6b^2} + \frac{7+b}{6b^2}$, якщо $b = \frac{1}{13}$. Дізнається, скільки років протримався цей світовий рекорд.

3.10. Виконайте дію:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^2}{x-5} - \frac{25}{x-5}; & 2) \frac{36}{y+6} - \frac{y^2}{y+6}; \\ 3) \frac{x-3}{x^2-9} + \frac{6}{x^2-9}; & 4) \frac{7a-1}{a^2-b^2} - \frac{7b-1}{a^2-b^2}; \\ 5) \frac{2x+y}{(x-y)^2} + \frac{x-4y}{(x-y)^2}; & 6) \frac{9m+5n}{(m+n)^2} - \frac{m-3n}{(m+n)^2}. \end{array}$$

3.11. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{49}{7-m} - \frac{m^2}{7-m}; & 2) \frac{x+7}{x^2-1} - \frac{6}{x^2-1}; \\ 3) \frac{5x-2}{x^2-y^2} - \frac{5y-2}{x^2-y^2}; & 4) \frac{3a-4b}{(a-b)^2} + \frac{2a-b}{(a-b)^2}. \end{array}$$

3.12. Спростіть вираз:

$$1) \frac{a}{x-1} + \frac{5}{1-x};$$

$$2) \frac{m}{c-3} - \frac{p}{3-c};$$

$$3) \frac{5x}{x-y} + \frac{5y}{y-x};$$

$$4) \frac{10p}{2p-m} + \frac{5m}{m-2p}.$$

3.13. Виконайте дію:

$$1) \frac{c}{a-2} + \frac{x}{2-a};$$

$$2) \frac{a}{x-y} - \frac{8}{y-x};$$

$$3) \frac{2m}{m-n} + \frac{2n}{n-m};$$

$$4) \frac{16x}{4x-y} + \frac{4y}{y-4x}.$$

3.14. Виконайте дію:

$$1) \frac{m^2 - m}{m^2 + 4m + 4} - \frac{4 - m}{m^2 + 4m + 4};$$

$$2) \frac{9c}{c^2 - 6c} - \frac{18 + 6c}{c^2 - 6c}.$$

3.15. Знайдіть різницю:

$$1) \frac{a^2 + 3a}{a^2 + 6a + 9} - \frac{3a + 9}{a^2 + 6a + 9};$$

$$2) \frac{3m}{m^2 - 5m} - \frac{m + 10}{m^2 - 5m}.$$

3.16. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{(a-b)^2}{2ab} - \frac{(a+b)^2}{2ab} = -2;$$

$$2) \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2} + \frac{(a-b)^2}{a^2 + b^2} = 2.$$

3.17. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{m^2}{2m-10} + \frac{25}{10-2m}, \text{ якщо } m = 25;$$

$$2) \frac{x^2 + 9y^2}{x-3y} + \frac{6xy}{3y-x}, \text{ якщо } x = 2026, y = \frac{1}{3}.$$

3.18. Обчисліть:

$$1) \frac{x^2}{3x-18} + \frac{36}{18-3x}, \text{ якщо } x = -12;$$

$$2) \frac{c^2}{c-5k} - \frac{25k^2 - 10ck}{5k-c}, \text{ якщо } c = 199, k = 0,2.$$

3.19. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

$$1) \frac{m+3}{m};$$

$$2) \frac{a^4 + a^3 - 5}{a^2};$$

$$3) \frac{x^2 + 5x - 3}{x+5};$$

$$4) \frac{4a - 4b + 7}{a-b}.$$

3.20. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

$$1) \frac{a-7}{a};$$

$$2) \frac{m^2 - m^3 + 7}{m^2};$$

$$3) \frac{y^2 + y + 2}{y+1};$$

$$4) \frac{5p - 5q - 1}{p-q}.$$

4 3.21. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) \frac{7-4m}{(2-m)^2} - \frac{9-5m}{(m-2)^2};$$

$$2) \frac{12a}{(2-a)^3} + \frac{3a^2+12}{(a-2)^3};$$

$$3) \frac{m^2-6n}{(m-2)(n-3)} - \frac{2(m-3n)}{(2-m)(3-n)}.$$

3.22. Спростіть вираз:

$$1) \frac{16-7a}{(3-a)^2} - \frac{13-6a}{(a-3)^2};$$

$$2) \frac{15(2m-3)}{(3-m)^3} + \frac{5m^2}{(m-3)^3};$$

$$3) \frac{p^2-9q}{(p-3)(q-4)} - \frac{3(p-3q)}{(3-p)(4-q)}.$$

 *Вправи для повторення*

3.23. Подайте вираз у вигляді многочлена:

$$1) (a-1)(a+3)^2; \quad 2) (x-4)^2(x+2).$$

3.24. Скоротіть дріб $\frac{x^2+y^2-z^2-2xy}{x^2-y^2+z^2+2xz}$.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

3.25. Обчисліть: 1) $\frac{1}{7} + \frac{5}{14}$; 2) $\frac{5}{12} - \frac{3}{16}$; 3) $\frac{1}{8} - \frac{3}{16} + \frac{7}{24}$.

3.26. Подайте одночлен $15a^3b^7$ у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює:

$$1) 3ab^5; \quad 2) -5a^2b^7; \quad 3) -b^6; \quad 4) 15ab.$$



Життєва математика

3.27. 1) На території шкільного подвір'я росте дерево акації. Через 5 год після поливу вода по її стовбуру піднялася на висоту 7 м 20 см. Обчисліть швидкість переміщення води у стовбурі акації.

2) *Практична діяльність.* Дізнайтеся з різноманітних джерел інформації про користь акації в житті людини та господарстві.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

3.28. (Національна олімпіада Великої Британії, 1968 р.) Нехай $a_1, a_2, \dots, a_7$ — цілі числа, а $b_1, b_2, \dots, b_7$ — ті самі числа в іншому порядку. Доведіть, що число $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\dots(a_7 - b_7)$ є парним.

§ 4. Додавання та віднімання дробів з різними знаменниками

1. Найпростіші приклади додавання та віднімання дробів з різними знаменниками



Якщо дроби мають різні знаменники, то їх, як і звичайні дроби, спочатку зводять до спільного знаменника, а потім додають або віднімають за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Розглянемо, як додати дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$. Спочатку зведемо ці дроби до їх спільного знаменника bd . Для цього чисельник і знаменник дробу $\frac{a}{b}$ помножимо на додатковий множник d : $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$. А чисельник і знаменник дробу $\frac{c}{d}$ помножимо на додатковий множник b : $\frac{c}{d} = \frac{cb}{db}$. Дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ звели до спільного знаменника bd , після чого додаємо їх.

Цю послідовність дій для додавання дробів з різними знаменниками можна записати так:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}, \text{ або скорочено: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Аналогічно виконують і віднімання дробів з різними знаменниками:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Приклад 1. Виконати дію: 1) $\frac{3}{m} + \frac{4}{n}$; 2) $\frac{2}{a} - \frac{b}{7}$.

Розв'язання.

$$1) \frac{n/3}{m} + \frac{m/4}{n} = \frac{3n + 4m}{mn}; \quad 2) \frac{7/2}{a} - \frac{a/b}{7} = \frac{14 - ab}{7a}.$$

Часто під час додавання та віднімання дробів з різними знаменниками вдається знайти простіший спільний знаменник, ніж добуток знаменників цих дробів. У такому випадку кажуть про *найпростіший* спільний знаменник (аналогічно до *найменшого* спільного знаменника для числових дробів). Узагалі у дробів є безліч спільних знаменників.

2. Додавання та віднімання дробів, знаменниками яких є одночлени

Розглянемо приклад, де знаменники дробів – одночлени.

Приклад 2. Виконати дію $\frac{7}{6x^2y} + \frac{3}{8xy^3}$.

Розв'язання. Спільним знаменником цих дробів можна вважати одночлен $48x^3y^4$, що є добутком знаменників дробів, але в цьому випадку він не буде найпростішим спільним знаменником.

Спробуємо знайти найпростіший спільний знаменник. Оскільки знаменники дробів є одночленами, то і найпростішим спільним знаменником також буде одночлен. Коефіцієнт цього одночлена має ділитися і на 6, і на 8. Найменшим таким числом є число 24. До спільного знаменника кожна зі змінних має входити з найбільшим з показників степеня, з якими вона входить до знаменників дробів. Так найпростішим спільним знаменником буде одночлен $24x^2y^3$. Тоді додатковим множником для першого дробу є вираз $4y^2$, бо $24x^2y^3 = 6x^2y \cdot 4y^2$, а для другого – вираз $3x$, бо $24x^2y^3 = 8xy^3 \cdot 3x$. Отже, маємо:

$$\frac{4y^2/7}{6x^2y} + \frac{3x/3}{8xy^3} = \frac{4y^2 \cdot 7 + 3x \cdot 3}{24x^2y^3} = \frac{28y^2 + 9x}{24x^2y^3}.$$

Відповідь: $\frac{28y^2 + 9x}{24x^2y^3}$.

Зверніть увагу, що у прикладі 2 під час зведення дробів до спільного знаменника додаткові множники $4y^2$ та $3x$ не містили жодного спільного множника, відмінного від одиниці. Це означає, що ми знайшли саме найпростіший спільний знаменник дробів.

3. Додавання та віднімання дробів, знаменниками яких є многочлени

Тепер розглянемо приклад, у якому знаменниками дробів є многочлени.

Приклад 3. Виконати віднімання $\frac{x+4}{xy-x^2} - \frac{y+4}{y^2-xy}$.

Розв'язання. Щоб знайти спільний знаменник, розкладемо знаменники на множники. Маємо:

$$xy - x^2 = x(y - x) \text{ та } y^2 - xy = y(y - x).$$

Найпростішим спільним знаменником дробів буде вираз $xy(y - x)$. Тоді додатковим множником для першого дробу є y , а для другого – x . Виконаємо віднімання:

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{xy-x^2} - \frac{y+4}{y^2-xy} &= \frac{y/x+4}{x(y-x)} - \frac{x/y+4}{y(y-x)} = \frac{y(x+4) - x(y+4)}{xy(y-x)} = \\ &= \frac{xy+4y-xy-4x}{xy(y-x)} = \frac{4y-4x}{xy(y-x)} = \frac{4(y-x)}{xy(y-x)} = \frac{4}{xy}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{4}{xy}$.

4. Алгоритм виконання додавання та віднімання дробів з різними знаменниками

Отже, щоб виконати додавання або віднімання дробів з різними знаменниками, треба:

- 1) розкласти на множники знаменники дробів, якщо це потрібно;
- 2) знайти спільний знаменник, бажано найпростіший;
- 3) знайти додаткові множники і звести дроби до спільного знаменника;
- 4) знайти суму або різницю отриманих дробів;
- 5) скоротити отриманий дріб, якщо він скоротний, та записати відповідь.

Розглянемо застосування алгоритму в такому прикладі.

Приклад 4. Подати вираз $\frac{2a}{a-6} - \frac{6}{a+6} + \frac{2a^2}{36-a^2}$ у вигляді дробу.

Розв'язання. 1) Розкладемо знаменник третього дробу на множники $36 - a^2 = (6 - a)(6 + a)$. Оскільки перший дріб має знаменник $a - 6$, то знаменник третього дробу краще подати так: $36 - a^2 = -(a - 6)(a + 6)$.

Маємо: $\frac{2a}{a-6} - \frac{6}{a+6} - \frac{2a^2}{(a-6)(a+6)}$.

2) Найпростішим спільним знаменником трьох дробів є вираз $(a - 6)(a + 6)$.

3) Додатковим множником до першого дробу є вираз $(a + 6)$, до другого $-(a - 6)$, до третього -1 . Запишемо це

$$\frac{a+6}{2a} - \frac{a-6}{6} - \frac{1}{2a^2}$$

$$\frac{a+6}{a-6} - \frac{a-6}{a+6} - \frac{1}{(a-6)(a+6)}$$

4) Маємо далі

$$\frac{2a(a+6) - 6(a-6) - 2a^2}{(a-6)(a+6)} = \frac{2a^2 + 12a - 6a + 36 - 2a^2}{(a-6)(a+6)} = \frac{6a + 36}{(a-6)(a+6)}$$

5) Скоротимо отриманий дріб $\frac{6(a+6)}{(a-6)(a+6)} = \frac{6}{a-6}$.

Коротко розв'язання можна записати так:

$$\begin{aligned} \frac{2a}{a-6} - \frac{6}{a+6} + \frac{2a^2}{36-a^2} &= \frac{a+6}{2a} - \frac{a-6}{6} - \frac{1}{2a^2} = \\ &= \frac{2a(a+6) - 6(a-6) - 2a^2}{(a-6)(a+6)} = \frac{2a^2 + 12a - 6a + 36 - 2a^2}{(a-6)(a+6)} = \frac{6a + 36}{(a-6)(a+6)} = \\ &= \frac{6(a+6)}{(a-6)(a+6)} = \frac{6}{a-6} \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{6}{a-6}$.

5. Додавання та віднімання цілого числа і дробу

Аналогічно виконують додавання та віднімання цілого виразу і дробу.

Приклад 5. Спростити вираз $a + 1 - \frac{a^2 - a}{a - 2}$.

Розв'язання. Запишемо вираз $a + 1$ у вигляді дробу зі знаменником 1 та виконаємо віднімання:

$$\begin{aligned} a + 1 - \frac{a^2 - a}{a - 2} &= \frac{a-2}{1} \cdot \frac{a+1}{a-2} - \frac{a^2 - a}{a - 2} = \frac{(a-2)(a+1) - (a^2 - a)}{a - 2} = \\ &= \frac{a^2 + a - 2a - 2 - a^2 + a}{a - 2} = \frac{-2}{a - 2} = -\frac{2}{a - 2} = \frac{2}{2 - a}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{2}{2 - a}$.

 Який знаменник є спільним для дробів $\frac{2}{n}$ і $\frac{4}{m}$?  Як виконати додавання та віднімання дробів з різними знаменниками?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 4.1. (Усно.) Знайдіть спільний знаменник дробів:

1) $\frac{a}{3}$ і $\frac{b}{6}$; 2) $\frac{x}{12}$ і $\frac{y}{8}$; 3) $\frac{a}{x}$ і $\frac{b}{y}$; 4) $\frac{c}{m}$ і $\frac{x}{3}$.

4.2. Виконайте дію: 1) $\frac{m}{2} - \frac{y}{3}$; 2) $\frac{a}{4} + \frac{x}{8}$; 3) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$; 4) $\frac{2}{c} + \frac{k}{3}$.

4.3. Виконайте дію: 1) $\frac{x}{5} + \frac{a}{4}$; 2) $\frac{m}{6} - \frac{n}{3}$; 3) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$; 4) $\frac{t}{5} - \frac{4}{p}$.

2 4.4. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{3}{5a} - \frac{1}{2a}$; 2) $\frac{a}{4b} + \frac{7a}{5b}$; 3) $\frac{2a^2}{9b} + \frac{5a^2}{18b}$; 4) $\frac{7m}{12n^2} - \frac{m}{18n^2}$.

4.5. Виконайте дію:

1) $\frac{3}{4m} + \frac{2}{5m}$; 2) $\frac{x}{6y} - \frac{3x}{8y}$; 3) $\frac{4a}{9m^2} + \frac{5a}{12m^2}$; 4) $\frac{4x^2}{15y} - \frac{x^2}{10y}$.

4.6. Перетворіть на дріб вираз:

1) $\frac{2x}{3} + \frac{x-4}{5}$; 2) $\frac{4m-2n}{10} - \frac{m-n}{5}$; 3) $\frac{a+2}{4a} - \frac{3-7a}{6a}$;
4) $\frac{2-3y}{y} - \frac{5-3x}{x}$; 5) $\frac{x+7}{5x} - \frac{3y+4}{15y}$; 6) $\frac{4a+b}{2a} + \frac{a-6b}{3b}$.

4.7. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{a}{4} + \frac{a-2}{3}$; 2) $\frac{2x-y}{14} - \frac{x-y}{7}$;
3) $\frac{x-6}{2x} + \frac{7-2y}{4y}$; 4) $\frac{6m-n}{3m} - \frac{8n-5m}{4n}$.

4.8. Виконайте дію:

$$1) \frac{1}{a^2} + \frac{a-2}{a};$$

$$2) \frac{2+m}{m^2} - \frac{m^2-5}{m^3};$$

$$3) \frac{1}{2x^5} + \frac{1-3x^2}{x^7};$$

$$4) \frac{a-b}{ab} - \frac{b-a}{b^2};$$

$$5) \frac{3n+m}{mn^2} + \frac{n-3m}{m^2n};$$

$$6) \frac{x-2y}{xy^2} - \frac{y-2x}{x^2y}.$$

4.9. Спростіть:

$$1) \frac{m+2}{m^2} - \frac{1}{m};$$

$$2) \frac{5}{n^5} + \frac{3-4n^2}{n^7};$$

$$3) \frac{x-y}{x^2} - \frac{y-x}{xy};$$

$$4) \frac{c-2p}{cp^2} + \frac{2c-p}{pc^2}.$$

4.10. Виконайте дії:

$$1) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c};$$

$$2) \frac{1}{c^3} - \frac{2}{c^2} + \frac{3}{c};$$

$$3) \frac{1}{xy} - \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz};$$

$$4) \frac{a+b}{ab} - \frac{b+c}{bc} + \frac{a+c}{ac}.$$

4.11. Виконайте дії:

$$1) \frac{1}{p} - \frac{1}{m} + \frac{1}{n};$$

$$2) \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3};$$

$$3) \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca};$$

$$4) \frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz} + \frac{x+z}{xz}.$$

4.12. Доведіть тотожність $\frac{3x+1}{7x} - \frac{y-1}{2y} - \frac{7x+y}{14xy} = \frac{1-x}{14x}.$

4.13. Доведіть тотожність $\frac{3m+2}{5m} - \frac{n-1}{2n} - \frac{5m+3n}{10mn} = \frac{m+1}{10m}.$

4.14. Перетворіть на дріб вираз:

$$1) x + \frac{2}{y};$$

$$2) 3m - \frac{1}{m};$$

$$3) \frac{4}{p} - p^2;$$

$$4) \frac{a^2+y}{a} - a;$$

$$5) 2x - \frac{6x^2+1}{3x};$$

$$6) m + \frac{2-4mn}{4n}.$$

4.15. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) m - \frac{3}{n};$$

$$2) 4p + \frac{1}{p};$$

$$3) \frac{x+y^2}{y} - y;$$

$$4) 7p - \frac{14p^2+3}{2p}.$$

4.16. Спростіть вираз:

$$1) 1 - \frac{m}{2} - \frac{n}{3};$$

$$2) 4 + \frac{1}{a} - \frac{1}{b};$$

$$3) \frac{m-2}{3} - 1 + \frac{m+2}{4};$$

$$4) \frac{1}{a+b} + a - b.$$

4.17. Виконайте дії:

$$1) \frac{m}{3} + \frac{n}{4} - 1;$$

$$2) 5 - \frac{1}{c} + \frac{1}{d};$$

$$3) \frac{a+3}{5} - 1 + \frac{a-2}{2};$$

$$4) \frac{1}{x-y} + x + y.$$

4.18. Знайдіть суму та різницю дробів:

$$1) \frac{1}{x-y} \text{ і } \frac{1}{x+y};$$

$$2) \frac{1}{a+b} \text{ і } \frac{1}{a}.$$

4.19. Знайдіть суму та різницю дробів:

$$1) \frac{1}{2a+b} \text{ і } \frac{1}{2a-b};$$

$$2) \frac{1}{m-n} \text{ і } \frac{1}{m}.$$

4.20. Спростіть вираз:

$$1) \frac{2}{a} + \frac{3}{a-1};$$

$$2) \frac{c}{a-c} - \frac{c}{a};$$

$$3) \frac{3}{x+y} + \frac{2}{x-y};$$

$$4) \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x-2};$$

$$5) \frac{a+1}{a} - \frac{a}{a-1};$$

$$6) \frac{a}{2a-1} - \frac{a}{2a+1}.$$

4.21. Виконайте дію:

$$1) \frac{4}{b} + \frac{7}{b+2};$$

$$2) \frac{3}{m-n} - \frac{2}{m+n};$$

$$3) \frac{p}{p-2} - \frac{3}{p+3};$$

$$4) \frac{x}{1-x} + \frac{1+x}{x}.$$

4.22. Виконайте дію:

$$1) \frac{a-2}{2(a+1)} + \frac{a}{a+1};$$

$$2) \frac{m}{4(a+b)} - \frac{3m}{5(a+b)};$$

$$3) \frac{a-2}{2a+6} - \frac{a+1}{3a+9};$$

$$4) \frac{4}{ax-ay} + \frac{5}{bx-by};$$

$$5) \frac{5}{x} - \frac{30}{x(x+6)};$$

$$6) \frac{6}{x^2+3x} - \frac{2}{x}.$$

4.23. Виконайте дію:

$$1) \frac{m-1}{3(m+2)} + \frac{m}{m+2};$$

$$2) \frac{7a}{3(b+2a)} - \frac{4a}{9(b+2a)};$$

$$3) \frac{x-2}{3x-12} - \frac{x+1}{2x-8};$$

$$4) \frac{3}{mx+my} + \frac{2}{nx+ny};$$

$$5) \frac{4}{a} - \frac{8}{a(a+2)};$$

$$6) \frac{8}{m^2+8m} - \frac{1}{m}.$$

4.24. Сучасна українська науковиця Марина В'язовська отримала медаль Філдса – найпрестижнішу премію для математиків у світі.



Спростіть вираз $\frac{4n+m}{n^2-m^2} + \frac{1}{n+m}$ та обчисліть його значення, якщо

$n = -2$, $m = -3$. Після виконаної роботи ви дізнаєтеся, скільки всього жінок-науковиць мають цю медаль.

4.25. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) \frac{a-6}{a^2-4} + \frac{3}{a-2}; \quad 2) \frac{x}{x-5} - \frac{x^2}{x^2-10x+25}.$$

4.26. Перетворіть вираз на дріб:

$$1) \frac{4a-b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a-b}; \quad 2) \frac{2}{b+3} + \frac{b+6}{b^2-9};$$

$$3) \frac{m}{m+4} - \frac{m^2}{m^2+8m+16}.$$

3 **4.27.** Спростіть вираз:

$$1) \frac{a+4}{ab-a^2} + \frac{b+4}{ab-b^2}; \quad 2) \frac{m^2}{mx-x^2} + \frac{x}{x-m};$$

$$3) \frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2+2x}; \quad 4) \frac{3ab-27a^2}{b^2-3ab} - \frac{3a^2-b^2}{ab-3a^2}.$$

4.28. Спростіть вираз:

$$1) \frac{a-2}{ab-a^2} - \frac{2-b}{ab-b^2}; \quad 2) \frac{t^2}{ta+a^2} - \frac{a}{t+a};$$

$$3) \frac{4}{a^2-9} - \frac{2}{a^2+3a}; \quad 4) \frac{3n^2-8m^2}{n^2-2mn} - \frac{3mn-n^2}{mn-2m^2}.$$

4.29. Доведіть тотожність

$$\frac{(a-1)(a-2)}{12} - \frac{(a-1)(a-5)}{3} + \frac{(a-5)(a-2)}{4} = 1.$$

4.30. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) m - n - \frac{m^2+n^2}{m+n}; \quad 2) p - \frac{4}{p-2} - 2;$$

$$3) a^2 - \frac{a^4}{a^2-1} + 1; \quad 4) \frac{8p^2}{2p-3} - 4p - 1.$$

4.31. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) m - \frac{9}{m+3} + 3; \quad 2) \frac{6m^2}{3m+1} - 2m + 4.$$

4.32. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення вира-

зу $\frac{4m-5}{7m-21} - \frac{m-1}{2m-6}$ від значення m не залежить.

4.33. Спростіть вираз:

$$1) \frac{x-1}{x^2-x+1} + \frac{2-x}{x^3+1};$$

$$2) \frac{2m}{m-5} - \frac{5}{m+5} + \frac{2m^2}{25-m^2};$$

$$3) \frac{6}{m^2-6m} + \frac{m-12}{6m-36};$$

$$4) \frac{3}{2a+6} + \frac{a^2-a-3}{a^2-9} - 1.$$

4.34. Спростіть вираз:

$$1) \frac{a+1}{a^2+a+1} + \frac{a+2}{a^3-1};$$

$$2) \frac{2a}{a-3} + \frac{a}{a+3} + \frac{2a^2}{9-a^2};$$

$$3) \frac{4}{m^2+4m} + \frac{m+8}{4m+16};$$

$$4) \frac{2}{3b+6} + \frac{b^2-b-2}{b^2-4} - 1.$$

4.35. Доведіть тотожність $\frac{0,9}{0,25a+0,5} - \frac{0,3a+0,6}{0,5a^2+2a+2} = \frac{3}{a+2}.$

4.36. Доведіть тотожність $\frac{0,35}{0,5a-1,5} - \frac{0,2a-0,6}{a^2-6a+9} = \frac{1}{2(a-3)}.$

4.37. Перетворіть вираз на дріб:

$$1) \frac{a^2-2ab+4b^2}{a^2-4b^2} + \frac{a^2+2ab+4b^2}{(a+2b)^2};$$

$$2) \frac{2}{(a-3)^2} - \frac{4}{a^2-9} + \frac{2}{(a+3)^2}.$$

4.38. Перетворіть вираз на дріб:

$$1) \frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2};$$

$$2) \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{(x+2)^2}.$$

4.39. Для якого значення a вираз $2 + \frac{a}{x-4}$ тотожно дорівнює дробу

$$\frac{2x}{x-4}?$$

4.40. Доведіть, що значення виразу $\frac{a^3+3a}{a+2} - \frac{3a^2-14a+16}{a^2-4} + 2a$ для всіх допустимих значень змінної є додатним.

4.41. Доведіть тотожність $a + a^2 + \frac{2a^2+3a+1}{a^2-1} - \frac{a^3+2a}{a-1} = -1.$

4.42. Побудуйте графік функції $y = 15 \left(\frac{3x+4}{5x-10} - \frac{x+4}{3x-6} \right).$

4.43. Знайдіть значення виразу



$$\frac{3a+0,5b}{9a^2-1,5ab} - \frac{12a}{9a^2-0,25b^2} - \frac{3a-0,5b}{9a^2+1,5ab},$$

якщо $a = \frac{1}{6}$, $b = -1\frac{4}{9}$. Відтак дізнається, у якому віці українець Рус-лан Пономарьов став наймолодшим в історії чемпіоном світу з шахів.

4.44. Знайдіть значення виразу

$$\frac{x + 0,2y}{4x^2 - 0,8xy} - \frac{12,5x}{12,5x^2 - 0,5y^2} - \frac{x - 0,2y}{4x^2 + 0,8xy},$$

якщо $x = -10$, $y = 49$.

4.45. Чи існує таке значення x , для якого значення виразу

$$\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x} - \frac{x}{4-x^2} + \frac{x^2+4}{2x^3-8x}$$

дорівнює нулю?



Вправи для повторення

4.46. Скільки кілограмів солі міститься у 60 кг її 5-відсоткового розчину?

4.47. З двох міст одночасно назустріч один одному виїхали дві велосипедисти. Відстань між містами становить s км, швидкості велосипедисток v_1 км/год і v_2 км/год. Через t год вони зустрілися. Складіть формулу для обчислення t . Знайдіть значення t , якщо $s = 150$ км, $v_1 = 12$ км/год, $v_2 = 13$ км/год.

4.48. Відомо, що $\frac{x}{y} = 3$. Знайдіть значення дробу:

1) $\frac{x+y}{y}$; 2) $\frac{x-y}{y}$; 3) $\frac{x+7y}{y}$; 4) $\frac{x^2+2xy}{xy}$.



Піготуйтеся до вивчення нового матеріалу

4.49. Виконайте множення:

1) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{16}$; 2) $\frac{3}{7} \cdot 1\frac{5}{9}$; 3) $2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{3}{4}$; 4) $7\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{2}$.

4.50. Обчисліть: 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$.



Життєва математика

4.51. Після уроків у класах школи зібрано 0,7 кг паперового сміття.

1) Якщо учні та учениці школи залишатимуть щодня таку кількість паперу, то скільки його пропаде за 190 навчальних днів у одній школі? У 20 школах району?

2) Для виробництва 1 т паперу потрібно приблизно 900 м² лісу. Якщо учні та учениці шкіл району здадуть усі паперові відходи за рік, то скільки м² лісу вони збережуть від вирубування?

3) *Проектна діяльність.* Як можна використати паперові відходи, якщо вони вже є? Завітайте в сусідні супермаркети або крамниці з промисловими та канцелярськими товарами і складіть список товарів, які виробляють з макулатури.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 4.52. Для шкільної актових зали придбали люстру на 31 лампочку. Адміністрація школи хоче мати можливість вмикати будь-яку їх кількість, від 1 до 31. Яка найменша кількість звичайних вимикачів для цього знадобиться?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1 (§§ 1–4)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1** 1. Укажіть вираз, що не є цілим раціональним виразом.
- А. $\frac{1}{5}a^2xy$ Б. $\frac{m-3}{5}$ В. $\frac{5}{m-3}$ Г. $0,25x + y$
2. Скоротіть дріб $\frac{5ax}{5xy}$.
- А. $\frac{5a}{y}$ Б. $\frac{a}{y}$ В. $\frac{y}{a}$ Г. $\frac{a}{5y}$
3. Виконайте дію $\frac{m}{3} - \frac{5}{b}$.
- А. $\frac{m-5}{3-b}$ Б. $\frac{3m-5b}{3b}$ В. $\frac{15-mb}{3b}$ Г. $\frac{mb-15}{3b}$
- 2** 4. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі $\frac{a-3}{a+2}$.
- А. a – будь-яке число
 Б. a – будь-яке число, крім 3
 В. a – будь-яке число, крім -2
 Г. a – будь-яке число, крім -2 і 3
5. Скоротіть дріб $\frac{2p+4}{p^2-4}$.
- А. $\frac{2}{p-2}$ Б. $\frac{2}{p+2}$ В. $\frac{2}{p}$ Г. $\frac{2}{2-p}$
6. Виконайте дію $\frac{4m}{m-a} + \frac{4a}{a-m}$.
- А. $\frac{4m+4a}{m-a}$ Б. 4 В. -4 Г. $\frac{4m+4a}{a-m}$
- 3** 7. Для яких значень x дріб $\frac{(3+x)(1-x)}{5x-5}$ дорівнює нулю?
- А. -3 і 1 Б. -3
 В. 1 Г. Таких значень x немає

8. Спростіть вираз $\frac{2m}{m-3} + \frac{m}{m+3} + \frac{2m^2}{9-m^2}$.
- А. $\frac{m}{m-3}$ Б. $\frac{m}{m+3}$ В. $\frac{5m^2+3m}{m^2-9}$ Г. $-\frac{1}{3}$
9. Подайте дріб $\frac{m^3 - m^4 + 3}{m^3}$ у вигляді суми цілого виразу та дробу.
- А. $1 - \frac{1}{m} + \frac{3}{m^3}$ Б. $1 + \frac{3}{m^3}$
- В. $1 - m + \frac{3}{m^3}$ Г. $1 - m + \frac{1}{m^3}$
- 4 10. Для яких значень x вираз $\frac{x^2 - 9}{|x + 1| - 4}$ має зміст?
- А. x – будь-яке число
 Б. x – будь-яке число, крім 3
 В. x – будь-яке число, крім -5
 Г. x – будь-яке число, крім 3 і -5
11. Для яких значень x дріб $\frac{x^2 - 9}{|x + 1| - 4}$ дорівнює нулю?
- А. 3 Б. 3 і -3 В. -3 Г. 3; -5
12. Знайдіть значення виразу $\frac{2(x-4y)}{(x-2)(y-1)} - \frac{x^2-8y}{(2-x)(1-y)}$, якщо $x = 13$, $y = 0,99$.
- А. 1300 Б. -1300 В. 130 Г. -130

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

- 3 13. Установіть відповідність між виразом (1–3) і його значенням (А–Г), якщо $x = 2,5$.

Вираз

Значення виразу

1. $\frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}$
2. $\frac{4x}{x-2} + \frac{8}{2-x}$
3. $\frac{100}{10x - x^2} + \frac{x}{x-10}$

- А. 4
- Б. 4,5
- В. 5
- Г. 5,5

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–4

- 1** 1. Які з виразів є цілими, а які – дробовими:
 1) $\frac{1}{3}a^2b$; 2) $\frac{x-y}{x}$; 3) $\frac{c+2}{9}$; 4) $p^2 - p - 19$?
2. Скоротіть дріб: 1) $\frac{m^2}{mn}$; 2) $\frac{4ab}{4bc}$.
3. Виконайте дію: 1) $\frac{a-b}{n} + \frac{b}{n}$; 2) $\frac{x}{2} - \frac{3}{y}$.
- 2** 4. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:
 1) $\frac{5}{x(x-1)}$; 2) $\frac{2a}{a+2} + \frac{1}{a-3}$.
5. Скоротіть дріб:
 1) $\frac{16am}{20bm}$; 2) $\frac{12am^2}{8mc}$; 3) $\frac{2m-6}{m^2-9}$; 4) $\frac{ax+2a}{x^2+4x+4}$.
6. Виконайте дію:
 1) $\frac{3a}{a-b} + \frac{3b}{b-a}$; 2) $\frac{5x+y}{x^2y} + \frac{x-5y}{xy^2}$.
- 3** 7. Спростіть вираз $\frac{2b}{b-4} + \frac{b}{b+4} + \frac{2b^2}{16-b^2}$.
8. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:
 1) $\frac{c^2 - c^3 + 5}{c^2}$; 2) $\frac{p^2 - p - 2}{p-1}$.
- 4** 9. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - 4x}{16 - 4x}$.

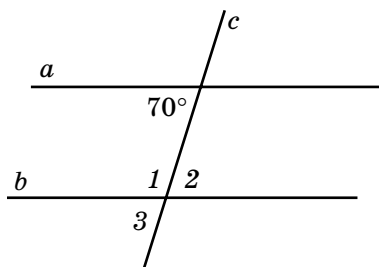
Додаткові завдання

- 4** 10. Знайдіть:
 1) область визначення виразу $\frac{x^2 - 16}{|x+1| - 5}$;
 2) значення x , для яких дріб $\frac{x^2 - 16}{|x+1| - 5}$ дорівнює нулю.
11. Спростіть вираз $\frac{3(a-2b)}{(a-3)(b-4)} - \frac{a^2 - 6b}{(3-a)(4-b)}$.

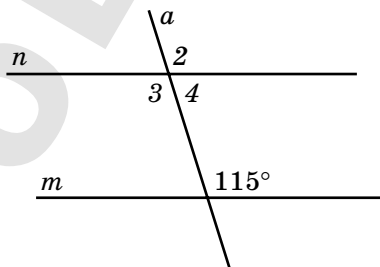
ПОВТОРЮЄМО ГЕОМЕТРІЮ ЗА 7 КЛАС

Елементарні геометричні фігури та їх властивості. Взаємне розміщення прямих на площині

- 1.** (Усно.) Який з поданих кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:
- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\angle A = 32^\circ$; | 2) $\angle B = 90^\circ$; | 3) $\angle C = 150^\circ$; |
| 4) $\angle D = 59^\circ 30'$; | 5) $\angle K = 180^\circ$; | 6) $\angle N = 120^\circ$; |
| 7) $\angle L = 89^\circ$; | 8) $\angle M = 113^\circ 20'$; | |
- 2.** Знайдіть кут, суміжний з кутом:
1) 25° ; 2) 90° ; 3) 116° .
- 3.** Знайдіть кут, суміжний з кутом: 1) 140° ; 2) 83° .
- 4.** $a \parallel b$, c – січна (мал. 1). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.



Мал. 1



Мал. 2

- 5.** $m \parallel n$, a – січна (мал. 2). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.
- 6.** Точка K належить відрізку CD . Знайдіть:
- CD , якщо $CK = 28$ мм, $KD = 4$ см;
 - KD , якщо $CD = 5$ дм, $CK = 2$ дм 6 см.
- 7.** Точка M належить відрізку AB . Знайдіть:
- AM , якщо $AB = 5$ см, $MB = 34$ мм;
 - AB , якщо $AM = 3$ дм, $MB = 2$ дм 5 см.
- 8.** Промінь OM проходить між сторонами кута BOC . Знайдіть градусну міру кута BOM , якщо $\angle BOC = 118^\circ$, $\angle MOC = 72^\circ$.
- 9.** Промінь OK проходить між сторонами кута AOD . Знайдіть градусну міру цього кута, якщо $\angle AOK = 42^\circ$, $\angle KOD = 37^\circ$.
- 10.** Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 115° . Знайдіть інші кути та кут між прямими.
- 11.** Накресліть відрізки KL і AB та промінь CD так, щоб відрізок KL був паралельний променю CD і перпендикулярний до відрізка AB .
- 12.** Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 75° . Знайдіть градусні міри решти семи кутів.
- 13.** Один з кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 130° . Знайдіть інші сім кутів.

- 3** 14. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них:
 1) на 40° менший від іншого; 2) становить 80 % від іншого.

15. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них:

- 1) удвічі більший за інший; 2) становить $\frac{2}{7}$ від іншого.

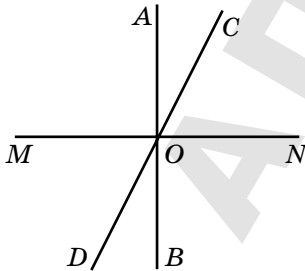
16. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте назву обласного центра України.

Точка K належить відрізку AB завдовжки 20 см. Знайдіть довжини відрізків AK і KB , якщо:	AK	KB
AK утричі менший від KB	В	Я
KB становить $\frac{2}{3}$ від відрізку AK	И	Н
$AK : KB = 3 : 7$	І	Ц

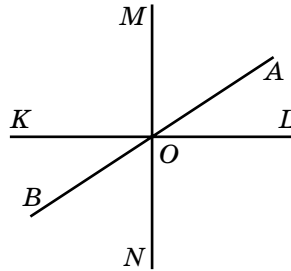
5 см	6 см	8 см	8 см	12 см	14 см	15 см

17. Прямі AB , MN і CD перетинаються в точці O , причому $AB \perp MN$ (мал. 3). Знайдіть:

- 1) $\angle DOB$, якщо $\angle CON = 70^\circ$;
 2) $\angle AOC$, якщо $\angle DON = 105^\circ$.



Мал. 3



Мал. 4

18. Прямі MN , KL і AB перетинаються в точці O , причому $MN \perp KL$ (мал. 4). Знайдіть:

- 1) $\angle KOB$, якщо $\angle NOA = 120^\circ$;
 2) $\angle KOA$, якщо $\angle BON = 40^\circ$.

19. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

- 1) один з них утричі більший за інший;
 2) один з них на 25 % більший за інший.

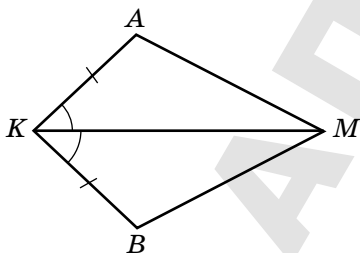
20. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох прямих січною, якщо:

- 1) один з них на 30° менший від іншого;
 2) їхні градусні міри відносяться як $3 : 2$.

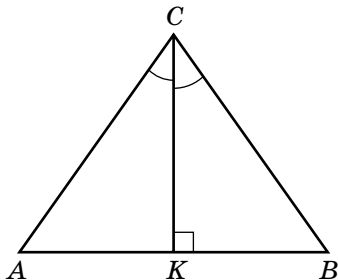
4 21. Кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими a і m . Чи можна стверджувати, що прямі b і m паралельні?

Трикутники. Ознаки рівності трикутників

- 1** 22. (Усно.) Чи існує трикутник з кутами:
 1) $60^\circ, 60^\circ, 61^\circ$; 2) $20^\circ, 70^\circ, 90^\circ$;
 3) $10^\circ, 100^\circ, 70^\circ$; 4) $50^\circ, 60^\circ, 80^\circ$?
23. (Усно.) Чи існує трикутник зі сторонами:
 1) 7 см, 2 см, 9 см; 2) 12 см, 10 см, 8 см;
 3) 3 см, 4 см, 7 см; 4) 8 см, 8 см, 15 см?
24. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 5 см, а бічна сторона на 2 см більша за основу.
25. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 10 см, а основа на 3 см менша від бічної сторони.
26. У трикутнику ABC , відрізок BK – медіана, $AK = 5$ см. Знайдіть KC і AC .
27. У трикутнику ABC відрізок CM – бісектриса, $\angle ACB = 80^\circ$. Знайдіть градусні міри, кутів ACM і BCM .
- 2** 28. Доведіть, що $\triangle AKM = \triangle BKM$ (мал. 5), якщо $AK = BK$ і $\angle AKM = \angle BKM$.



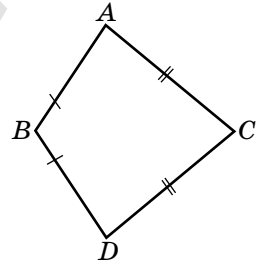
Мал. 5



Мал. 6

29. Доведіть, що $\triangle ACK = \triangle BCK$ (мал. 6), якщо $CK \perp AB$ і $\angle ACK = \angle BCK$.
30. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70° . Знайдіть кут при вершині цього трикутника.
31. Знайдіть кут при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при його вершині дорівнює 100° .
32. Зовнішній кут при вершині C трикутника ABC дорівнює 110° . Знайдіть кут A , якщо $\angle B = 60^\circ$.
33. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 130° . Знайдіть внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, якщо другий внутрішній кут, не суміжний з ним, дорівнює 80° .

34. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = 60^\circ$. Знайдіть:
1) AC , якщо $AB = 10$ см; 2) AB , якщо $AC = 4$ дм.
35. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = 30^\circ$. Знайдіть:
1) AB , якщо $BC = 8$ дм; 2) BC , якщо $AB = 16$ см.
36. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,7 см і 6,3 см. Якому найменшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?
37. Дві сторони трикутника дорівнюють 4,8 см і 2,6 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона трикутника?
38. Одна зі сторін трикутника утричі менша від другої і на 10 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 45 см.
39. Одна зі сторін трикутника на 3 см менша від другої й удвічі менша від третьої. Периметр трикутника дорівнює 35 см. Знайдіть сторони трикутника.
40. На малюнку 7 $AB = BD$, $AC = CD$. Доведіть, що BC – бісектриса кута ABD .
41. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте ім'я та прізвище видатного українського політичного, державного і військового діяча. Дізнайтеся з інтернету про його біографію та досягнення.



Мал. 7

У $\triangle ABC$: $\angle A = 60^\circ$. Визначте градусні міри кутів B і C , якщо:	$\angle B$	$\angle C$
кут B на 20° менший від кута C	Л	О
кут B удвічі більший за кут C	Р	И
$\angle B : \angle C = 1 : 3$	П	К

30°	40°	50°	40°	30°

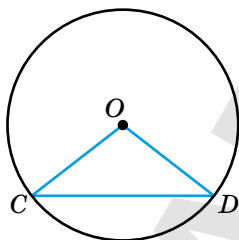
70°	80°	50°	40°	90°

42. Один з кутів трикутника на 20° менший від другого й удвічі менший від третього. Знайдіть кути трикутника.
43. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один з них на 26° більший за інший;
2) один з них становить 80 % від іншого.
44. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один з них у 5 разів більший за інший;
2) їхні градусні міри відносяться як 3 : 2.
45. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено висоту CK . Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо периметр трикутника ACK дорівнює 30 см і $CK = 12$ см.

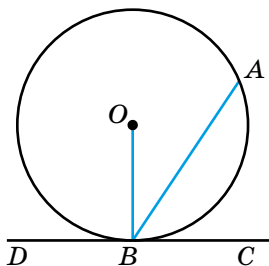
46. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено медіану AM . Знайдіть периметр трикутника ABM , якщо периметр трикутника ABC дорівнює 32 см і $AM = 8$ см.
47. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них на 24° більший за інший. Скільки випадків слід розглянути?
48. Чи існує трикутник з периметром 20 см, одна сторона якого на 4 см більша за другу і на 3 см менша від третьої?

Коло і круг

- 1 49. (Усно.) Знайдіть:
- 1) діаметр кола, якщо його радіус дорівнює 6 см; 7 см;
 - 2) радіус кола, діаметр якого дорівнює 4 см; 5 см.
50. Знайдіть градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:
- 1) 80° ;
 - 2) 200° .
51. Визначте градусну міру центрального кута, якщо відповідний йому вписаний кут дорівнює:
- 1) 50° ;
 - 2) 110° .
- 2 52. На малюнку 8 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:
- 1) кута O , якщо $\angle C = 46^\circ$;
 - 2) кута D , якщо $\angle O = 96^\circ$.



Мал. 8



Мал. 9

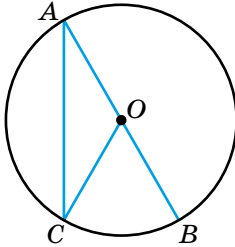
53. На малюнку 8 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:
- 1) кута C , якщо $\angle O = 94^\circ$;
 - 2) кута O , якщо $\angle D = 44^\circ$.
54. На малюнку 9 точка O – центр кола, CD – дотична до кола, точка B – точка дотику. Знайдіть:
- 1) $\angle OBA$, якщо $\angle ABC = 62^\circ$;
 - 2) $\angle DBA$, якщо $\angle OBA = 30^\circ$.
55. На малюнку 9 точка O – центр кола, CD – дотична до кола, точка B – точка дотику. Знайдіть:
- 1) $\angle ABC$, якщо $\angle OBA = 32^\circ$;
 - 2) $\angle OBA$, якщо $\angle DBA = 136^\circ$.
56. Точки A і B належать колу і лежать по різні боки від хорди CD , $\angle CAD = 76^\circ$. Знайдіть $\angle CBD$.
57. Радіуси двох кіл дорівнюють 8 см і 5 см. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо кола мають:
- 1) внутрішній дотик;
 - 2) зовнішній дотик.

58. Радіуси двох кіл дорівнюють 4 см і 7 см. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо кола мають:

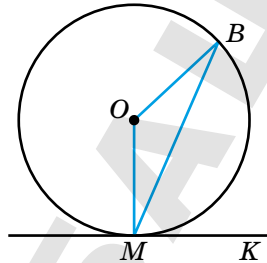
1) зовнішній дотик;

2) внутрішній дотик.

59. На малюнку 10 точка O – центр кола, $\angle COB = 40^\circ$. Знайдіть $\angle CAB$.



Мал. 10



Мал. 11

60. На малюнку 10 точка O – центр кола, $\angle ACO = 21^\circ$. Знайдіть $\angle COB$.

61. Прямі MK – дотична до кола, точка O – центр кола (мал. 11). Знайдіть $\angle BMK$, якщо $\angle BOM = 130^\circ$.

62. Прямі MK – дотична до кола, точка O – центр кола (мал. 11). Знайдіть $\angle MOB$, якщо $\angle KMB = 70^\circ$.

63. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 16 см, а їх радіуси відносяться як 5 : 3. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони мають:

1) внутрішній дотик;

2) зовнішній дотик.

64. Прямі AB і AC дотикаються до кола із центром O в точках B і C . Знайдіть BC , якщо $AB = 4$ см, $\angle OAC = 30^\circ$.

65. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 2 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр цього трикутника.

66. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 4 см і 3 см, починаючи від вершини, що протилежна основі. Знайдіть периметр цього трикутника.

67. Рівнобедрений трикутник ABC з основою AB вписано у коло з центром у точці O , $\angle AOB = 100^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC . Скільки розв'язків має задача?

ТЕМА 2

ЧОТИРИКУТНИКИ. ПАРАЛЕЛОГРАМ І ЙОГО ВИДИ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

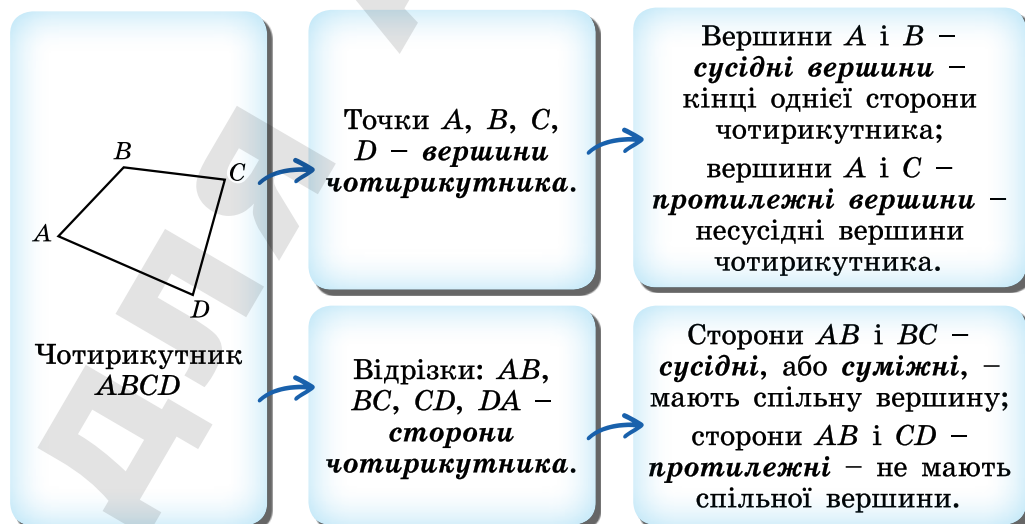
- **пригадаєте** поняття прямокутника та квадрата;
- **дізнаєтеся** про паралелограм і його властивості та ознаки; види паралелограма, їх властивості та ознаки;
- **навчитесь** обґрунтовувати належність чотирикутника до певного виду, застосовувати вивчені означення та властивості до розв'язування задач.

§ 5. Чотирикутник, його елементи. Сума кутів чотирикутника

1. Чотирикутник і його елементи

Чотирикутником називають фігуру, що складається із чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають. При цьому жодні три з цих точок не лежать на одній прямій, а відрізки, які їх сполучають, не мають жодних інших спільних точок, крім даних.

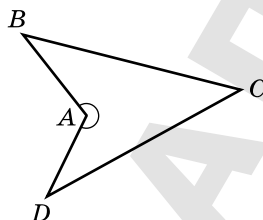
Будь-який чотирикутник обмежує певну частину площини, яка є внутрішньою областю чотирикутника.



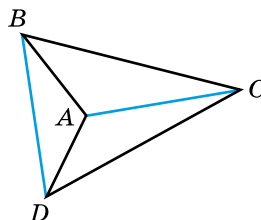


2. Види чотирикутників

Один з кутів чотирикутника може бути більшим за розгорнутий. Наприклад, на малюнку 5.1 кут A чотирикутника $ABCD$ є більшим за розгорнутий. Такий чотирикутник називають **неопуклим**. Якщо всі кути чотирикутника менші від 180° , то його називають **опуклим**. Діагоналі опуклого чотирикутника перетинаються (див. мал. вище), а неопуклого не перетинаються (мал. 5.2).



Мал. 5.1



Мал. 5.2

3. Сума кутів опуклого чотирикутника

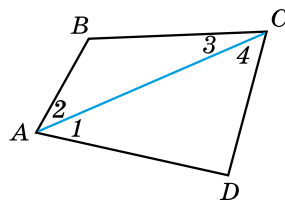


Теорема (про суму кутів чотирикутника). Сума кутів чотирикутника дорівнює 360° .

Доведення. Нехай $ABCD$ – деякий чотирикутник.

1) Проведемо в ньому діагональ AC (мал. 5.3).
Тоді $\angle A = \angle 1 + \angle 2$, $\angle C = \angle 3 + \angle 4$.

2) Враховуючи, що $\angle 2 + \angle B + \angle 3 = 180^\circ$ (як сума кутів $\triangle ABC$), $\angle 1 + \angle D + \angle 4 = 180^\circ$ (як сума кутів $\triangle ADC$), матимемо: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle 3 + \angle 4 + \angle D = (\angle 2 + \angle B + \angle 3) + (\angle 1 + \angle D + \angle 4) = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$. ■



Мал. 5.3

Приклад. Знайти кути чотирикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як $3 : 10 : 4 : 1$. Опуклим чи неопуклим є цей чотирикутник?

Розв'язання. Нехай кути чотирикутника дорівнюють $3x$, $10x$, $4x$ і x . Маємо рівняння $3x + 10x + 4x + x = 360^\circ$, звідки $x = 20^\circ$. Отже, кути чотирикутника дорівнюють $3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$, $10 \cdot 20^\circ = 200^\circ$, $4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$ і 20° . Оскільки один з кутів чотирикутника більший за 180° , то цей чотирикутник – неопуклий.

Відповідь: 60° , 200° , 80° , 20° ; неопуклий.



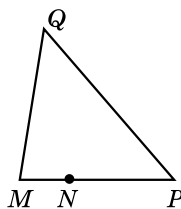
Яку фігуру називають чотирикутником? Що називають вершинами чотирикутника, сторонами чотирикутника? Які вершини чотирикутника називають сусідніми, які – протилежними? Що таке діагоналі чотирикутника? Які сторони чотирикутника називають сусідніми, які – протилежними? Що називають периметром чотирикутника? Що називають кутами чотирикутника? Які кути чотирикутника називають протилежними, а які – сусідніми? Який чотирикутник називають неопуклим, а який – опуклим? Сформулюйте й доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.



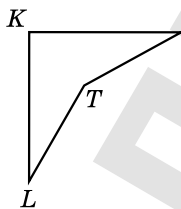
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

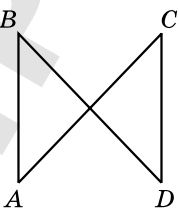
5.1. (Усно.) Які з фігур (мал. 5.4–5.7) є чотирикутниками? Назвіть опуклі та неопуклі чотирикутники.



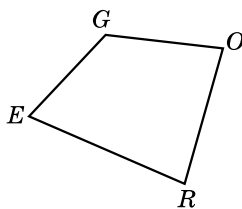
Мал. 5.4



Мал. 5.5



Мал. 5.6



Мал. 5.7

5.2. Назвіть пари протилежних сторін чотирикутника $EGOR$ (мал. 5.7), пари сусідніх сторін. Назвіть пари сусідніх вершин цього чотирикутника, пари протилежних вершин.

5.3. Накресліть чотирикутник $KLMN$. Назвіть пари його протилежних сторін, сусідніх сторін, протилежних вершин, сусідніх вершин. Проведіть діагоналі цього чотирикутника.

5.4. Накресліть опуклий чотирикутник $ABCD$ і неопуклий $PMLK$. Проведіть діагональ у кожному з них.

5.5. Чи існує чотирикутник з кутами:

- 1) 70° , 90° , 100° і 120° ; 2) 130° , 60° , 70° і 100°

5.6. Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати:

- 1) 140° , 60° , 90° і 70° ; 2) 120° , 110° , 80° і 60°

2

5.7. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють:

- 1) 150° , 110° і 80° ; 2) 80° , 60° і 30° .

Яким – опуклим чи неопуклим – є кожний чотирикутник?

5.8. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють:

- 1) 20° , 70° і 80° ; 2) 120° , 50° і 40° .

Яким – опуклим чи неопуклим – є кожний чотирикутник?

5.9. Знайдіть периметр чотирикутника, сторони якого дорівнюють 34 мм, 2,5 см, 0,4 дм і 0,07 м.

5.10. Знайдіть периметр чотирикутника, сторони якого дорівнюють 0,08 м, 0,7 дм, 6,3 см і 52 мм.

5.11. Чи можуть усі кути чотирикутника бути:

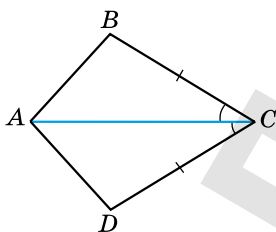
- 1) гострими; 2) прямими; 3) тупими?

5.12. Один з кутів чотирикутника дорівнює 120° , а інші – між собою рівні. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.

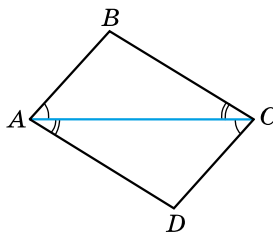
5.13. Периметр чотирикутника дорівнює 60 см, а одна з його сторін – 24 см. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника, якщо вони між собою рівні.

5.14. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 5.8) $BC = CD$ і $\angle ACB = \angle ACD$. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

5.15. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 5.9) $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle CAD$. Доведіть, що $AB = CD$.



Мал. 5.8



Мал. 5.9

3 **5.16.** Знайдіть сторони чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 4, 5, 8 і 9, а периметр чотирикутника дорівнює 65 см.

5.17. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 4, 5, 7 і 8.

5.18. Знайдіть невідомі кути чотирикутника, якщо перший з них дорівнює 90° , другий і третій відносяться як 7 : 5, а четвертий дорівнює півсумі другого та третього.

5.19. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника, периметр якого дорівнює 54 см, одна зі сторін 18 см, друга та третя відносяться як 7 : 3, а четверта дорівнює пів різниці другої та третьої.

5.20. Доведіть, що в кожному чотирикутнику є кут, не більший за 90° .

5.21. Доведіть, що в кожному чотирикутнику є кут, не менший від 90° .

5.22. Чи може кут чотирикутника бути більшим за суму інших його кутів?

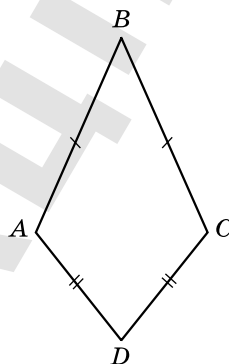
4 5.23. Побудуйте чотирикутник зі сторонами 6 см, 6 см, 3 см, 4 см і кутом 50° між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?

5.24. Побудуйте чотирикутник зі сторонами 5 см, 5 см, 4 см, 3 см і кутом 70° між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?

5.25. Опуклий чотирикутник називають *дельтоїдом*, якщо він має дві пари рівних сусідніх сторін (мал. 5.10). Доведіть, що:

- 1) діагональ BD ділить навпіл і кут B , і кут D ;
- 2) діагоналі дельтоїда взаємно перпендикулярні.

5.26. Периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 29 см, периметр трикутника ADB – 20 см, а трикутника CDB – 21 см. Знайдіть довжину діагоналі BD .



Мал. 5.10



Вправи для повторення

5.27. Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 70° . Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

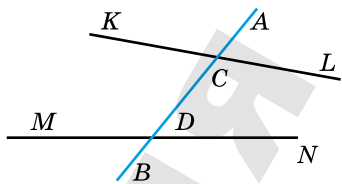
5.28. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює 70° . Скільки розв'язків має задача?

5.29. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює 60° , а сума меншого катета й медіани, проведеної до гіпотенузи, – 10 см. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.

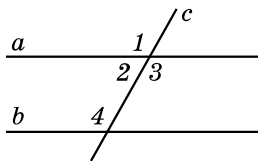


Піготуйтеся до вивчення нового матеріалу

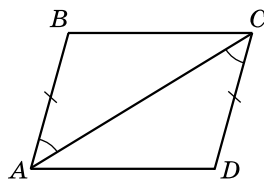
5.30. Прямая AB є січною для прямих KL і MN (мал. 5.11). Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів, внутрішніх різносторонніх кутів і відповідних кутів.



Мал. 5.11



Мал. 5.12



Мал. 5.13

5.31. Яким є взаємне розміщення прямих a і b (мал. 5.12), якщо:

- 1) $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$;
- 2) $\angle 1 > \angle 4$;
- 3) $\angle 3 = 120^\circ$, $\angle 4 = 121^\circ$;
- 4) $\angle 2 = 60^\circ$, $\angle 4 = 119^\circ$;
- 5) $\angle 1 = \angle 4 = 122^\circ$;
- 6) $\angle 3 = \angle 4$?

5.32. 1) Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 5.13), якщо $AB = CD$ і $\angle BAC = \angle ACD$.

- 2) Доведіть, що $BC = AD$ і $\angle BCA = \angle CAD$.
- 3) Чи паралельні прямі BC і AD ?



Життєва математика

5.33. Восьмикласники Тарас і Аліса ведуть здоровий спосіб життя. Кілька разів на тиждень вони пробігають доріжкою навколо парку, який має форму прямокутника зі сторонами 150 м і 200 м. Хлопець пробігає доріжкою 4 рази, а дівчина – тричі. Швидкість бігу Тараса – 16 км/год, Аліси – 14 км/год. Хто витрачає більше часу на тренування та на скільки? Відповідь дайте з точністю до секунди.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

5.34. (Всеукраїнська олімпіада з математики, 1964 р.) Знайдіть найбільше значення n , для якого n точок можна розмістити на площині так, щоб кожні три з них були вершинами прямокутного трикутника.

§ 6. Паралелограм, його властивості й ознаки

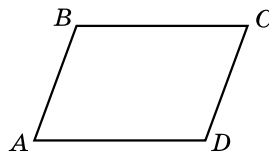
1. Означення паралелограма та його властивості

Паралелограмом називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.

На малюнку 6.1 зображено паралелограм $ABCD$, де $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Розглянемо *властивості паралелограма*.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180° .

Справді, наприклад, кути A і B паралелограма $ABCD$ (мал. 6.1) є внутрішніми односторонніми кутами для паралельних прямих AD і BC та січної AB . Тому $\angle A + \angle B = 180^\circ$. Аналогічно цю властивість можна довести для будь-якої іншої пари сусідніх кутів паралелограма.



Мал. 6.1

2. Паралелограм є опуклим чотирикутником.

Оскільки $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то $\angle A < 180^\circ$, $\angle B < 180^\circ$. Аналогічно $\angle C < 180^\circ$, $\angle D < 180^\circ$. Тому паралелограм – опуклий чотирикутник. ■

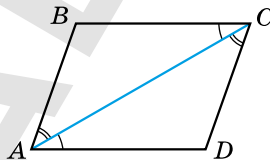
3. У паралелограмі протилежні сторони рівні й протилежні кути рівні.

Доведення. Розглянемо паралелограм $ABCD$ (мал. 6.2).

1) Діагональ AC розбиває його на два трикутники ABC і ADC . AC – спільна сторона цих трикутників й $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle CAB = \angle ACD$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині січною AC паралельних прямих AD і BC , AB і CD відповідно).

2) Тоді $\triangle ABC = \triangle CDA$ (за стороною і двома прилеглими кутами). Отже, $AB = CD$, $BC = AD$ і $\angle B = \angle D$ (як відповідні елементи рівних трикутників).

3) Оскільки $\angle BAC + \angle CAD = \angle BCA + \angle DCA$, то $\angle BAD = \angle BCD$. ■



Мал. 6.2

4. Периметр паралелограма $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.

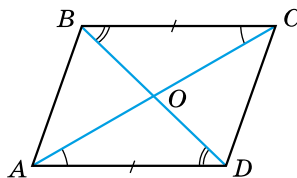
5. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Доведення. Нехай O – точка перетину діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$ (мал. 6.3).

1) $AD = BC$ (як протилежні сторони паралелограма), $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle BDA = \angle DBC$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січними AC і BD відповідно).

2) Отже, $\triangle AOD = \triangle COB$ (за стороною і двома прилеглими кутами).

3) Тоді $AO = OC$, $BO = OD$ (як відповідні сторони рівних трикутників). ■



Мал. 6.3

Приклад 1. Дано: $ABCD$ паралелограм, AK – бісектриса кута A , $BK = 5$ см, $KC = 3$ см (мал. 6.4). Знайти: P_{ABCD} .

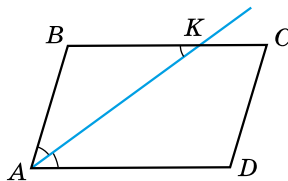
Розв'язання. 1) $BC = BK + KC = 5 + 3 = 8$ (см).

2) $\angle KAD = \angle BKA$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AK).

3) $\angle KAD = \angle KAB$ (за умовою), тоді $\angle BKA = \angle KAB$. Отже, за ознакою рівнобедреного трикутника: $\triangle ABK$ – рівнобедрений, $AB = BK = 5$ (см).

4) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(5 + 8) = 26$ (см).

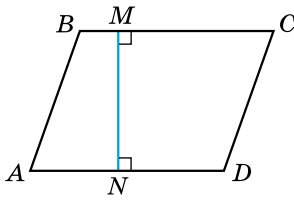
Відповідь: 26 см.



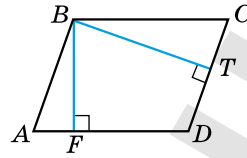
Мал. 6.4

2. Означення висоти паралелограма

Висотою паралелограма називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки сторони паралелограма до прямої, що містить протилежну сторону.



Мал. 6.5



Мал. 6.6

На малюнку 6.5 MN – висота паралелограма; $MN \perp AD$, $MN \perp BC$.



З кожної вершини паралелограма можна провести дві висоти.

Наприклад, на малюнку 6.6 BF і BT – висоти паралелограма, проведені відповідно до сторін AD і CD .

3. Ознаки паралелограма

Розглянемо ознаки паралелограма.

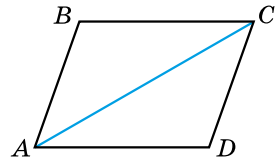


Теорема (ознаки паралелограма). Якщо в чотирикутнику: 1) дві сторони рівні й паралельні, або 2) протилежні сторони попарно рівні, або 3) діагоналі перетинаються й точкою перетину діляться навпіл, або 4) протилежні кути попарно рівні, – то чотирикутник є паралелограмом.

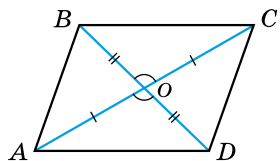
Доведення. 1) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$ і $AD \parallel BC$ (мал. 6.7). Проведемо діагональ AC . Розглянемо $\triangle CAD$ і $\triangle ACB$. $\angle CAD = \angle BCA$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AC). AC – спільна сторона, $AD = BC$ (за умовою). Отже, $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за двома сторонами й кутом між ними). Тоді $\angle ACD = \angle CAB$ (як відповідні). Але це різносторонні кути, що утворилися при перетині прямих AB і CD січною AC . Тому $AB \parallel CD$ (за ознакою паралельності прямих). Отже, у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно паралельні. Тому $ABCD$ – паралелограм.

2) Нехай у чотирикутнику $ABCD$: $AD = BC$ і $AB = CD$ (мал. 6.7). Проведемо діагональ AC . Тоді $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за трьома сторонами). Тому $\angle ACD = \angle CAB$, а отже, $AB \parallel CD$ (за ознакою паралельності прямих). Аналогічно доводимо, що $AD \parallel BC$. Отже, $ABCD$ – паралелограм.

3) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O і $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 6.8). $\angle AOD = \angle COB$ (як вертикальні). Тому $\triangle AOD = \triangle COB$ (за двома сторонами та кутом між ними). Звідси $AD = BC$. Аналогічно доводимо, що $AB = CD$. Зважаючи на п. 2 цієї теореми, приходимо до висновку, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 6.7



Мал. 6.8

4) Нехай у паралелограмі $ABCD$: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (мал. 6.1). Оскільки $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$, то $\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360^\circ$, $2(\angle A + \angle B) = 360^\circ$; $\angle A + \angle B = 180^\circ$. Але $\angle A$ і $\angle B$ – внутрішні односторонні кути для прямих AD і BC та січної AB . Тому $AD \parallel BC$ (за ознакою паралельності прямих). Аналогічно доводимо, що $AB \parallel CD$. Отже, $ABCD$ – паралелограм. ■

Приклад 2. У чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$. Довести, що $ABCD$ – паралелограм.

Доведення. Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник (мал. 6.7).

1) Розглянемо $\triangle CAD$ і $\triangle ACB$. AC – їхня спільна сторона, $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$ (за умовою).

2) Отже, $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за двома сторонами та кутом між ними).

3) Тому $AB = CD$. Але тоді в чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно рівні, тому він є паралелограмом. ■

Знайдіть кілька інших способів доведення цієї задачі.

А ще раніше...

Про деякі види чотирикутників (квадрати, прямокутники, рівнобічні та прямокутні трапеції) знали ще давньоєгипетські та вавилонські математики.

Термін «паралелограм» – грецького походження, вважають, що його ввів Евклід (близько 300 р. до н. е.). Про паралелограм і деякі його властивості знали учні школи Піфагора («піфагорійці»).

У «Началах» Евкліда доведено таку теорему: у паралелограмі протилежні сторони рівні і протилежні кути рівні, а діагональ поділяє його навпіл, але не згадується про те, що точка перетину діагоналей паралелограма ділить кожну з них навпіл.

Евклід також не згадує ані про прямокутник, ані про ромб.

Повну теорію паралелограмів було розроблено лише в кінці середньовіччя, а в підручниках вона з'явилася в XVII ст. Усі теореми та властивості паралелограма в цих підручниках ґрунтувалися на аксіомі паралельності Евкліда.

Термін «діагональ» (з грец. «діа» – «через», «гоніос» – «кут») – відрізок, що сполучає вершини кутів.

Евклід, як і більшість математиків того часу, для назви відрізка, що сполучає протилежні вершини чотирикутника, зокрема прямокутника, використовував інший термін – «діаметр». Це можна пояснити тим, що перші геометри свої міркування ґрунтували на вписаних у коло прямокутниках. У середні віки для назви згаданого відрізка використовували обидва терміни. Лише у XVIII ст. термін «діагональ» став загальноживим.



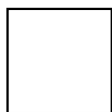
Яку фігуру називають паралелограмом? ○ Сформулюйте й доведіть властивості паралелограма. ○ Що називають висотою паралелограма? ○ Сформулюйте й доведіть ознаки паралелограма.



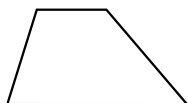
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

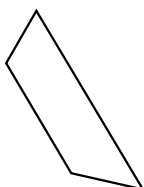
6.1. Серед чотирикутників, зображених на малюнках 6.9–6.14, укажіть паралелограми.



Мал. 6.9



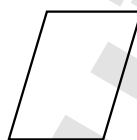
Мал. 6.10



Мал. 6.11



Мал. 6.12



Мал. 6.13



Мал. 6.14

- 6.2.** Накресліть паралелограм $ABCD$, у якого кут D тупий.
- 6.3.** Накресліть паралелограм $KLMN$, у якого кут K гострий.
- 6.4.** (Усно.) Одна зі сторін паралелограма дорівнює 6 см. Яка довжина сторони, що їй протилежна?
- 6.5.** Один з кутів паралелограма дорівнює 50° . Знайдіть інші його кути.
- 6.6.** Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них дорівнює 110° .
- 2** **6.7.** Знайдіть периметр паралелограма, у якого одна сторона дорівнює 12 см, а друга – на 3 см більша за неї.
- 6.8.** Знайдіть периметр паралелограма, у якого одна сторона дорівнює 18 см, а друга – удвічі від неї менша.
- 6.9.** Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище видатної української жінки-математика, науковиці, доктора фізико-математичних наук. Дізнайтеся з інтернету про її життєвий і творчий шлях.

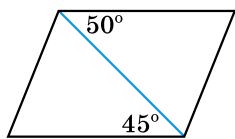


Знайдіть кути A і B паралелограма $ABCD$, якщо:	$\angle A$	$\angle B$
$\angle A + \angle C = 120^\circ$	І	К
кут A на 20° більший за кут B	Е	Ч
кут A утричі менший від кута B	В	О
$\angle A : \angle B = 3 : 2$	Н	Р

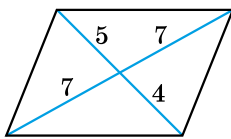
45°	60°	72°	80°	100°	108°	120°	135°

- 6.10.** Знайдіть усі кути паралелограма, якщо:
- сума двох з них дорівнює 200° ;
 - один з них на 40° менший від іншого;
 - один з них удвічі більший за інший;
 - градусні міри двох з них відносяться як 4 : 5.
- 6.11.** У паралелограмі $ABCD$ $\angle BAD = 80^\circ$, $\angle ACD = 50^\circ$. Знайдіть $\angle ACB$ і $\angle ABC$.
- 6.12.** У паралелограмі $ABCD$ $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle BCA = 40^\circ$. Знайдіть кути паралелограма.

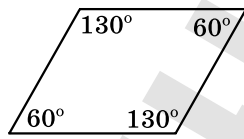
6.13. (Усно.) Які помилки допущено в зображенні паралелограма на малюнках 6.15–6.17?



Мал. 6.15



Мал. 6.16



Мал. 6.17

6.14. Периметр паралелограма дорівнює 40 см. Знайдіть його сторони, якщо:

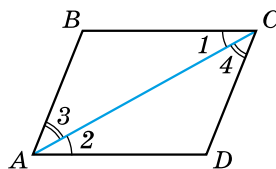
- 1) одна з них на 4 см більша за іншу;
- 2) вони відносяться як 3 : 7.

6.15. Периметр паралелограма дорівнює 36 дм. Знайдіть його сторони, якщо:

- 1) одна з них на 2 дм менша від іншої;
- 2) одна з них у 5 разів більша за іншу.

6.16. O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайдіть діагональ AC , якщо $BD = 20$ см, $AB = 15$ см, а периметр трикутника AOB дорівнює 32 см.

6.17. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 6.18) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 6.18

6.18. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 6.18). Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.

6.19. Побудуйте паралелограм за двома сторонами й кутом між ними.

6.20. Побудуйте паралелограм за двома сторонами та діагоналлю.

3 6.21. Бісектриса кута паралелограма перетинає його сторону під кутом 48° . Знайдіть кути паралелограма.

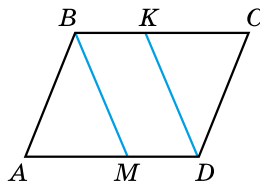
6.22. У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A ділить сторону BC на відрізки $BM = 5$ см і $MC = 7$ см. Знайдіть периметр паралелограма.

6.23. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 4$ см, $BC = 12$ см. Бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці P . Знайдіть BP і PC .

6.24. Побудуйте паралелограм за стороною і діагоналями.

6.25. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями і кутом між ними.

6.26. На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ (мал. 6.19) позначено точки M і K так, що $\angle ABM = \angle CDK$. Доведіть, що $BMDK$ – паралелограм.



Мал. 6.19

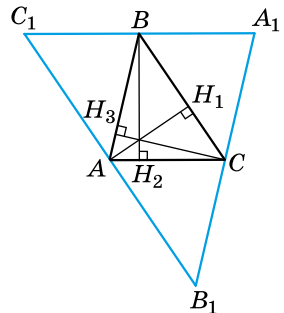
6.27. На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ (мал. 6.19) позначено точки M і K так, що $AM = KC$. Доведіть, що $BMDK$ – паралелограм.

- 6.28.** Доведіть, що бісектриси двох сусідніх кутів паралелограма взаємно перпендикулярні.
- 6.29.** У паралелограмі гострий кут дорівнює 60° . Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, ділить протилежну сторону на відрізки 3 см і 5 см, починаючи від вершини гострого кута. Знайдіть периметр паралелограма.
- 6.30.** У паралелограмі $ABCD$ $AB = 6$ см, $\angle B = 120^\circ$. Висота BK ділить сторону AD на два однакових відрізки. Знайдіть периметр паралелограма.
- 6.31.** У паралелограмі $ABCD$ з вершини гострого кута A проведено висоти AL і AK , $\angle LAK = 140^\circ$. Знайдіть кут C паралелограма.
- 6.32.** У паралелограмі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BM і BN , $\angle MBN = 70^\circ$. Знайдіть кут D паралелограма.
- 4** **6.33.** Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ ділить сторону AD на два відрізки AK і KD так, що $AK - KD = 1$ см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.
- 6.34.** Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на два відрізки BK і KC так, що $BK : KC = 3 : 7$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 78 см.
- 6.35.** Два кути паралелограма відносяться як 5 : 7. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини:
1) тупого кута; 2) гострого кута.
- 6.36.** Один з кутів паралелограма на 12° більший за інший. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини:
1) гострого кута; 2) тупого кута.
- 6.37.** Доведіть, що три висоти трикутника або їхні продовження перетинаються в одній точці (ортоцентрі трикутника).

Доведення. 1) Нехай AH_1 , BH_2 , CH_3 – висоти гострокутного трикутника ABC (мал. 6.20). Проведемо через вершини трикутника прямі, паралельні протилежним сторонам. Одержимо трикутник $A_1B_1C_1$. Чотирикутник ABA_1C_1 – паралелограм (за побудовою). Тому $BA_1 = AC$. Аналогічно ACB_1C_1 – паралелограм і $C_1B = AC$. Отже, $C_1B = BA_1$, точка B – середина A_1C_1 . Оскільки $BH_2 \perp AC$ і $AC \parallel A_1C_1$, то $BH_2 \perp A_1C_1$. Тому BH_2 належить серединному перпендикуляру до сторони A_1C_1 трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно AH_1 і CH_3 належать серединним перпендикулярам до двох інших сторін цього трикутника. Як відомо, серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці. Отже, AH_1 , BH_2 і CH_3 перетинаються в одній точці.

2) Якщо $\triangle ABC$ – прямокутний, наприклад $\angle C = 90^\circ$, то очевидно, що три висоти перетинаються в точці C .

3) Якщо $\triangle ABC$ – тупокутний, то продовження трьох висот трикутника перетинаються в одній точці. Доведення аналогічне до доведення у п. 1. ■



Мал.6.20



Вправи для повторення

- 6.38.** Знайдіть другий гострий кут прямокутного трикутника, якщо перший дорівнює: 1) 20° ; 2) 65° .
- 6.39.** Дві сторони трикутника дорівнюють 7,2 см і 2,5 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?
- 6.40.** Зовнішній кут трикутника у 2 рази більший за один з внутрішніх кутів, не суміжний з ним. Доведіть, що трикутник є рівнобедреним.
- 6.41.** Чи можна побудувати чотирикутник зі сторонами 6 см, 6 см, 4 см і 2 см та кутом 60° між рівними сторонами?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 6.42.** Знайдіть периметр і площу прямокутника, сторони якого дорівнюють: 1) 5 см і 7 см; 2) 2 дм і 14 см.



Життєва математика

- 6.43.** 1) Фермерка збрала урожай зерна та засипала його в засік, що має форму прямокутного паралелепіпеда 12 м завдовжки і 8 м завширшки. Зерно насипано в засік до висоти 2,5 м. Щоб дізнатися скільки важить усе зерно, зважили ящик 0,5 м завдовжки, 0,5 м завширшки і 0,4 м заввишки ущерть наповнений зерном. Скільки важило зерно в засіку, якщо зерно в ящику важило 80 кг?
- 2) Яким буде виторг фермерки від продажу всього зерна за гуртовою ціною, що складає 6000 грн за 1 т?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 6.44. Видатні українці.** Запишіть по горизонталях прізвища видатних українців (за потреби використайте додаткову літературу та інтернет) й отримаєте у виділеному стовпчику ім'я давньогрецького філософа, математика, релігійного та політичного діяча.

[illegible]

1. Видатний український наукознавець у галузі зварювальних процесів, доктор технічних наук, Герой України.

2. Українська поетеса, публіцистка, діячка ОУН, борець за незалежність України у XX столітті.
3. Український письменник, поет, публіцист, перекладач, учений, громадський і політичний діяч (1856–1916).
4. Видатний український лікар світового рівня, учений у галузях медицини, біокібернетики; його ім'ям названо Інститут серцево-судинної хірургії, який він очолював протягом двадцяти років.
5. Політичний діяч і публіцист, організатор української науки; Голова Центральної Ради Української Народної Республіки.
6. Українська народна художниця у жанрі «наївного мистецтва», національна легенда України.
7. Українська акторка театру та кіно. Народна артистка України, почесна громадянка Києва.

§ 7. Прямокутник і його властивості

1. Означення та властивості прямокутника

Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі (мал. 7.1).

Оскільки прямокутник є паралелограмом, то він має всі *властивості паралелограма*.

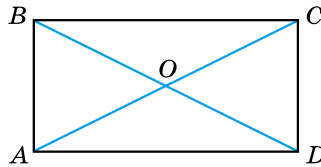
1. У прямокутнику протилежні сторони рівні.
2. Периметр прямокутника $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
3. Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл.

Крім цього, прямокутник має ще *властивості*.

4. Діагоналі прямокутника рівні.



Мал. 7.1



Мал. 7.2

Доведення. Нехай дано прямокутник $ABCD$ (мал. 7.2). $\triangle ACD = \triangle DBA$ (за двома катетами). Тому $AC = BD$. ■

5. Точка перетину діагоналей прямокутника рівновіддалена від усіх його вершин.

Оскільки $AC = BD$, а $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 7.2), то очевидно, що $AO = BO = OC = OD$.

Приклад 1. Діагональ ділить кут прямокутника у відношенні 2 : 3.

- Знайти кут між діагоналями цього прямокутника.
- **Розв'язання.** 1) Нехай $\angle ADO : \angle ODC = 2 : 3$ (мал. 7.2). Позначимо $\angle ADO = 2x$, $\angle ODC = 3x$. Тоді $2x + 3x = 90^\circ$, $x = 18^\circ$.
- Тому $\angle ADO = 2 \cdot 18 = 36^\circ$; $\angle ODC = 3 \cdot 18 = 54^\circ$.
- 2) $\triangle OCD$ – рівнобедрений (бо $DO = OC$). Тому $\angle OCD = \angle ODC = 54^\circ$.
- У $\triangle OCD$: $\angle COD = 180^\circ - 2 \cdot 54^\circ = 72^\circ$. Отже, кут між діагоналями цього прямокутника дорівнює 72° .
- **Відповідь:** 72° .

2. Ознаки прямокутника

Розглянемо *ознаки прямокутника*.

Т Теорема (ознаки прямокутника). Якщо в паралелограма: 1) усі кути рівні, або 2) один кут прямий, або 3) діагоналі рівні, – то паралелограм є *прямокутником*.

Доведення. 1) Оскільки всі кути паралелограма рівні, а їхня сума дорівнює 360° , то кожний з них дорівнює $360^\circ : 4 = 90^\circ$. А тому паралелограм є прямокутником.

2) Нехай кут A паралелограма $ABCD$ прямий (мал. 7.1). Тоді $\angle C = \angle A = 90^\circ$, $\angle B = \angle D = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Отже, усі кути паралелограма прямі, а тому він є прямокутником.

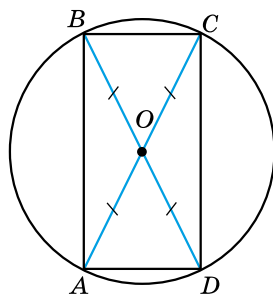
3) Нехай у паралелограма $ABCD$ діагоналі AC і BD рівні (мал. 7.2). AD – спільна сторона трикутників ABD і DCA . Отже, $\triangle ABD = \triangle DCA$ (за трьома сторонами). Тому $\angle BAD = \angle CDA$. Але ж $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BCD = \angle BAD$. У паралелограма всі кути рівні між собою. Тому він є прямокутником (за п. 1 цієї теореми). ■

Приклад 2. У колі із центром O проведено діаметри AC і BD (мал. 7.3). Визначити вид чотирикутника $ABCD$.

• **Розв'язання.** 1) Оскільки $AO = OC$, $BO = OD$ (як радіуси), то, за ознакою паралелограма, маємо, що $ABCD$ – паралелограм.

• 2) Оскільки $AC = BD$ (як діаметри), то, використовуючи ознаку прямокутника, маємо, що паралелограм $ABCD$ є прямокутником.

• **Відповідь:** прямокутник.



Мал. 7.3

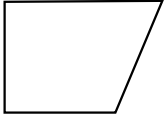
? Яку фігуру називають прямокутником? **○** Сформулюйте й доведіть властивості прямокутника. **○** Сформулюйте й доведіть ознаки прямокутника.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

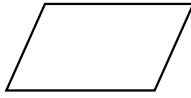
7.1. Які із чотирикутників, зображених на малюнках 7.4–7.8, є прямокутниками?



Мал. 7.4



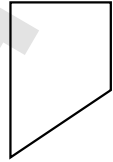
Мал. 7.5



Мал. 7.6



Мал. 7.7



Мал. 7.8

7.2. У прямокутнику $ABCD$ діагональ AC дорівнює 5 см. Яка довжина діагоналі BD ?

7.3. Сторони прямокутника дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть його периметр.

7.4. Знайдіть периметр прямокутника, сторони якого дорівнюють 3 см і 4 см.

7.5. Якщо чотирикутник є прямокутником, то його діагоналі між собою рівні. Чи правильне обернене твердження? Наведіть приклад.

2

7.6. Сторона BC прямокутника $ABCD$ дорівнює 8 см, а діагональ BD – 12 см. Знайдіть периметр трикутника BOC , де O – точка перетину діагоналей прямокутника.

7.7. O – точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. $AC = 12$ см, периметр трикутника AOB дорівнює 16 см. Знайдіть сторону AB .

7.8. (Усно.) Що можна сказати про вид паралелограма, коли відомо, що:

- 1) жоден з його кутів не є гострим;
- 2) жоден з його кутів не є тупим;
- 3) він має три рівних між собою кутів?



7.9. Доведіть, що коли в чотирикутнику три кути прямі, то цей чотирикутник – прямокутник.



7.10. Доведіть, що коли в чотирикутнику всі кути рівні, то цей чотирикутник – прямокутник.

7.11. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище першої олімпійської чемпіонки незалежної України.



Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 40 см. Знайдіть сторони AB і BC цього прямокутника, якщо:	AB	BC
AB на 2 см більша за BC	А	Ю
$AB : BC = 2 : 3$	Л	Б

12 см	11 см	9 см	8 см

7.12. Периметр прямокутника дорівнює 50 см. Знайдіть його сторони, коли відомо, що:

- 1) одна з них на 5 см менша від іншої;
- 2) сторони відносяться як 4 : 1.

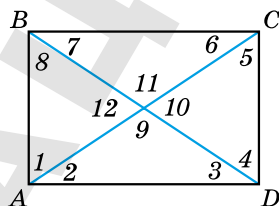
7.13. (Усно.) На малюнку 7.9 зображено прямокутник $ABCD$. Знайдіть усі рівні між собою кути.

7.14. Знайдіть за малюнком 7.9:

- 1) $\angle 3$, якщо $\angle 8 = 50^\circ$;
- 2) $\angle 2$, якщо $\angle 10 = 41^\circ$.

7.15. Знайдіть за малюнком 7.9:

- 1) $\angle 5$, якщо $\angle 2 = 40^\circ$;
- 2) $\angle 12$, якщо $\angle 3 = 32^\circ$.



Мал. 7.9

7.16. Діагональ прямокутника ділить кут прямокутника на два кути, один з яких на 20° більший за інший. Знайдіть ці кути.

7.17. Доведіть, що навколо прямокутника можна описати коло.

7.18. Знайдіть кут між меншою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він:

- 1) на 15° менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони;
- 2) на 50° менший від кута між діагоналями, який лежить проти більшої сторони.

7.19. Знайдіть кут між більшою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він:

- 1) на 90° менший від кута між діагоналями, який лежить проти більшої сторони;
- 2) на 40° менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони.

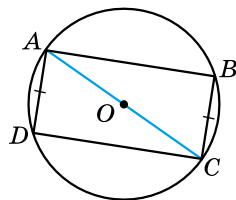
7.20. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O , E — середина AB , $\angle CAB = 70^\circ$. Знайдіть $\angle DOE$.

7.21. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O . OP — бісектриса трикутника AOB , $\angle DOP = 130^\circ$. Знайдіть $\angle CAB$.

7.22. У паралелограмі $ABCD$ з гострим кутом A діагоналі перетинаються в точці O . На відрізках AO і OC позначено точки M і N так, що $OM = OB$, $ON = OD$. Доведіть, що $BMDN$ — прямокутник.

7.23. Точки B і D належать колу із центром O , AC — діаметр кола, $AD = BC$ (мал. 7.10). Доведіть, що $ABCD$ — прямокутник.

7.24. Перпендикуляри, проведені з точки перетину діагоналей прямокутника до двох його сусідніх сторін, дорівнюють 4 см і 9 см. Визначте периметр прямокутника.



Мал. 7.10

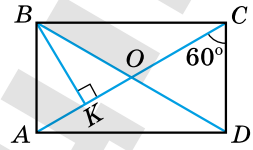
7.25. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону навпіл. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його більша сторона дорівнює 20 см.

7.26. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону навпіл. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його менша сторона дорівнює 8 дм.

4 **7.27.** На малюнку 7.11 $ABCD$ – прямокутник, $BK \perp AC$, $\angle ACD = 60^\circ$.

1) $OK = a$. Знайдіть DB і AB ;

2) $AC = m$. Знайдіть AK і CD .



Мал. 7.11

7.28. На малюнку 7.11 $ABCD$ – прямокутник, $BK \perp AC$, $\angle ACD = 60^\circ$, $AB = b$. Знайдіть BD і OK .

7.29. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою $BC = 35$ см вписано прямокутник $KLMN$ так, що точки K і L лежать на гіпотенузі трикутника, а точки M і N – на катетах. $KL : KN = 3 : 2$. Знайдіть периметр прямокутника.

7.30. У рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 20 см, вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут, а вершина протилежного кута належить гіпотенузі. Знайдіть периметр прямокутника.



Вправи для повторення

7.31. З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ проведено висоту BK . Знайдіть кути паралелограма, якщо $BK = \frac{1}{2} AB$.

7.32. 1) Градусна міра одного з кутів трикутника є середнім арифметичним двох інших кутів. Знайдіть цей кут.

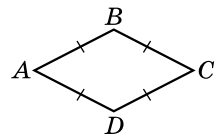
2) Градусна міра одного з кутів чотирикутника є середнім арифметичним трьох інших кутів. Знайдіть цей кут.

7.33. Через точку P , що належить внутрішній області кута ABC , проведіть пряму так, щоб її відрізок, який лежить між сторонами кута, ділився точкою P навпіл.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

7.34. Дано: $AB = BC = CD = DA$ (мал. 7.12).
Довести: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

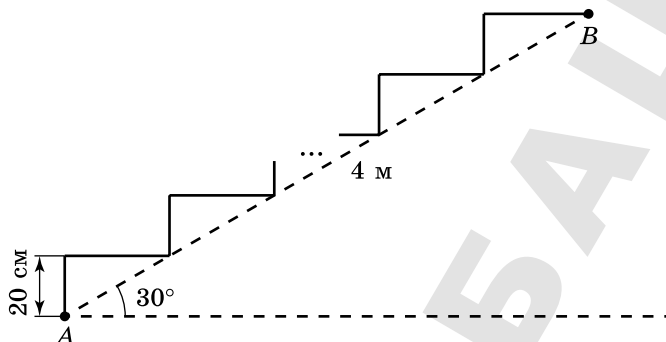


Мал. 7.12



Життєва математика

- 7.35. Сходовий марш сполучає точки A і B , відстань між якими – 4 м (мал. 7.13). Скільки сходинок на сходовому марші, якщо кут нахилу сходів дорівнює 30° , висота сходинки – 20 см?



Мал. 7.13



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 7.36. Чи можна розрізати квадрат розміром 6×6 на прямокутники розміром 1×4 ?

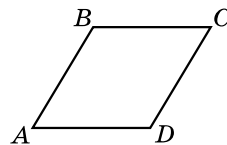
§ 8. Ромб і його властивості

1. Означення ромба та його властивості

Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні (мал. 8.1).

Оскільки ромб є паралелограмом, то він має всі властивості паралелограма.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів ромба дорівнює 180° .
2. У ромба протилежні кути рівні.
3. Діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл.
4. Периметр ромба $P_{ABCD} = 4AB$.



Мал. 8.1

Крім того, ромб має ще таку властивість.

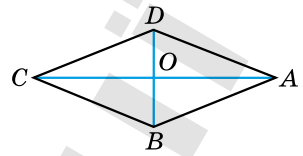
5. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні й ділять його кути навпіл.

Доведення. Нехай AC і BD – діагоналі ромба $ABCD$ (мал. 8.2), O – точка перетину діагоналей.

1) Оскільки $AB = AD$ і $DO = OB$, то AO – медіана рівнобедреного трикутника ABD , проведена до основи BD . Тому AO є також висотою і бісектрисою трикутника ABD .

2) Отже, $AC \perp BD$ і $\angle DAO = \angle BAO$. ■

Аналогічно можна довести, що діагональ AC ділить навпіл кут DCB , а діагональ BD ділить навпіл кути ABC і ADC .



Мал. 8.2

Приклад 1. Кут між висотою і діагоналлю ромба, проведеними з однієї вершини, дорівнює 28° . Знайти кути ромба.

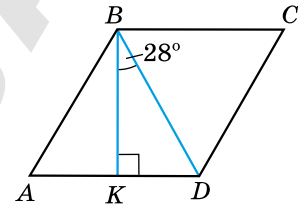
Розв'язання. BD – діагональ ромба $ABCD$, а BK – його висота (мал. 8.3), $\angle KBD = 28^\circ$ (за умовою).

1) У $\triangle BKD$ $\angle BDK = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$.

2) Оскільки DB ділить кут $\angle ADC$ навпіл, то $\angle ADC = 2 \cdot 62^\circ = 124^\circ$.

3) Тоді $\angle ABC = \angle ADC = 124^\circ$; $\angle A = \angle C = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$.

Відповідь: $124^\circ, 56^\circ, 124^\circ, 56^\circ$.



Мал. 8.3

2. Ознаки ромба

Розглянемо ознаки ромба.



Теорема (ознаки ромба). Якщо в паралелограмі: 1) дві сусідні сторони рівні, або 2) діагоналі перетинаються під прямим кутом, або 3) діагональ ділить навпіл кути паралелограма, – то паралелограм є ромбом.

Доведення. 1) Нехай $ABCD$ – паралелограм (див. мал. 8.2). Оскільки $AB = AD$ (за умовою) і $AB = CD$, $AD = BC$ (за властивістю паралелограма), то $AB = AD = BC = CD$. Отже, $ABCD$ – ромб.

2) Нехай $AC \perp BD$ (мал. 8.2). Оскільки $OB = OD$ (за властивістю паралелограма), то $\triangle AOB = \triangle AOD$ (за двома катетами). Тому $AB = AD$. За п. 1 цієї теореми $ABCD$ – ромб.

3) Діагональ DB ділить навпіл кут D паралелограма $ABCD$, тобто $\angle ADB = \angle BDC$ (за умовою). Оскільки паралельні прямі AB і DC перетнули січною DB , то $\angle ABD = \angle BDC$ (як внутрішні різносторонні). Отже, $\angle ADB = \angle ABD$. Тому, за ознакою рівнобедреного трикутника, $\triangle ABD$ – рівнобедрений і $AD = AB$. За п. 1 цієї теореми $ABCD$ – ромб. ■

Приклад 2. Довести, що коли в чотирикутнику всі сторони рівні, то цей чотирикутник – ромб.

Доведення. Нехай $AB = BC = CD = DA$ (див. мал. 8.1).

1) Оскільки в чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно рівні, то за ознакою паралелограма маємо, що $ABCD$ – паралелограм.

2) У паралелограма $ABCD$ сусідні сторони рівні. Тому $ABCD$ – ромб (за ознакою ромба).

А ще раніше...

Слово «ромб» грецького походження, у давнину воно означало тіло, що обертається, – веретено, дзигу. Ромб тоді пов'язували з перерізом веретена, на яке намотано нитки.

У «Началах» Евкліда термін «ромб» зустрічається лише один раз, а властивості ромба Евклід взагалі не розглянув.



В українській вишивці – ромб – один із десяти головних символів, які наші предки споконвіку вишивали на своїх сорочках.

У давніх віруваннях ромб – це символ родючості, адже за формою він нагадує два трикутники, чоловічого та жіночого начал.

Ромб (із крапкою посередині) є символом засіяного поля, означає багатство, достаток і добробут. Головний реманент українців-хліборобів – борона, якою саме й готували поле до сівби, має форму ромба. Ромбоподібні узорі вишивали на весільних рушниках і на весільному одязі. Одяг з вишитими ромбами молода жінка при надії мала носити аж до народження дитини. Адже цей символ слугував сильним оберегом.

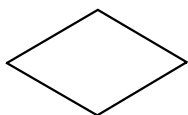


Яку фігуру називають ромбом? ○ Сформулюйте й доведіть властивості ромба.
○ Сформулюйте й доведіть ознаки ромба.

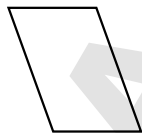


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 8.1. (Усно.) Які із чотирикутників на малюнках 8.4–8.8 є ромбами?



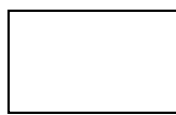
Мал. 8.4



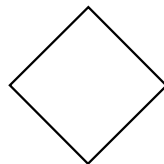
Мал. 8.5



Мал. 8.6



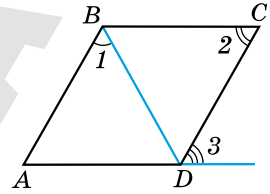
Мал. 8.7



Мал. 8.8

- 8.2. Накресліть ромб $ABCD$, у якого кут B тупий.
- 8.3. Накресліть ромб $ABCD$, у якого кут A гострий.
- 8.4. Периметр ромба дорівнює 24 см. Знайдіть його сторону.
- 8.5. Сторона ромба дорівнює 4 дм. Знайдіть його периметр.
- 8.6. Гострий кут ромба дорівнює 40° . Який кут утворює діагональ, проведена із цього кута, зі стороною ромба?
- 8.7. Тупий кут ромба дорівнює 130° . Який кут утворює діагональ, проведена із цього кута, зі стороною ромба?
- 8.8. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 60° . Знайдіть тупий кут ромба.
- 8.9. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 20° . Знайдіть гострий кут ромба.

- 2** 8.10. У ромбі $ABCD$ кут A дорівнює 36° . Знайдіть кути трикутника AOB , де O – точка перетину діагоналей.
- 8.11. O – точка перетину діагоналей ромба $ABCD$, $\angle B = 118^\circ$. Знайдіть кути трикутника BOC .
- 8.12. Сума довжин трьох сторін ромба дорівнює 21 см. Знайдіть його периметр.
- 8.13. Сума довжин двох сторін ромба дорівнює 16 см. Знайдіть периметр ромба.
- 8.14. $ABCD$ – ромб, $\angle 2 = 66^\circ$ (мал. 8.9). Знайдіть $\angle 1$.
- 8.15. $ABCD$ – ромб, $\angle 1 = 58^\circ$ (мал. 8.9). Знайдіть $\angle 2$.
- 8.16. $ABCD$ – ромб, $\angle 1 = 55^\circ$ (мал. 8.9). Знайдіть $\angle 3$.
- 8.17. $ABCD$ – ромб, $\angle 3 = 50^\circ$ (мал. 8.9). Знайдіть $\angle 1$.
- 8.18. У ромбі $ABCD$ $AB = BD$. Знайдіть кути ромба.
- 8.19. (Усно.) Які спільні властивості мають ромб і паралелограм?
- 8.20. Знайдіть кути ромба, якщо:
1) сума двох його кутів дорівнює 80° ;
2) один з них на 20° більший за інший.
- 8.21. Знайдіть кути ромба, якщо:
1) сума двох його кутів дорівнює 210° ;
2) один з них на 50° менший від іншого.
- 8.22. (Усно.) Чи правильне твердження:
1) якщо в чотирикутнику діагоналі перпендикулярні, то він є ромбом;
2) якщо в чотирикутнику діагоналі не перпендикулярні, то він не може бути ромбом;
3) існує ромб, який є прямокутником;
4) жоден прямокутник не є ромбом?
- 3** 8.23. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 10° .
- 8.24. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, які відносяться як 2 : 3.
- 8.25. Побудуйте ромб:
1) за стороною і діагоналлю; 2) за діагоналями.
- 8.26. Побудуйте ромб за стороною і кутом.
- 8.27. У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BM і BN . Доведіть, що $BM = BN$.
- 8.28. У ромбі $ABCD$ з вершин тупих кутів проведено висоти BK і DL . Доведіть, що $BK = DL$.
- 8.29. Висоти, проведені з вершини гострого кута ромба, утворюють між собою кут 110° . Знайдіть кути ромба.
- 8.30. Висоти, проведені з вершини тупого кута ромба, утворюють між собою кут 50° . Знайдіть кути ромба.



Мал. 8.9

- 4** 8.31. Діагональ ромба, проведена з вершини тупого кута, утворює з висотою, проведеною із цієї самої вершини, кут 30° . Менша діагональ ромба дорівнює a см. Знайдіть:
1) кути ромба; 2) периметр ромба.
- 8.32. У ромбі висота, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону ромба навпіл. Знайдіть:
1) кути ромба;
2) периметр ромба, якщо його менша діагональ дорівнює b см.
- 8.33. На діагоналі AC ромба $ABCD$ позначено точки M і N такі, що $AM = CN$. Доведіть, що чотирикутник $DMBN$ є ромбом (розгляньте два випадки розміщення точок M і N).
- 8.34. Доведіть, що середини сторін прямокутника є вершинами ромба.
- 8.35. У рівносторонній трикутник ABC вписано ромб $AMNK$ так, що трикутник і ромб мають спільний кут A , а точка N лежить на стороні BC . Знайдіть периметр трикутника, якщо периметр ромба дорівнює 40 см.



Вправи для повторення

- 8.36. Сторони паралелограма відносяться як 5 : 2. Знайдіть периметр паралелограма, якщо різниця цих сторін дорівнює 15 см.
- 8.37. Один з кутів трикутника дорівнює сумі двох інших. Знайдіть найбільшу сторону цього трикутника, якщо медіана, проведена до неї, дорівнює 5 см.
- 8.38. Периметр трикутника дорівнює $2p$ см. Чи може одна з його сторін дорівнювати:
1) $(p - 1)$ см; 2) p см; 3) $(p + 1)$ см?
- 8.39. У чотирикутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає бісектриси кутів B і D під прямим кутом. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 8.40. Знайдіть периметр і площу квадрата, сторона якого дорівнює:
1) 5 см; 2) 2,1 дм; 3) $\frac{3}{4}$ м; 4) $1\frac{1}{2}$ дм.



Життєва математика

- 8.41. Кімната в будинку Тимошуків має 5 м завдовжки, 3,5 м завширшки і 3 м заввишки. Площа дверей і вікон становить $\frac{1}{6}$ частину від усієї площі стін.
1) Скільки рулонів шпалер потрібно, щоб обклеїти цю кімнату, якщо довжина рулону становить 10 м, а ширина – 0,5 м?

2) Скільки коштів витратить родина на шпалери, якщо один рулон коштує 180 грн? Врахуйте, якщо купувати шпалери на суму понад 1000 грн, магазин робить знижку 5 %.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

8.42. (Київська міська олімпіада, 1987 р.) Вписане у трикутник ABC коло дотикається до сторони BC у точці K . Доведіть, що відрізок AK довший за діаметр кола.

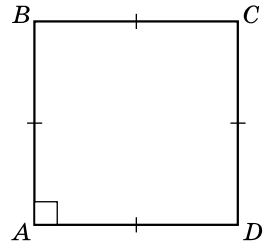
§ 9. Квадрат і його властивості

1. Означення та властивості квадрата

Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні.

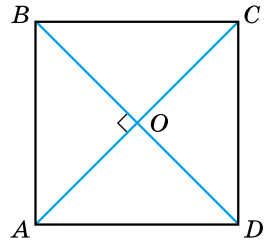
На малюнку 9.1 зображено квадрат $ABCD$. Прямокутник є паралелограмом, тому і квадрат – паралелограм, у якого всі сторони рівні, тобто він є і ромбом. Отже, квадрат має властивості прямокутника та ромба.

Сформулюємо властивості квадрата.



Мал. 9.1

1. Усі кути квадрата прямі (мал. 9.2).
2. Периметр квадрата $P_{ABCD} = 4AB$.
3. Діагоналі квадрата між собою рівні.
4. Діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні і точкою перетину діляться навпіл.
5. Діагоналі квадрата ділять його кути навпіл, тобто утворюють кути 45° зі сторонами квадрата.
6. Точка перетину діагоналей квадрата рівновіддалена від усіх його вершин:
 $AO = BO = CO = DO$.



Мал. 9.2

Приклад 1. Точки K і M належать відповідно діагоналям BD і AC квадрата $ABCD$, причому $AM = \frac{1}{4}AC$,

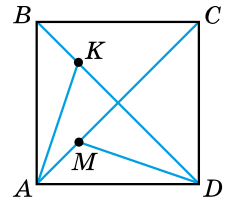
$BK = \frac{1}{4}BD$. Доведіть, що $\triangle ADM = \triangle BAK$ (мал. 9.3).

$BK = \frac{1}{4}BD$. Доведіть, що $\triangle ADM = \triangle BAK$ (мал. 9.3).

Доведення. 1) $\angle MAD = \angle ABK = 45^\circ$, $AD = AB$ (як сторони квадрата).

2) Оскільки $AC = BD$ (як діагоналі квадрата) і $AM = \frac{1}{4}AC$, $BK = \frac{1}{4}BD$, то $AM = BK$.

3) Тому $\triangle ADM = \triangle BAK$ (за двома сторонами та кутом між ними). ■



Мал. 9.3

2. Ознаки квадрата

Розглянемо *ознаки квадрата*.

Т Теорема (ознаки квадрата). 1) Якщо діагоналі прямокутника взаємно перпендикулярні, то він є квадратом.
2) Якщо діагоналі ромба між собою рівні, то він є квадратом.

Доведення. 1) Прямокутник є паралелограмом, а паралелограм із взаємно перпендикулярними діагоналями є ромбом. Отже, у заданого прямокутника всі сторони рівні, а тому він є квадратом.

2) Ромб є паралелограмом, а паралелограм з рівними діагоналями є прямокутником. Отже, у розглядуваного ромба всі кути прямі, а тому він є квадратом. ■

Приклад 2. Доведіть, що коли в чотирикутнику всі сторони рівні й усі кути рівні, то цей чотирикутник – квадрат.

Доведення. 1) Оскільки в чотирикутнику всі кути рівні, то, за ознакою прямокутника, він є прямокутником.

2) Оскільки у прямокутника всі сторони рівні, то він є квадратом. ■

А ще раніше...

Термін «квадрат» походить від латинського *quadratum* (*quadrare* – зробити чотирикутним).

Відомий історик математики Д. Д. Мордухай-Болтовський (1876–1952) писав: «Першим чотирикутником, з яким познайомилася геометрія, був квадрат».



Часто в українській вишивці зустрічається й квадрат.

Наші предки ототожнювали квадрат із земним началом, із символом родючості. Квадрат популярний надто у чоловічих вишиванках, перехрещений квадрат означає енергію землі.

Це символ магічного числа 4, що позначає матерію. Символізує чотири пори року, сторони світу, частини доби, життєві цикли. Це символ Сонця, Творця, чоловічого начала. Квадрат символом простору, ізольованого від лихих помислів. Він мав захищати господарів від різних зурочень.



Яку фігуру називають квадратом? ○ Сформулюйте властивості квадрата. ○ Сформулюйте й доведіть ознаки квадрата.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 9.1. Периметр квадрата дорівнює 24 см. Знайдіть його сторону.

9.2. Сторона квадрата дорівнює 5 дм. Знайдіть його периметр.

9.3. (Усно.) На малюнку 9.2 зображено квадрат $ABCD$. Назвіть рівні між собою відрізки на цьому малюнку.

9.4. Якщо чотирикутник є квадратом, то його діагоналі рівні та взаємно перпендикулярні. Чи правильне обернене твердження? Наведіть приклад.

2 9.5. Точка перетину діагоналей квадрата міститься на відстані 3 см від однієї з його вершин. Знайдіть суму довжин діагоналей цього квадрата.

9.6. Сума довжин діагоналей квадрата дорівнює 16 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до однієї з його вершин.

9.7. Сума довжин двох сторін квадрата дорівнює 12 см. Знайдіть периметр квадрата.

9.8. Сума довжин трьох сторін квадрата дорівнює 15 дм. Знайдіть периметр квадрата.

9.9. (Усно.) Які спільні властивості мають квадрат і ромб?

9.10. (Усно.) Які спільні властивості мають квадрат і прямокутник?

9.11. Різниця між периметром квадрата і його стороною дорівнює 18 см. Знайдіть сторону квадрата та його периметр.

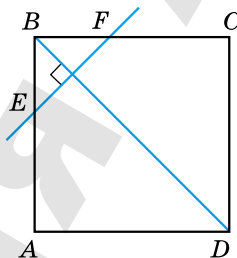
 9.12. Сусідні сторони прямокутника рівні. Доведіть, що він є квадратом.

 9.13. Один з кутів ромба – прямий. Доведіть, що цей ромб є квадратом.

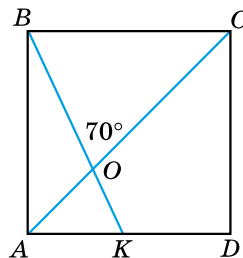
9.14. (Усно.) Чи правильне твердження:

- 1) кожний квадрат є прямокутником;
- 2) існує квадрат, який не є ромбом;
- 3) кожний ромб є квадратом;
- 4) кожний квадрат є ромбом;
- 5) будь-який прямокутник є квадратом;
- 6) відношення периметра квадрата до його сторони є сталим для всіх квадратів?

9.15. $ABCD$ – квадрат, $EF \perp BD$ (мал. 9.4). Знайдіть $\angle BFE$.



Мал. 9.4



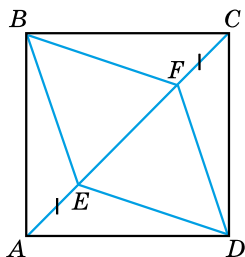
Мал. 9.5

9.16. $ABCD$ – квадрат, $\angle BOC = 70^\circ$ (мал. 9.5). Знайдіть $\angle OKA$.

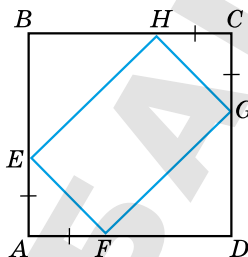
3 9.17. Побудуйте квадрат за його:

- 1) периметром;
- 2) діагоналлю.

- 9.18.** Побудуйте квадрат за сумою його діагоналей.
- 9.19.** Точка перетину діагоналей квадрата віддалена від його сторони на 3 см. Знайдіть периметр квадрата.
- 9.20.** Периметр квадрата дорівнює 32 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторін.
- 9.21.** $ABCD$ – квадрат, $AE = FC$ (мал. 9.6). Доведіть, що $BEDF$ – ромб.



Мал. 9.6



Мал. 9.7

- 9.22.** $ABCD$ – квадрат, $AE = AF = CG = CH$ (мал. 9.7). Доведіть, що $EFGH$ – прямокутник.
- 9.23.** До кола із центром у точці O з точки A проведено дві взаємно перпендикулярні дотичні AB і AC , B і C – точки дотику. Доведіть, що $ABOC$ – квадрат.
- 4** **9.24.** У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано квадрат $CMNK$ так, що прямий кут у них спільний, а точка N належить стороні AB . Катет трикутника дорівнює b см. Знайдіть периметр квадрата.
- 9.25.** У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано квадрат $KMNL$ так, що точки K і M лежать на гіпотенузі трикутника, а точки L і N – на катетах AC і BC відповідно. Периметр квадрата дорівнює 12 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.
- 9.26.** На сторонах квадрата зовні побудовано рівносторонні трикутники. Доведіть, що вершини трикутників, які не є вершинами заданого квадрата, є вершинами іншого квадрата.



Вправи для повторення

- 9.27.** У ромбі $ABCD$ діагональ утворює з однією зі сторін кут 30° . Знайдіть кути ромба.
- 9.28.** У чотирикутника $ABCD$ $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 1 : 3 : 4 : 10$. Знайдіть кути чотирикутника. Опуклим чи неопуклим є цей чотирикутник?
- 9.29.** Бісектриса кута B прямокутника $ABCD$ ділить сторону AD на відрізки AK і KD так, що $AK : KD = 3 : 5$. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 110 см.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 9.30. 1) Накресліть чотирикутник, дві сторони якого між собою паралельні, а дві інші – непаралельні.
2) Яка найбільша кількість гострих кутів може бути в такому чотирикутнику?



Життєва математика

- 9.31. Згідно із санітарними нормами відношення площі вікон до площі підлоги у класній кімнаті має бути не менше ніж 0,2. Чи дотримано цих норм у класній кімнаті, довжина якої – 12 м, а ширина становить 35 % від довжини, якщо у класі три вікна розміром 2 м × 1,7 м?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

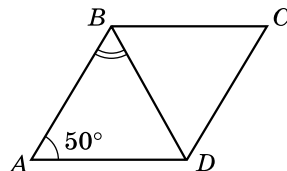
- 9.32. О 12-й годині годинна та хвилинна стрілки збігаються. Через яку найменшу кількість хвилин стрілки знову збігаються?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2 (§§ 5–9)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.



1. Укажіть відрізок, що є діагоналлю чотирикутника $ABCD$.
А. AB Б. BD В. BC Г. AD
2. Знайдіть тупий кут паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 35° .
А. 125° Б. 135° В. 145° Г. 155°
3. Знайдіть сторону квадрата, якщо його периметр дорівнює 36 см.
А. 4 см Б. 6 см В. 9 см Г. 12 см
4. Периметр прямокутника дорівнює 24 см, а одна з його сторін на 2 см більша за іншу. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.
А. 5 см Б. 6 см В. 7 см Г. 8 см
5. $ABCD$ – ромб, $\angle A = 50^\circ$ (мал. 1). Знайдіть $\angle ABD$.
А. 55° Б. 50° В. 75° Г. 65°
6. Укажіть правильне твердження:
А. Якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні, то він є ромбом
Б. Відношення периметра ромба до його сторони є сталим для всіх ромбів
В. Якщо діагоналі чотирикутника рівні, то він є прямокутником
Г. Відношення периметра прямокутника, який не є квадратом, до його найбільшої сторони є незмінним для всіх прямокутників



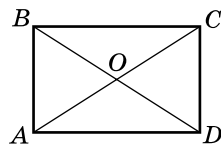
Мал. 1

- 3** 7. Знайдіть найбільший кут чотирикутника, у якого градусні міри кутів пропорційні числам 2; 3; 5 і 8.
 А. 120° Б. 130° В. 150° Г. 160°
8. Висоти, які проведено з вершини тупого кута паралелограма, утворюють між собою кут 30° . Знайдіть тупий кут паралелограма.
 А. 120° Б. 130° В. 150° Г. 160°
9. Знайдіть гострий кут ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 40° .
 А. 25° Б. 30° В. 50° Г. 60°
- 4** 10. Бісектриса кута D паралелограма $ABCD$ ділить сторону AB на відрізки AK і KB так, що $AK : KB = 1 : 3$. Знайдіть AB , якщо периметр паралелограма дорівнює 60 см.
 А. 26 см Б. 24 см В. 20 см Г. 15 см
11. З вершини тупого кута A ромба $ABCD$ проведено висоту AK . $\angle CAK = 30^\circ$, $AC = 6$ см. Знайдіть периметр ромба.
 А. 18 см Б. 24 см В. 30 см Г. 36 см
12. У $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$) вписано квадрат $KLMN$ так, що $K \in AB$, $L \in AB$, $M \in CB$, $N \in AC$. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AB = 12$ см.
 А. 24 см Б. 20 см В. 12 см Г. 16 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

- 3** 13. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O (мал. 2). Кут ABO на 18° менший від кута AOB . Установіть відповідність між кутами (1–3) та їхніми градусними мірами (А–Г).

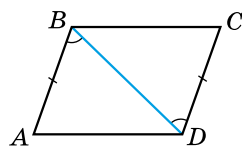
Кути	Градусні міри кутів
1. $\angle ABO$	А. 36°
2. $\angle AOB$	Б. 48°
3. $\angle OAD$	В. 54°
	Г. 72°



Мал. 2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 5–9

- 1** 1. Накресліть чотирикутник $MNPL$ і проведіть його діагоналі.
 2. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них дорівнює 80° .
 3. Знайдіть периметр квадрата, якщо його сторона дорівнює 7 см.
- 2** 4. Периметр прямокутника дорівнює 18 см. Знайдіть його сторону, якщо одна з них на 1 см більша за іншу.
 5. $ABCD$ – ромб, $\angle ABD = 50^\circ$. Знайдіть кути ромба.
 6. На малюнку 1 $\angle ABD = \angle BDC$, $AB = DC$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.
- 3** 7. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 4, 6. Опуклим чи неопуклим він є?



Мал. 1

8. Висоти, проведені з вершини гострого кута ромба, утворюють між собою кут 120° . Знайдіть кути ромба.
- 4 9. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки BK і KC так, що $BK : KC = 4 : 3$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 88 см.

Додаткові завдання

- 4 10. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою $BC = 23$ см вписано прямокутник $KLMN$ так, що точки K і L належать гіпотенузі трикутника, а точки M і N – катетам. Сторона KL прямокутника на 2 см більша за сторону LM . Знайдіть периметр прямокутника.
11. З вершини тупого кута B ромба $ABCD$ проведено висоту BM , $\angle DBM = 30^\circ$. Периметр ромба дорівнює 40 см. Знайдіть меншу діагональ ромба.

ТЕМА 3

МНОЖЕННЯ ТА ДІЛЕННЯ ДРОБІВ. РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** основні властивості рівнянь;
- **ознайомитеся** з поняттям раціонального рівняння;
- **навчитесь** виконувати множення та ділення раціональних дробів; розв'язувати раціональні рівняння.

§ 10. Множення дробів. Піднесення дробу до степеня

1. Множення дробів



Добуток двох звичайних дробів – це дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник – добутку знаменників цих дробів:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Доведемо, що ця рівність є тотожністю для будь-яких значень a , b , c і d за умови, що $b \neq 0$ і $d \neq 0$.

Нехай $\frac{a}{b} = p$, $\frac{c}{d} = q$. Тоді за означенням частки $a = bp$, $c = dq$. Тому $ac = (bp)(dq) = (bd)(pq)$. Оскільки $bd \neq 0$, то, знову врахувавши означення частки, одержимо: $pq = \frac{ac}{bd}$. Отже, якщо $b \neq 0$ і $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. ■

Сформулюємо *правило множення дробів*.

Щоб помножити дріб на дріб, треба перемножити окремо чисельники й окремо знаменники та записати перший добуток чисельником, а другий – знаменником дробу, тобто

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Приклад 1. Виконати множення $\frac{b^4}{9m^2} \cdot \frac{12m}{b^2}$.

Розв'язання. $\frac{b^4}{9m^2} \cdot \frac{12m}{b^2} = \frac{b^4 \cdot 12m}{9m^2 \cdot b^2} = \frac{4b^2}{3m}$.

Відповідь: $\frac{4b^2}{3m}$.

Приклад 2. Знайти добуток $\frac{cm + cd}{2x} \cdot \frac{8x^3}{m^2 - d^2}$.

Розв'язання. Використаємо правило множення дробів, попередньо розклавши чисельник першого дробу і знаменник другого на множники:

$$\frac{cm + cd}{2x} \cdot \frac{8x^3}{m^2 - d^2} = \frac{c(m + d) \cdot 8x^3}{2x \cdot (m - d)(m + d)} = \frac{4cx^2}{m - d}$$

Відповідь: $\frac{4cx^2}{m - d}$.

Зверніть увагу, що у прикладах 1 і 2 під час множення дробів ми не знаходили одразу результат множення чисельників і знаменників. Спочатку ми записали добутки в чисельнику і знаменнику за правилом множення дробів, потім скоротили отриманий дріб, бо він виявився скоротним, а вже потім виконали множення в чисельнику і в знаменнику та записали відповідь. Доцільно це враховувати і надалі.

Приклад 3. Помножити дріб $\frac{x + 2}{x^2 - 2x}$ на многочлен $x^2 - 4x + 4$.

Розв'язання. Оскільки $x^2 - 4x + 4 = \frac{x^2 - 4x + 4}{1}$, то:

$$\begin{aligned} \frac{x + 2}{x^2 - 2x} \cdot (x^2 - 4x + 4) &= \frac{x + 2}{x^2 - 2x} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{1} = \frac{(x + 2)(x - 2)^2}{x(x - 2)} = \\ &= \frac{(x + 2)(x - 2)}{x} = \frac{x^2 - 4}{x}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{x^2 - 4}{x}$.

Правило множення дробів можна поширити на добуток трьох і більше множників.

Приклад 4. $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 9} \cdot \frac{3x + 9}{x - 2} \cdot \frac{5x - 15}{3x^2 + 6x + 12} =$
 $= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \cdot 3(x + 3) \cdot 5(x - 3)}{(x - 3)(x + 3) \cdot (x - 2) \cdot 3(x^2 + 2x + 4)} = 5.$

2. Піднесення дробу до степеня

Розглянемо піднесення дробу $\frac{a}{b}$ до степеня n , де n – натуральне число.

За означенням степеня і правилом множення дробів маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ множників}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ множників}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Отже, маємо правило *піднесення дробу до степеня*.

Щоб піднести дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник та перший результат записати в чисельник, а другий – у знаменник дробу, тобто

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Приклад 5.

$$\left(\frac{3x^2y}{5t^3}\right)^3 = \frac{(3x^2y)^3}{(5t^3)^3} = \frac{3^3(x^2)^3y^3}{5^3 \cdot (t^3)^3} = \frac{27x^6y^3}{125t^9}.$$

Приклад 6.

Подати вираз $\left(-\frac{m^7p^{12}}{t}\right)^5$ у вигляді дробу.

Розв'язання.

$$\left(-\frac{m^7p^{12}}{t}\right)^5 = (-1)^5 \cdot \frac{(m^7)^5 \cdot (p^{12})^5}{t^5} = -\frac{m^{35}p^{60}}{t^5}.$$

Відповідь: $-\frac{m^{35}p^{60}}{t^5}.$



Сформулюйте правило множення дробів. Доведіть його. ○ Сформулюйте правило піднесення дробу до степеня. Доведіть його.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

10.1. Виконайте множення:

1) $\frac{4x}{a} \cdot \frac{b}{3m};$

2) $\frac{2}{a} \cdot \frac{a}{5};$

3) $\frac{5m}{4n} \cdot \frac{3}{p};$

4) $\frac{3x}{8} \cdot \frac{1}{x}.$

10.2. Виконайте множення:

1) $\frac{5p}{a} \cdot \frac{x}{2b};$

2) $\frac{b}{9} \cdot \frac{7}{b};$

3) $\frac{4}{7a} \cdot \frac{5b}{3};$

4) $\frac{1}{m} \cdot \frac{m}{8}.$

10.3. Перетворіть на дріб вираз:

$$1) \frac{a^2}{5} \cdot \frac{7}{a}; \quad 2) \frac{b^4}{3} \cdot \frac{5}{b^2}; \quad 3) \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a}{3}; \quad 4) \frac{9}{x^2} \cdot \frac{x}{3}.$$

10.4. Перетворіть на дріб вираз:

$$1) \frac{7}{b} \cdot \frac{b^2}{3}; \quad 2) \frac{5}{a^3} \cdot \frac{a^5}{2}; \quad 3) \frac{m}{8} \cdot \frac{1}{m^2}; \quad 4) \frac{a^2}{12} \cdot \frac{4}{a}.$$

2 **10.5.** Виконайте дію:

$$1) \frac{5a}{7} \cdot \frac{21}{20a^2}; \quad 2) \frac{3,5}{14a^2} \cdot \frac{4a^3}{5b}; \quad 3) \frac{c^2}{30} \cdot \frac{20}{cm};$$

$$4) -\frac{3m}{5a^2} \cdot \frac{a}{9m^2}; \quad 5) \frac{4x^2}{7p} \cdot \left(-\frac{21p}{8x^3}\right); \quad 6) -\frac{5x^2}{7y^3} \cdot \left(-\frac{21y^2}{25x}\right).$$

10.6. Перетворіть на дріб вираз:

$$1) \frac{15m^2}{22} \cdot \frac{11}{10m}; \quad 2) \frac{6p}{7} \cdot \frac{2,5c^2}{15p^3}; \quad 3) \frac{15}{xp} \cdot \frac{x^2}{45};$$

$$4) \frac{4a}{p^2} \cdot \left(-\frac{p}{8a^2}\right); \quad 5) -\frac{5c^2}{7y} \cdot \frac{49y}{10c^3}; \quad 6) -\frac{6a^2}{65b^3} \cdot \left(-\frac{13b}{30a}\right).$$

10.7. Перетворіть на дріб вираз:

$$1) 9p \cdot \frac{b}{6p^2}; \quad 2) \frac{4m^3}{x^2} \cdot x^3; \quad 3) 9ab^2 \cdot \left(-\frac{5b}{3a^3}\right);$$

$$4) -7ab^3 \cdot \frac{b^5}{14a}; \quad 5) -4mn^2 \cdot \frac{1}{8mn}; \quad 6) -11a^2b \cdot \left(-\frac{5}{22a^3b^2}\right).$$

10.8. Виконайте дію:

$$1) \frac{a}{16m^2} \cdot 12m; \quad 2) a^3 \cdot \frac{7x^3}{a^2}; \quad 3) -\frac{7y}{4x^2} \cdot 12xy^3;$$

$$4) 5cm^4 \cdot \left(-\frac{m}{15c}\right); \quad 5) -5ab^2 \cdot \left(-\frac{1}{10ab}\right); \quad 6) 13c^2d \cdot \frac{7}{26c^3d^2}.$$

10.9. Спростіть вираз:

$$1) \frac{7c^3}{10m^2} \cdot \frac{25m^3}{14c^8}; \quad 2) -\frac{8a^3}{27c^4} \cdot \frac{45c^5}{16a^3};$$

$$3) \frac{4c^3}{15a^8} \cdot \left(-\frac{5a^3}{8c^4}\right); \quad 4) -\frac{1}{25p^2q^7} \cdot \left(-\frac{10p^3q^7}{11}\right).$$

10.10. Спростіть вираз:

$$1) \frac{9m^2}{25a^2} \cdot \frac{35a^3}{18m^5}; \quad 2) \frac{7p^3}{18a^3} \cdot \left(-\frac{27a^4}{14p^3}\right);$$

$$3) -\frac{5m^3}{21n^7} \cdot \frac{7n^2}{10m^4}; \quad 4) -\frac{1}{18c^3d^4} \cdot \left(-\frac{12c^4d^4}{7}\right).$$

10.11. Виконайте множення:

1) $\frac{a^2 + 2a}{5} \cdot \frac{a}{4a + 8};$

2) $\frac{7m}{a} \cdot \frac{a^2 - ab}{21};$

3) $\frac{2a - b}{10a} \cdot \frac{15a^2}{b - 2a};$

4) $\frac{10ab}{x + y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{5ab};$

5) $-\frac{ab - ac}{10p} \cdot \frac{25p}{xc - xb};$

6) $\frac{a^2 + ab}{x^2} \cdot \frac{xy}{a^2 + 2ab + b^2}.$

10.12. Виконайте множення:

1) $\frac{m^2 - 3m}{7} \cdot \frac{x}{2m - 6};$

2) $\frac{5a}{x^2 + xy} \cdot \frac{x}{15};$

3) $\frac{a - b}{16m^2} \cdot \frac{24m}{b - a};$

4) $\frac{x^2 - y^2}{5pc} \cdot \frac{20pc}{x - y};$

5) $\frac{3a - 3b}{12x} \cdot \left(-\frac{18x}{mb - ma}\right);$

6) $\frac{m^2 - 2mn + n^2}{pc} \cdot \frac{p^2}{m^2 - mn}.$

10.13. Спростіть вираз $\frac{5x^2 + 15x}{y^2 - 2y} \cdot \frac{2 - y}{x + 3}$ і знайдіть його значення, якщо

$x = 17, y = -\frac{1}{23}$. Відтак дізнаєтеся, у якому році українка Кате-

рина Юценко винайшла одну з перших у світі мов програмування високого рівня під назвою «Адресна мова».

10.14. Спростіть вираз $\frac{35a - 5a^2}{b^2 + 4b} \cdot \frac{4 + b}{a - 7}$ і знайдіть його значення, якщо

$a = 79, b = -0,2$. Відтак дізнаєтеся, у якому році футбольна команда «Динамо» (Київ) уперше виборола Європейський Кубок Кубків.

10.15. Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{p}{4m}\right)^3;$

2) $\left(\frac{3c^2}{m}\right)^4;$

3) $\left(-\frac{3m^2n}{7}\right)^2;$

4) $\left(-\frac{2m^2}{3x^3}\right)^3;$

5) $\left(\frac{2a^3b}{x^7}\right)^5;$

6) $\left(-\frac{c^2m^3}{p}\right)^{10}.$

10.16. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\left(\frac{c}{5m}\right)^2;$

2) $\left(\frac{y}{2x^3}\right)^4;$

3) $\left(-\frac{4c^2m^3}{5}\right)^2;$

4) $\left(-\frac{3c^3}{m^7}\right)^3;$

5) $\left(\frac{c^3m}{2a^2}\right)^6;$

6) $\left(-\frac{ab^3}{c^2}\right)^8.$

3

10.17. Спростіть вираз:

$$1) \frac{54a^2c}{81b^3} \cdot \frac{32ab}{13c^3} \cdot \frac{52bc^2}{128a^3};$$

$$2) \frac{147x^4y^2}{p^3} \cdot 10xp^2 \cdot \frac{y^3}{105x^5y}.$$

10.18. Виконайте дії:

$$1) \frac{14xz^3}{81y^2} \cdot \frac{27y^3}{5xz} \cdot \frac{45xy}{7z^2};$$

$$2) \frac{b^3}{111m^5} \cdot 3mc^3 \cdot \frac{74m^3b}{c^4}.$$

10.19. Знайдіть добуток:

$$1) \frac{m^2 - 4m + 4}{m^2 + 6m + 9} \cdot \frac{m^2 - 9}{3m - 6};$$

$$2) -\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 3x + 9} \cdot \frac{x^3 + 27}{25 - x^2}.$$

10.20. Виконайте множення:

$$1) \frac{a^2 + 8a + 16}{a^2 - 2a + 1} \cdot \frac{7a - 7}{a^2 - 16};$$

$$2) -\frac{y^3 - 8}{9 - y^2} \cdot \frac{y^2 - 6y + 9}{y^2 + 2y + 4}.$$

10.21. Перетворіть на дріб:

$$1) (4a + 20b) \cdot \frac{5}{a^2 - 25b^2};$$

$$2) (m^2 - 4) \cdot \frac{2m}{(m - 2)^2};$$

$$3) -\frac{a}{2a^2 - 18} \cdot (a^2 - 6a + 9);$$

$$4) (x^3 + 27y^3) \cdot \frac{5}{3x^2 - 9xy + 27y^2}.$$

10.22. Перетворіть на дріб:

$$1) \frac{4}{x^2 - 9y^2} \cdot (6x + 18y);$$

$$2) (c^2 + 4c + 4) \cdot \left(-\frac{c}{3c^2 - 12}\right).$$

10.23. Виконайте дії:

$$1) \left(\frac{25x^2}{8y^3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{16y^5}{125x^3}\right)^2;$$

$$2) \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} \cdot \left(\frac{x + y}{x - y}\right)^3.$$

10.24. Виконайте дії:

$$1) \left(-\frac{16m^3}{27n^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{9n^4}{8m^2}\right)^3;$$

$$2) \left(\frac{m - n}{m + n}\right)^3 \cdot \frac{m^2 + 2mn + n^2}{m^2 - 2mn + n^2}.$$

10.25. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{6ab - b}{5a + b} \cdot \frac{25a^2 - b^2}{6a - 1}, \text{ якщо } a = 1, 2, b = 6;$$

$$2) \frac{a^3 + 8}{a^2 - 1} \cdot \frac{a^2 + a}{a^2 - 2a + 4}, \text{ якщо } a = 6.$$

4

10.26. Виконайте множення:

$$1) \frac{x^2 + ax - cx - ca}{x^2 - ax + cx - ac} \cdot \frac{x^2 + ac + xc + xa}{x^2 + ac - xc - xa};$$

$$2) \frac{5a - 5b}{3c + 3y} \cdot \frac{c^2 - y^2 - c - y}{a^2 - b^2 + a - b}.$$

10.27. Обчисліть $\frac{a^2 - b^2 + a + b}{a^2 - b^2 + a - b} \cdot \frac{4a - 4b}{8a + 8b}$, якщо $a = 100$, $b = 101$.



Вправи для повторення

10.28. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{1}{8}(x + y) = 3, \\ \frac{1}{3}(x - y) = 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{y-1}{2} = 2, \\ \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{12} = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

10.29. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^3 - 8}{x - 2} - x^2$.



Піготуйтеся до вивчення нового матеріалу

10.30. Знайдіть число, взаємно обернене із числом:

- 1) 4; 2) -7; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{2}{5}$; 5) 0,16; 6) 1,2.

10.31. Обчисліть:

- 1) $\frac{26}{45} : \frac{91}{135}$; 2) $2\frac{1}{2} : \frac{15}{16}$; 3) $-3\frac{1}{7} : 2\frac{5}{14}$; 4) $-5\frac{13}{15} : \left(-1\frac{8}{25}\right)$.



Життєва математика

10.32. Родина витрачає 13 % своїх доходів на оплату комірнього, 45 % – на продукти харчування, 17 % – на побутові товари і послуги, а решту – на відпочинок. Який річний бюджет родини, якщо на відпочинок вона витрачає 60 000 грн на рік?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

10.33. На моніторі комп'ютера – число 2500. Щохвилини комп'ютерна програма множить або ділить це число на 2 або на 5, одержуючи при цьому натуральне число. Чи може на моніторі рівно через годину з'явитися число: 1) 10 000; 2) 20 000?

§ 11. Ділення дробів



Щоб знайти частку двох звичайних дробів, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}, \text{ або у вигляді формули: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Доведемо, що ця рівність є тотожністю для будь-яких значень a , b , c і d за умови, що $b \neq 0$, $c \neq 0$ і $d \neq 0$.

Оскільки $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$, то за означенням частки маємо:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}. \quad \blacksquare$$

Отже, якщо $b \neq 0$, $c \neq 0$ і $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Дріб $\frac{d}{c}$ називають *оберненим* до дробу $\frac{c}{d}$.

Сформулюємо *правило ділення дробів*.

Щоб поділити один дріб на інший, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника, тобто

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Приклад 1. Поділити дріб $\frac{21x^2}{8y^3}$ на дріб $\frac{3x}{16y^2}$.

Розв'язання.

$$\frac{21x^2}{8y^3} : \frac{3x}{16y^2} = \frac{21x^2}{8y^3} \cdot \frac{16y^2}{3x} = \frac{21x^2 \cdot 16y^2}{8y^3 \cdot 3x} = \frac{7x \cdot 2}{y} = \frac{14x}{y}.$$

Відповідь: $\frac{14x}{y}$.

Приклад 2. Виконати дію $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 2x} : \frac{3x + 15}{x}$.

Розв'язання. $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 2x} : \frac{3x + 15}{x} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x(x + 2)} \cdot \frac{x}{3(x + 5)} =$

$$= \frac{(x - 5)(x + 5)x}{3x(x + 2)(x + 5)} = \frac{x - 5}{3(x + 2)}.$$

Відповідь: $\frac{x - 5}{3(x + 2)}.$

Приклад 3. Спростити вираз $\frac{a^2 - 4}{5a} : (a^2 + 4a + 4)$.

Розв'язання. Оскільки $a^2 + 4a + 4 = \frac{a^2 + 4a + 4}{1}$, то:

$$\frac{a^2 - 4}{5a} : (a^2 + 4a + 4) = \frac{a^2 - 4}{5a} : \frac{a^2 + 4a + 4}{1} = \frac{(a - 2)(a + 2)}{5a} \cdot \frac{1}{(a + 2)^2} =$$

$$= \frac{(a-2)(a+2) \cdot 1}{5a(a+2)^2} = \frac{a-2}{5a(a+2)}.$$

Відповідь: $\frac{a-2}{5a(a+2)}.$



Сформулюйте правило ділення дробів. Доведіть його.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 11.1. Виконайте ділення:

1) $\frac{2}{a} : \frac{3}{b};$ 2) $\frac{7}{x} : \frac{y}{2};$ 3) $\frac{m}{3} : \frac{m}{4};$ 4) $\frac{a^2}{2} : \frac{a}{7}.$

11.2. Виконайте ділення:

1) $\frac{5}{x} : \frac{2}{y};$ 2) $\frac{a}{2} : \frac{5}{b};$ 3) $\frac{4}{x} : \frac{5}{x};$ 4) $\frac{x^2}{3} : \frac{x}{2}.$

2 11.3. Спростіть вираз:

1) $\frac{7b}{12a} : \frac{21b^2}{16a};$ 2) $\frac{15}{2n^2} : \frac{3m}{8n};$ 3) $\frac{9b}{14a} : \frac{5b^2}{21a^2};$
 4) $-\frac{3x^2}{a} : \frac{6x^3}{a^2};$ 5) $14x^2 : \frac{7x}{a};$ 6) $\frac{8x^3}{7a} : (-2x^2);$
 7) $-\frac{12a^2}{b} : (16a^2);$ 8) $-40ma^5 : \left(-\frac{8m^2}{a}\right).$

11.4. Виконайте дію:

1) $\frac{3a^2}{b} : \frac{a}{b^2};$ 2) $-\frac{3p}{c^3} : \frac{15p^2}{c^2};$ 3) $\frac{4p}{5c} : \frac{8p^2}{15c^3};$
 4) $\frac{15m^3}{c} : (-10m^2);$ 5) $-\frac{2a^2}{b} : (-8a^2);$ 6) $-12a^2bc : \frac{4ab}{m}.$

11.5. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{12m^2}{7c^4} : \frac{6m^4}{35c^3};$ 2) $\frac{9m^2}{22n^3} : \left(-\frac{m^5}{11n^6}\right);$
 3) $-\frac{7ab}{4cd} : \frac{21a^2b}{8cd^3};$ 4) $-\frac{27m^2n}{7c^2x} : \left(-\frac{9mn^2}{7c^2x^3}\right).$

11.6. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{6a^2}{5b^2} : \frac{2a^3}{15b};$ 2) $-\frac{4a^2}{27x} : \frac{a^4}{9x^3};$
 3) $\frac{5xy}{2m^2n} : \left(-\frac{15x^2y}{8mn^3}\right);$ 4) $-\frac{2ab^2}{9x^2p} : \left(-\frac{2a^2b}{27x^2p^3}\right).$

11.7. Виконайте ділення:

$$1) \frac{2a+b}{4p} : \frac{b+2a}{8p^2};$$

$$2) \frac{3a-2x}{7x^2} : \frac{2x-3a}{14x};$$

$$3) \frac{a^2-3a}{9y^2} : \frac{5a}{9y};$$

$$4) \frac{a^2+a}{9b^2} : \frac{5+5a}{b^3};$$

$$5) \frac{7ab}{c^2-3c} : \frac{14ab^2}{3c-9};$$

$$6) \frac{11a}{m^2-2m} : \frac{22a^2}{6-3m}.$$

11.8. Виконайте ділення:

$$1) \frac{x-y}{2a^2} : \frac{y-x}{8a};$$

$$2) \frac{p^2+2p}{18a^2} : \frac{7p}{9a};$$

$$3) \frac{x^2+x}{9ab} : \frac{5x+5}{18a^2b};$$

$$4) \frac{3x-x^2}{7p} : \frac{2x-6}{14p^2}.$$

11.9. Спростіть вираз:

$$1) \frac{m^2-n^2}{p+2q} : \frac{mn+m^2}{2p+4q};$$

$$2) \frac{6x-30}{2x+5} : \frac{x^2-25}{4x+10};$$

$$3) \frac{a+2}{a-2} : \frac{a^2+4a+4}{5a-10};$$

$$4) \frac{x+y}{p-2m} : \frac{x^2+2xy+y^2}{2m^2-mp}.$$

11.10. Спростіть вираз:

$$1) \frac{ab+b^2}{m-3n} : \frac{a^2-b^2}{2m-6n};$$

$$2) \frac{x-5}{y^2-4} : \frac{2x-10}{3y-6};$$

$$3) \frac{x^2-9}{x^2+x} : \frac{x^2+6x+9}{7x+7};$$

$$4) \frac{x-4y}{a^2-2ab+b^2} : \frac{4xy-x^2}{a-b}.$$

11.11. Українська біологиня Оксана Савенко, яка вивчає морських китів, тюленів, дельфінів, стала першою жінкою, котра відправилася у зимову експедицію на станцію «Академік Вернадський».



Спростіть вираз $\frac{6x^2-3xy}{m^2+2m} : \frac{y-2x}{m+2}$ і знайдіть його значення, якщо

$x = 10$, $m = -2$. Відтак дізнаєтеся, скільки місяців провела науковиця у складі експедиції.

11.12. У 2012 р. Україна встановила рекорд за тривалістю музичного телемарафону національної пісні. Спростіть вираз



$\frac{n^2+3n}{5c-p} : \frac{n+3}{10p^2-50pc}$, знайдіть його значення, якщо $n = 5,5$, $p = -2$, та дізнаєтеся, скільки годин тривав цей телемарафон.

11.13. Виконайте дії:

$$1) \frac{4a^2}{5b^3} : \frac{8a^3}{7c^3} : \frac{14c^2}{15b^2};$$

$$2) \frac{2a^3}{25b^3} : \frac{10b^2}{3c^4} : \frac{4a^2}{15bc};$$

$$3) \frac{c^3}{18p^4} : \left(\frac{9c^2}{20p^3} : \frac{27c^3p}{10} \right);$$

$$4) \frac{115a^3}{34b^4} : \frac{92a^6}{51b^3} : \frac{4b^2}{15a^2}.$$

11.14. Подайте у вигляді нескоротного дробу вираз:

$$1) \frac{3a^2}{2b^2c^2} : \frac{7c^6}{6b^3} : \frac{9ab}{14c^2};$$

$$2) \frac{7x^3}{4y^2} \cdot \frac{216x^6}{343y^3} : \frac{18x^8}{49y^4}.$$

11.15. Виконайте ділення:

$$1) \frac{9 + 6a + 4a^2}{2a - 1} : \frac{27 - 8a^3}{1 - 4a^2};$$

$$2) \frac{8 + x^3}{16 - x^4} : \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 4};$$

$$3) (25x^2 - 10xy + y^2) : \frac{y^2 - 5xy}{7};$$

$$4) \frac{(6y - 4x)^2}{3} : (9y^2 - 12xy + 4x^2).$$

11.16. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{x^3 - 8}{9x^2 - 16} : \frac{x^2 + 2x + 4}{3x - 4}, \text{ якщо } x = -3;$$

$$2) (m^2 - 10mn + 25n^2) : \frac{0,2m^2 - 5n^2}{5}, \text{ якщо } m = 10, n = 3.$$

11.17. Знайдіть значення виразу:

$$1) \left(\frac{a^2y^3}{5} \right)^3 : \left(-\frac{a^3y^4}{25} \right)^2, \text{ якщо } a = 117\frac{1}{3}, y = 0,02;$$

$$2) \frac{(2x - y)^2}{(x - 2y)^2} : \frac{4x^2 - y^2}{x^2 - 4y^2}, \text{ якщо } x = 4,2, y = 1,6.$$

4 **11.18.** Спростіть вираз $\frac{0,5a^2 - 32}{0,5a^3 - 62,5} : \frac{0,2a + 1,6}{0,2a^2 + a + 5}.$

11.19. Доведіть тотожність $\frac{m^3 + 27}{75m^2 - 12} : \frac{\frac{1}{3}m^2 - m + 3}{m - 0,4} = \frac{m + 3}{25m + 10}.$

11.20. Спростіть $\frac{6ab + 6 - 4a - 9b}{a^2 - 12a + 36} : \frac{9b^2 - 12b + 4}{3ab - 18b - 2a + 12}.$

11.21. Виконайте дію $\frac{a + 4}{x - a} : \frac{ab + 4b - 2a - 8}{cx + xy - ac - ay}.$



Вправи для повторення

11.22. Подайте дріб у вигляді суми або різниці двох дробів:

$$1) \frac{2a - b}{ab};$$

$$2) \frac{7y^2 + y^3}{y^5};$$

$$3) \frac{4m^2 + 5n^2}{m^2n};$$

$$4) \frac{18x - 24x^2y}{30y^2}.$$

11.23. Обчисліть значення дробу:

1) $\frac{m^2 + 6mn + 9n^2}{(2m + 6n)^2}$, якщо $m = 2\frac{1}{13}$, $n = -2\frac{1}{7}$;

2) $\frac{0,1x^2 - 2,5y^2}{x^2 + 10xy + 25y^2}$, якщо $x = 100$, $y = 20$.

11.24. Доведіть тотожність $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{8}{1-x^8}$.



Життєва математика

11.25. Щомісяця протягом 3 місяців прибуток малого підприємства збільшувався на 10 % відносно прибутку за попередній місяць. Податок на прибуток підприємства (ППП) в Україні складає 18 %. У якому розмірі сплатило це підприємство ППП за ці 3 місяці, якщо прибуток за перший місяць склав 20 000 грн? Відповідь округліть до цілого числа гривень.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

11.26. Український гросмейстер Василь Іванчук узяв участь у чемпіонаті світу з бліцу. У перший день він переміг суперників у 70 % партій, а на другий день виграв ще 15 партій поспіль. Відсоток виграшних партій за два дні сягнув 80 %. Скільки партій за ці два дні зіграв Василь Іванчук?

ЗМІСТ

Шановні восьмикласниці та восьмикласники!	3
ПОВТОРЮЄМО АЛГЕБРУ ЗА 7 КЛАС	6

Тема 1. ДРОБОВІ ВИРАЗИ. ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ ДРОБУ. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ

§ 1. Раціональні вирази. Раціональні дроби	13
§ 2. Основна властивість раціонального дробу	19
§ 3. Додавання та віднімання дробів з однаковими знаменниками	26
§ 4. Додавання та віднімання дробів з різними знаменниками	32
Домашня самостійна робота № 1 (§§ 1–4)	41
Завдання для перевірки знань до §§ 1–4	43
ПОВТОРЮЄМО ГЕОМЕТРІЮ ЗА 7 КЛАС	44

Тема 2. ЧОТИРИКУТНИКИ. ПАРАЛЕЛОГРАМ І ЙОГО ВИДИ

§ 5. Чотирикутник, його елементи. Сума кутів чотирикутника	50
§ 6. Паралелограм, його властивості й ознаки	55
§ 7. Прямокутник і його властивості	63
§ 8. Ромб і його властивості	68
§ 9. Квадрат і його властивості	73
Домашня самостійна робота № 2 (§§ 5–9)	77
Завдання для перевірки знань до §§ 5–9	78

Тема 3. МНОЖЕННЯ ТА ДІЛЕННЯ ДРОБІВ. РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

§ 10. Множення дробів. Піднесення дробу до степеня	80
§ 11. Ділення дробів	86