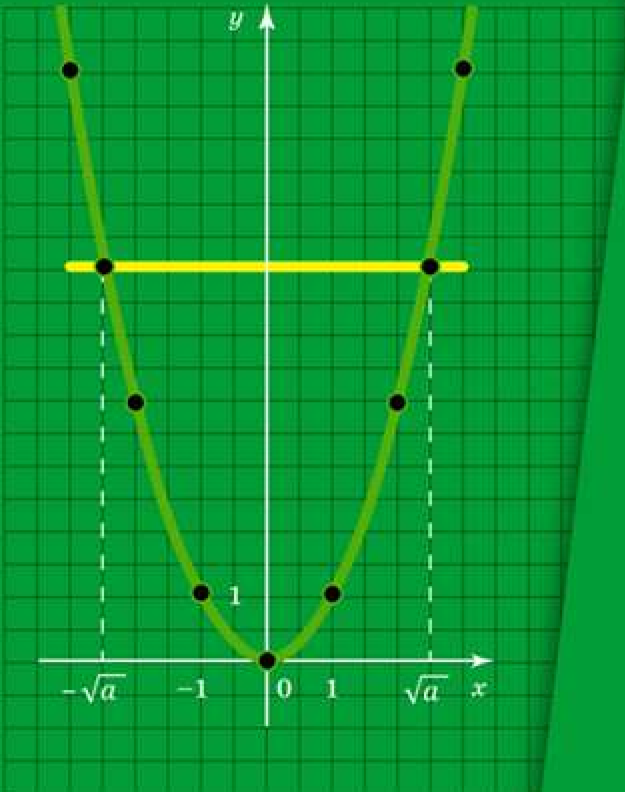
Генеза

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

Олександр Істер

АЛГЕБРА



8

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ
ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^0 = 1$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

m і n – цілі числа, $a \neq 0$, $b \neq 0$

ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО
КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad a \geqslant 0$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$a \geqslant 0$, $b > 0$

$$\sqrt{a^2} = |a| \qquad \sqrt{a^{2k}} = |a^k|$$

a – будь-яке число, k – натуральне число

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ
ВІД 10 ДО 99

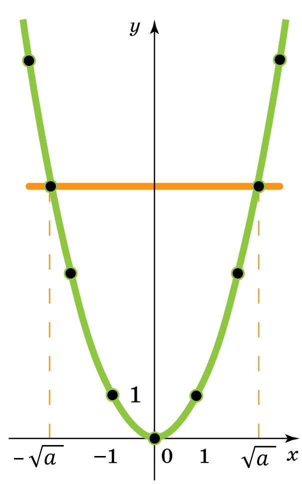
Десятки	**Одиниці**									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Олександр Істер

АЛГЕБРА

Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України



Київ
«ГЕНЕЗА»
2025

УДК 512(075.3)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 21.02.2025 р. № 347)

Відповідає модельній навчальній програмі **«Алгебра. 7–9 класи»**
для закладів загальної середньої освіти
(авт.: Істер О. С.)

Переглянути електронний додаток до підручника можна за посиланням *https://cutt.ly/SeLLod6I* або *QR*-кодом

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

У підручнику використано ілюстративний матеріал з відкритих джерел інтернету, зокрема сайтів *vecteezy.com*, *depositphotos.com*. Усі матеріали в підручнику використано з навчальною метою відповідно до законодавства України про авторське право і суміжні права.

Редактор *Олена Мовчан*. Обкладинка *Олександра Павленка*.
Макет, художнє оформлення *Василя Марущинця*.
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*. Коректор *Інна Борік*

Формат 70×100/16. Ум. друк. арк. __,__. Обл.-вид. арк. 16,00.
Тираж _________ пр. Вид. № ________. Зам. №_______________.

ТОВ «Генеза», 01133, Україна, місто Київ, вулиця Генерала Алмазова, 18/7 (літ. В), офіс 404. Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 7692 від 24.10.2022.

Віддруковано у

.

Істер О. С.
І-89 Алгебра : підруч. для 8-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер. — Київ : Генеза, 2025. — 256 с.
ISBN 978-____-__-_____-_.

УДК 512(075.3)

ISBN 978-____-__-_____-_

Шановні восьмикласниці та восьмикласники!

Ви продовжуєте вивчати одну з найважливіших математичних дисциплін – **алгебру**. Допоможе вам у цьому підручник, у якому використано такі умовні позначення:

– пригадай (раніше вивчене);

– запитання і завдання до теоретичного матеріалу;

113 – завдання для класної і 115 – домашньої роботи;

■ – кінець доведення;

– рубрика «Україна – це ми»;

– рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;

– рубрика «Життєва математика»;

– вправи для підготовки до вивчення нової теми;

– вправи для повторення;

– рубрика «Головне в розділі».

Текст, надрукований **жирним** шрифтом, звертає вашу увагу на нове поняття або таке, яке треба пригадати.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так: з позначок 1, 2, 3, 4, * починаються вправи відповідно початкового, середнього, достатнього, високого рівнів та підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, головний теоретичний матеріал (рубрика *«Головне в розділі»*), а в кінці підручника – *«Завдання для перевірки знань за курс алгебри 8 класу»*. *«Задачі підвищеної складності»* допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики.

Автор намагався подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках та під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, які часто доводиться розв'язувати в повсякденному житті.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів та розвитку математики як науки ви знайдете в рубриці *«А ще раніше...»*.

Бажаємо успіхів в опануванні курсу!

Шановні вчительки та вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках, факультативних, індивідуальних, додаткових заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів / учениць, диференціації навчання тощо.

Додаткові вправи в «*Завданнях для перевірки знань*» призначено для учнів / учениць, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Чи правильно їх розв'язано, учитель / учителька може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад, під час уроків узагальнення або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

У рубриці «*Життєва математика*» зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, економічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, а в рубриці «*Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу*» – задачі, що допоможуть актуалізувати відповідні знання.

«*Задачі підвищеної складності*» в кінці підручника допоможуть підготувати учнів / учениць до різноманітних математичних змагань та підвищити їхню цікавість до математики.

«Завдання для перевірки знань за курс алгебри 8 класу», які також розміщено в кінці підручника, можна запропонувати учням для підготовки до річної контрольної роботи.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати матеріал цих уроків за підручником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього потрібно розв'язати вправи, що посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж курсу алгебри 8 класу, який опрацьовує дитина, ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Якщо ваша дитина виявляє підвищену цікавість до математики та бажає поглибити свої знання, зверніть увагу на *«Задачі підвищеної складності»*, які розміщено в кінці підручника.

ПОВТОРЮЄМО АЛГЕБРУ ЗА 7 КЛАС

Лінійні рівняння з однією змінною

1 **1.** (*Усно.*) Яке з рівнянь є лінійним рівнянням з однією змінною:
1) $12x = 0$; 2) $4x + 2y = 9$; 3) $7x = x^2$;
4) $0x = 12$; 5) $\frac{1}{x} - 7 = 0$; 6) $0x = 0$?

2 **2.** Яке із чисел є коренем рівняння $x^2 - x = 2x + 4$:
1) 0; 2) –1; 3) 1;
4) 2; 5) 4; 6) –3?

3. Яке із чисел є коренем рівняння $x^2 - 3x = x + 5$:
1) 1; 2) 0; 3) –1;
4) 3; 5) 5; 6) –2?

4. Розв'яжіть рівняння:
1) $4x = -8$; 2) $9x - 13 = 3x + 5$; 3) $7 - (3x + 2) = 5$;
4) $-\frac{1}{8}x = -1\frac{1}{8}$; 5) $8 - 2x = -(4x + 3)$; 6) $3(x - 3) = 4x + 21$.

5. Розв'яжіть рівняння:
1) $-5x = -20$; 2) $7x - 11 = 2x + 1$; 3) $9 - (5x + 1) = 10$;
4) $2x = -1\frac{1}{5}$; 5) $7 - 3x = -(2x - 7)$; 6) $9(x - 1) = 8x + 13$.

6. Складіть лінійне рівняння, яке рівносильне рівнянню $9x + 36 = 0$.

7. У вазі тістечок утричі більше, ніж на тарілці. Скільки тістечок у вазі, якщо їх там на 12 більше, ніж на тарілці?

8. За два тижні магазин електроніки продав 48 ноутбуків, причому першого тижня було продано на 6 ноутбуків більше, ніж другого. Скільки ноутбуків продали другого тижня?

9. За 2 год велосипедистка долає ту саму відстань, що й пішохід за 5 год. Швидкість пішохода на 9 км/год менша від швидкості велосипедистки. Знайдіть швидкість кожного.

10. Ящик з яблуками на 8 кг важчий за ящик зі сливами. Яка маса кожного ящика, якщо маса двох ящиків з яблуками така сама, як і маса трьох ящиків зі сливами?

3 **11.** Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-5}{3} = \frac{5x+1}{9}$ і $7(y + 3) - 9(y - 1) = 24$. Знайдіть значення виразу $100x + 5y$ та дізнайтеся рік заснування Національного університету «Києво-Могилянська академія».

12. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-1}{3} = \frac{3+4x}{7}$ і $7(y - 2) - 3(y + 5) = 11$. Знайдіть значення виразу $200x + 11y$ та дізнайтеся рік ухвалення першої Конституції Пилипа Орлика.

13. Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| - 2 = 9$; 2) $5 - |x| = 7$; 3) $|x - 2| = 3$;

4) $|2x - 1| = 0$; 5) $|5x + 2| = 3$; 6) $\frac{1}{3}|x - 2| + 3 = 7$.

14. Одна сторона трикутника утричі менша від другої і на 12 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, периметр якого дорівнює 52 см.

15. В одному мішку на 6 кг борошна більше, ніж у другому, і вдвічі менше, ніж у третьому. Скільки кілограмів борошна в кожному мішку, якщо у трьох мішках разом 66 кг борошна?

16. За якого значення a рівняння $x + a = 9$ і $4x - a = 3x$ мають однакові корені?

17. За якого значення b рівняння $x - b = 7$ і $5x + b = 4x$ мають однакові корені?

Цілі вирази

18. Подайте у вигляді степеня:

1) c^3c^5; 2) m^9mm^{15}; 3) $p^{12} : p^3$; 4) $(x^9)^7$.

19. Подайте у вигляді степеня:

1) p^7p^2; 2) tt^2t^3; 3) $c^{15} : c^5$; 4) $(a^3)^8$.

20. Виконайте множення:

1) $p(x - 2)$; 2) $-c(m - 4)$; 3) $x(c - 3 - d)$.

21. Виконайте множення:

1) $t(3 - c)$; 2) $-x(p - 2)$; 3) $a(t - b - 9)$.

22. Знайдіть значення виразу:

1) $(-3)^4$; 2) $(-6)^3$; 3) $0{,}1 \cdot 10^3$; 4) $(2{,}6 - 2{,}7)^2$.

23. Знайдіть значення виразу:

1) $(-2)^4$; 2) $(-5)^3$; 3) $0{,}2 \cdot 5^3$; 4) $(1{,}5 - 1{,}8)^2$.

24. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $4a^2(3 - a)$; 2) $7(x - 2) - 2(x - 7)$;

3) $(x - 5)(x + 3)$; 4) $-5c^2(8 - c^3 + c)$;

5) $4(2x - 3) - (8x - 9)$; 6) $(2b - a)(a + b)$.

25. Перетворіть на многочлен вираз:

1) $7b^2(b - 3)$; 2) $4(b - 3) - 2(2b + 1)$;

3) $(m + 2)(m - 4)$; 4) $-2x^3(4 - x^2 + x)$;

5) $3(2c - 6) - (5c - 18)$; 6) $(3x + y)(x - y)$.

26. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(b - 6)^2$; 2) $(7x + 2)^2$; 3) $(4a - 1)^2 - 16a^2$;

4) $(p - 3)(p + 3)$; 5) $(7 + x)(x - 7)$; 6) $(2y - 3)(2y + 3) + 9$.

27. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(c + 5)^2$; 2) $(8b - 3)^2$; 3) $(4x + 3)^2 - 9$;

4) $(c + 2)(c - 2)$; 5) $(m - 9)(9 + m)$; 6) $(5p - 2)(5p + 2) - 25p^2$.

28. Розкладіть на множники:

1) $4a + 12b$; 2) $15ac - 20a$; 3) $a(c - x) + 9c - 9x$;
4) $-7c^2 - 21c^5$; 5) $a^3 + a^7 - a^5$; 6) $5a + 5b - ay - yb$.

29. Розкладіть на множники:

1) $9x - 18y$; 2) $4xm + 6m$; 3) $m(x - p) + 3x - 3p$;
4) $-2x^3 - 8x^5$; 5) $b^2 - b^5 + b^3$; 6) $7c + 7n - cx - xn$.

3 **30.** Знайдіть значення виразу, використовуючи властивості степенів:

1) $256 : 2^7 \cdot 8$; 2) $\dfrac{125 \cdot 5^7}{5^4 \cdot 625}$; 3) $0{,}5^9 \cdot 2^9$; 4) $\dfrac{27^8}{81^5}$.

31. Знайдіть значення виразу, використовуючи властивості степенів:

1) $3^9 : 81 : 27$; 2) $\dfrac{1000 \cdot 10^7}{10 \cdot 100^4}$; 3) $0{,}25^7 \cdot 4^7$; 4) $\dfrac{16^4}{8^5}$.

32. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:

1) $(x^2 - 3x)(x + 1) - x^2(x - 2)$; 2) $(2a - 3)^2 - (4a - 1)(a + 3)$.

33. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:

1) $m^2(m + 3) - (m^2 + 4m)(m - 1)$; 2) $(9x - 1)(x + 3) - (3x - 2)^2$.

34. Спростіть вираз $(9x - 1)(4x + 2) - (6x - 7)(6x + 7)$ та знайдіть його значення, якщо $x = -3$, відтак дізнаєтеся, скільки разів чоловіча збірна України із шахів ставала призером командного чемпіонату світу.

35. Спростіть вираз $(4a - 3)(4a + 3) - (8a - 7)(2a - 1)$ та знайдіть його значення, якщо $a = 1\dfrac{1}{11}$, відтак дізнаєтеся, скільки разів жіноча збірна України із шахів ставала призером всесвітніх шахових олімпіад.

36. Розкладіть многочлен на множники:

1) $6a^3 - 2a^2 - 12a$; 2) $x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 6$;
3) $-4x^2 + 20x - 25$; 4) $0{,}36p^8 - c^{10}x^{12}$;
5) $64m^3c^9 + t^{30}$; 6) $c^2 + 2cd + d^2 - 25$.

37. Розкладіть многочлен на множники:

1) $8p^4 - 4p^5 + 12p$; 2) $a^5 - 2a^2 - 3a^3 + 6$; 3) $-9m^2 - 6m - 1$;
4) $0{,}49m^4 - t^{16}p^2$; 5) $125a^6 - b^9$; 6) $a^2 - 2ax + x^2 - 36$.

38. Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^2 - x = 0$; 2) $25x^2 + 10x + 1 = 0$; 3) $(x - 1)^2 - 4 = 0$.

39. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 + x = 0$; 2) $36x^2 - 12x + 1 = 0$; 3) $(x + 2)^2 - 9 = 0$.

4 **40.** Доведіть, що якщо n – натуральне число, то значення виразу $(2n - 3)(5n - 1) - 2n(5n - 12) + n$ є непарним числом.

41. Доведіть, що якщо m – натуральне число, то значення виразу $(3m + 2)(4m - 1) - 2m(6m - 7) + m$ є парним числом.

42. Виконайте множення $(m^2 - 2m + 3)(m^2 + m - 5)$.

43. Відомо, що $2xy^2 = 5$. Знайдіть значення виразу:
1) xy^2; 2) $3xy^2$; 3) $-4x^2y^4$; 4) $8x^3y^6$.

44. Відомо, що $5ab^2 = 7$. Знайдіть значення виразу:
1) ab^2; 2) $4ab^2$; 3) $-25a^2b^4$; 4) $125a^3b^6$.

Функції

1

45. (*Усно.*) Які з поданих записів задають функцію? Укажіть для них незалежну змінну (аргумент) та залежну змінну:
1) $m = 2p - 9$; 2) $4x - 9 = 9 - 4x$; 3) $y = \dfrac{2x}{x-3}$;
4) $36 : 9 - 4 = 0$; 5) $c = n^2 - n^3$; 6) $2x - 9 > 3$.

46. (*Усно.*) Чи є лінійною функція:
1) $y = 2x^2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = 2$;
4) $y = \dfrac{1}{2x-3}$; 5) $y = 2x - 3$; 6) $y = 2x^2 - 3$?

2

47. Функцію задано формулою $y = 3 - 2x$. Знайдіть:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -4; $1{,}5$;
2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює -7; 5.

48. Функцію задано формулою $y = 4x - 5$. Знайдіть:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює $-1{,}5$; 6;
2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює -9; 1.

49. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = 3x - 6$; 2) $y = \dfrac{3x-6}{5}$; 3) $y = \dfrac{5}{3x-6}$; 4) $y = \dfrac{7}{x+6}$.

50. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = 2x + 4$; 2) $y = \dfrac{2x+4}{7}$; 3) $y = \dfrac{7}{2x+4}$; 4) $y = \dfrac{9}{x-4}$.

51. Не виконуючи побудови графіка, знайдіть нулі функції:
1) $y = 7x$; 2) $y = 2x - 9$; 3) $y = -\dfrac{x}{7}$; 4) $y = \dfrac{x+9}{11}$.

52. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:
1) $y = -4x$; 2) $y = 7 + 14x$; 3) $y = \dfrac{x}{5}$; 4) $y = \dfrac{x-4}{5}$.

53. Побудуйте графік лінійної функції:
1) $y = x + 3$; 2) $y = 7 - 0{,}5x$;
3) $y = -4x$; 4) $y = 2$.

54. Побудуйте графік лінійної функції:
1) $y = 2 - x$; 2) $y = \dfrac{1}{3}x + 1$; 3) $y = 2x$; 4) $y = -3$.

55. На малюнку 1 зображено графік функції, визначеної для $-4 \leqslant x \leqslant 4$. За графіком знайдіть:

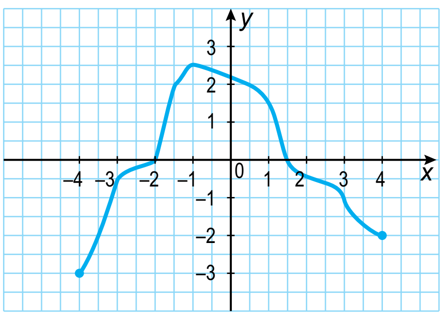
1) значення y, якщо $x = -3{,}5;\ -1;\ 0{,}5$;

2) значення x, якщо $y = -0{,}5;\ 2;\ 2{,}5$;

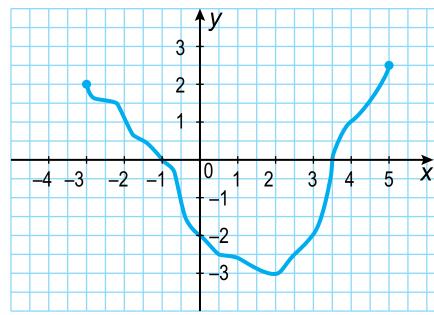
3) нулі функції;

4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;

5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.



Мал. 1



Мал. 2

56. На малюнку 2 зображено графік функції, визначеної для $-3 \leqslant x \leqslant 5$. За графіком знайдіть:

1) значення y, якщо $x = -1;\ -0{,}5;\ 2{,}5$;

2) значення x, якщо $y = -3;\ -2;\ 1$;

3) нулі функції;

4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;

5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.

57. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 0{,}5x - 4$;

2) $y = 16 - x^2$.

58. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 3 - 2x$;

2) $y = x^2 + 2x$.

59. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -3x, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ 4 + x, \text{ якщо } x > -1. \end{cases}$

60. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 4x, \text{ якщо } x < 1, \\ 5 - x, \text{ якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$

Системи лінійних рівнянь з двома змінними

1 **61.** (*Усно.*) Чи належить графіку рівняння $x + y = 7$ точка:
1) (6; 1); 2) (8; –2); 3) (1; –6); 4) (3; 4)?

62. (*Усно.*) Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$ пара чисел:
1) (4; 3); 2) (3; 2); 3) (4; 1)?

2 **63.** Побудуйте графік рівняння:
1) $x - y = 4$; 2) $0{,}5x + y = 1$; 3) $3x + 0y = -6$; 4) $6y = 18$.

64. Побудуйте графік рівняння:
1) $x + y = 3$; 2) $x - 0{,}5y = 2$;
3) $4x = 12$; 4) $0x + 2y = -8$.

65. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:
1) $\begin{cases} y = -x, \\ y = 6 + x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2y = -6, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

66. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:
1) $\begin{cases} y = x, \\ y = 4 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + 2y = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 7x = 14, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$

67. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:
1) $\begin{cases} 3x = 12, \\ 2x + 3y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = y - 2, \\ 4x - 3y = -5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + y = 3, \\ 4x + 5y = -7. \end{cases}$

68. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:
1) $\begin{cases} 4y = -8, \\ 5x + 2y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x + 3, \\ 2x - 3y = -8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 5y = 4. \end{cases}$

69. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:
1) $\begin{cases} 3x + y = 2, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 2x - 4y = -13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x - 3y = 11, \\ 5x + 9y = 1. \end{cases}$

70. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:
1) $\begin{cases} x + 3y = 1, \\ -x + 4y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 5y = 11, \\ 4x - 5y = 13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x - 3y = 15, \\ 8x + 5y = 19. \end{cases}$

71. Два ящики з бананами й один з апельсинами важать 40 кг, а ящик з бананами і два ящики з апельсинами – 44 кг. Скільки важить один ящик з бананами і скільки – один ящик з апельсинами?

72. За 3 ручки і зошит заплатили 44 грн, а за ручку і 3 зошити – 68 грн. Скільки коштує одна ручка і скільки – один зошит?

3 **73.** Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:
1) $2x - 3y = 24$; 2) $0x + 5y = 15$; 3) $-4x = 12$.

74. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

1) $4x + 5y = 40$; 2) $2x + 0y = -16$; 3) $3y = 6$.

75. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2a + 3b = 0, \\ 4a - 5b = -22; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 5y = 1, \\ 3x + 10y = 42; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + 5y = 9, \\ 4x - 3y = -17. \end{cases}$

76. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2m - 3n = 7, \\ 5m + 6n = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 8x + 5y = 24; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 5x - 3y = 18. \end{cases}$

77. Човен за 2 год руху за течією і 3 год руху проти течії долає 88 км. За 4 год руху за течією човен долає таку саму відстань, що й за 5 год проти течії. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії.

4 **78.** Складіть рівняння прямої, графік якої проходить через точки (–1; 11) і (2; 5).

79. Графік лінійної функції проходить через точки (–3; 2) і (4; 23). Задайте цю функцію формулою.

80. За 4 циркулі й 3 лінійки заплатили 195 грн. Після того як циркуль подорожчав на 10 %, а лінійка подешевшала на 20 %, один циркуль і одна лінійка разом стали коштувати 53 грн. Якою була початкова вартість циркуля і якою – лінійки?

РОЗДІЛ 1

РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **пригадаєте** основну властивість звичайного дробу та основні властивості рівнянь;
- **ознайомитеся** з поняттями раціонального виразу, раціонального дробу, раціонального рівняння; з функцією $y = \frac{k}{x}$, степенем із цілим показником, стандартним виглядом числа;
- **навчитеся** скорочувати раціональні дроби та зводити їх до нового знаменника; виконувати арифметичні дії з раціональними дробами; розв'язувати раціональні рівняння.

§ 1. Раціональні вирази. Раціональні дроби

1. Раціональні вирази

Із 7 класу ви вже знаєте, що вирази, які не містять ділення на вираз зі змінною, наприклад: $5m^2p$; $4c^3 + t^9$; $(m - n)(m^2 + n^7)$; $k^9 - \frac{p+l}{4}$ – ***цілі раціональні вирази.***

Будь-який цілий вираз можна подати у вигляді многочлена стандартного вигляду, наприклад:

$$(m - n)(m^2 + n^7) = m^3 + mn^7 - nm^2 - n^8;$$

$$k^9 - \frac{p+l}{4} = k^9 - \frac{1}{4}p - \frac{1}{4}l.$$

На відміну від цілих виразів, вирази

$$5m - \frac{3}{p};\quad \frac{x+2}{y-9};\quad \frac{1}{5}x - \frac{19}{m^2};\quad \frac{a-b}{a^2+ab+b^2};\quad \frac{1}{(x-y)(x^2+7)}$$

містять ділення на вираз зі змінною. Такі вирази називають ***дробовими раціональними виразами.***

Цілі раціональні й дробові раціональні вирази називають ***раціональними виразами.***

Раціональні вирази – це математичні вирази, які містять дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня.

2. Область визначення виразу

Цілий раціональний вираз має зміст для будь-яких значень змінних, що до нього входять, оскільки для знаходження його значення треба виконати дії додавання, віднімання і множення та ділення на число, відмінне від нуля, що завжди можливо.

Вираз вигляду $\dfrac{P}{Q}$, де P і Q – многочлени, називають ***раціональним дробом***.

Розглянемо раціональний дріб $\dfrac{5}{x-3}$. Його значення можна знайти для будь-якого значення x, крім $x = 3$, оскільки для $x = 3$ знаменник дробу дорівнюватиме нулю. У такому разі кажуть, що вираз $\dfrac{5}{x-3}$ має зміст для всіх значень змінної x, крім $x = 3$ (або для $x = 3$ не має змісту).

Значення змінних, для яких вираз має зміст, називають ***допустимими значеннями змінних*** у виразі.

Ці значення утворюють ***область визначення виразу***, або ***область допустимих значень змінних*** у виразі.

Приклад 1. Знайти допустимі значення змінної у виразі:

1) $\dfrac{m-3}{9}$; 2) $\dfrac{5}{p+2}$; 3) $\dfrac{x+7}{x(x-9)}$; 4) $\dfrac{7}{|y|-3}$.

Розв'язання. 1) Вираз має зміст для будь-яких значень змінної m.
2) Допустимі значення змінної p – усі числа, крім числа -2, оскільки це значення змінної перетворює знаменник дробу на нуль.
3) Знаменник дробу перетворюється на нуль, якщо $x = 0$ або $x = 9$. Тому допустимі значення змінної x – усі числа, крім чисел 0 і 9.
4) Допустимі значення змінної y – усі числа, крім 3 і -3.
Скорочено *відповіді* можна записати так:
1) m – будь-яке число; 2) $p \neq -2$; 3) $x \neq 0$; $x \neq 9$; 4) $y \neq 3$; $y \neq -3$.

3. Умова рівності дробу нулю

Розглянемо **умову рівності дробу нулю.** Оскільки $\dfrac{0}{Q} = 0$, якщо $Q \neq 0$, то

$\dfrac{P}{Q} = 0$ тоді й тільки тоді, коли $P = 0$, а $Q \neq 0$, тобто за умови $\begin{cases} P = 0, \\ Q \neq 0. \end{cases}$

Приклад 2. Для яких значень змінної дорівнює нулю значення дробу:

1) $\frac{x-3}{x+1}$; 2) $\frac{(a-2)(a+1)}{a+5}$; 3) $\frac{b(b-7)}{b-7}$?

Розв'язання. 1) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $x = 3$, водночас знаменник нулю не дорівнює. Тому число 3 є тим значенням змінної, за якого цей дріб дорівнює нулю.

2) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $a = 2$ або $a = -1$. Для кожного із цих значень знаменник дробу нулю не дорівнює. Тому числа 2 і −1 є тими значеннями змінної, для яких цей дріб дорівнює нулю.

3) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $b = 0$ або $b = 7$. Якщо $b = 0$, знаменник дробу нулю не дорівнює, а якщо $b = 7$, знаменник перетворюється на нуль, тобто дріб не має змісту. Отже, дріб дорівнює нулю лише якщо $b = 0$.

Відповідь: 1) $x = 3$;
2) $a = 2$, $a = -1$;
3) $b = 0$.

А ще раніше...

Давньогрецький математик Діофант (бл. III ст. н. е.) розглянув раціональні дроби та дії з ними у своїй праці «Арифметика». Зокрема, на сторінках цієї книжки можна зустріти доведення тотожностей

$$30\cdot\frac{144}{x^4+900-60x^2}+\frac{60}{x^2-30}=\frac{60x^2+2520}{x^4+900-60x^2}$$

та $$\frac{96}{x^4+36-12x^2}-\frac{12}{6-x^2}=\frac{12x^2+24}{x^4+36-12x^2},$$

які записано тодішньою символікою.

Видатний англійський учений Ісаак Ньютон (1643–1727) у своїй монографії «Універсальна арифметика» (1707) означує дріб так: «Запис однієї з двох величин під іншою, нижче якої між ними проведено риску, означає частку або ж величину, що виникає при діленні верхньої величини на нижню». У цій роботі Ньютон розглядає не тільки звичайні дроби, а й раціональні.

Які вирази називають цілими раціональними виразами, а які – дробовими раціональними виразами? Наведіть приклади таких виразів. ○ Які вирази називають раціональними виразами? ○ Що таке раціональний дріб? Наведіть приклади. ○ Що називають допустимими значеннями змінної? ○ Сформулюйте умову рівності дробу $\frac{P}{Q}$ нулю.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **1.1.** (*Усно.*) Які з виразів є цілими, а які – дробовими:

1) $\frac{1}{7}m^3n$; 2) $\frac{a+1}{a}$; 3) m^2+2m-8; 4) $\frac{b-2}{8}$;

5) $\frac{1}{x^2+m^2}$; 6) $\frac{x+y-a}{10}$; 7) $(p-2)^2+7p$; 8) $a^2+\frac{2}{a}$?

1.2. Серед раціональних виразів $a^3 - ab$; $\frac{m}{17}$; $\frac{17}{a}$; $t(t-1)+\frac{t}{p}$; $\frac{1}{9}a - \frac{1}{8}b$; $\frac{7}{x^2+1} - 5$ знайдіть і випишіть ті, що є:
1) цілими; 2) дробовими.

1.3. Які з дробів є раціональними дробами:
1) $\frac{a}{a^2-3}$; 2) $\frac{m\left(n+\frac{1}{k}\right)}{p^2-2}$; 3) $\frac{x^2-4x+5}{y^2-9}$; 4) $\frac{\frac{x}{x+2}}{m-3}$?

1.4. Знайдіть значення виразу:
1) $\frac{3a+9}{a^2}$, якщо $a = 1; -2; -3$; 2) $\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-2}$, якщо $x = 4; -1$.

1.5. Дізнайтеся прізвище видатного українського авіаконструктора. Для цього знайдіть значення виразу з першої таблиці та перенесіть літери, що відповідають цим значенням, у другу таблицю. Користуючись будь-якими інформаційними джерелами, ознайомтеся з біографією цього авіаконструктора.

x	−3	−1	0	2	3
$\frac{1+x}{1-x}$					
Літери	Т	В	А	О	Н

1	−2	−0,5	−3	−2	−3	0

1.6. Складіть дріб:
1) чисельником якого є різниця змінних a і b, а знаменником – їх сума;
2) чисельником якого є добуток змінних x і y, а знаменником – сума їх квадратів.

1.7. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:
1) $m^2 - 5$; 2) $\frac{3a-5}{a}$; 3) $\frac{7b+9}{8}$; 4) $\frac{t-9}{t+1}$;
5) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{2}{x-7}$; 6) $\frac{p+2}{p(p-1)}$; 7) $\frac{3}{x^2+1}$; 8) $\frac{1}{m} + \frac{1}{|m|+5}$.

1.8. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:
1) $p + 9$; 2) $\frac{a-7}{a+4}$; 3) $\frac{b-9}{4}$;
4) $\frac{x^2-3}{x(x+2)}$; 5) $\frac{2y}{y-1} + \frac{3}{y+6}$; 6) $\frac{4}{m^2+2}$.

1.9. За t год автомобіль подолав 240 км. Складіть вираз для обчислення швидкості автомобіля (у км/год). Знайдіть значення цього виразу, якщо $t = 3;\ 4$.

1.10. Пенсіонерка для потреб мечеті витратила 48 грн на придбання n ручок. Складіть вираз для обчислення ціни ручки (у грн) та обчисліть його значення, якщо $n = 8;\ 10$.

3 **1.11.** Для якого значення змінної значення дробу $\frac{x+2}{8}$ дорівнює:

1) -2; 2) 9; 3) $0{,}01$; 4) $-4{,}9$?

1.12. Для якого значення змінної значення дробу $\frac{m-1}{10}$ дорівнює:

1) -8; 2) $0{,}25$?

1.13. Для якого значення x дорівнює нулю дріб:

1) $\frac{4x-8}{x}$; 2) $\frac{x(x+3)}{x^2}$; 3) $\frac{(x-1)(x+7)}{x+5}$; 4) $\frac{3x-6}{8-4x}$?

1.14. Для якого значення y дорівнює нулю дріб:

1) $\frac{y}{5y-7}$; 2) $\frac{(y+1)y}{y^7}$; 3) $\frac{(y+2)(y-3)}{y+4}$; 4) $\frac{y+1}{5y+5}$?

1.15. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{a+1}{(a-1)(2a+7)}$; 2) $\frac{t+2}{t^2-7t}$; 3) $\frac{m}{m^2-25}$; 4) $\frac{5}{(x-9)^2}$.

1.16. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{p-7}{(9-p)(4p+10)}$; 2) $\frac{a+2}{5a-a^2}$; 3) $\frac{c}{4-c^2}$; 4) $\frac{a}{(a+1)^2}$.

1.17. Складіть вираз зі змінною x, що мав би зміст для будь-яких значень x, крім:
1) $x = 2$;
2) $x = 1$ і $x = -4$.

4 **1.18.** Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{37}{a(a-2)-3a+6}$; 2) $\frac{x}{|x|-1}$; 3) $\frac{5m}{1-\frac{1}{m}}$; 4) $\frac{4k}{4-|k-2|}$.

1.19. Знайдіть область визначення виразу:

1) $\frac{12}{x(x+2)-4x-8}$; 2) $\frac{m}{4-|m|}$; 3) $\frac{7}{\frac{1}{x}+1}$; 4) $\frac{2a}{|a+2|-3}$.

1.20. Визначте знак дробу:

1) $\frac{x^7}{y^8}$, якщо $x > 0$, $y < 0$; 2) $\frac{m+1}{n^7}$, якщо $m > 0$, $n < 0$;

3) $\frac{|p-1|}{n^{19}}$, якщо $p < 0$, $n > 0$; 4) $\frac{|a|+1}{c^8}$, якщо $a < 0$, $c < 0$.

1.21. Доведіть, що для будь-якого значення змінної значення дробу:

1) $\frac{7}{a^2+1}$ є додатним; 2) $\frac{4}{-p^2-2}$ є від'ємним;

3) $\frac{(a+1)^2}{a^2+7}$ є невід'ємним; 4) $\frac{-(p^2-4)^2}{p^4+1}$ є недодатним.

Вправи для повторення

1.22. Перетворіть вираз на многочлен:
1) $(a^2+2a-7)-(a^2-4a-9)$; 2) $3x^2y(2x-3y+7)$;
3) $(x^2-2x)(x+9)$; 4) $(x^2-5)^2+10x^2$.

1.23. Розв'яжіть рівняння: $4x(2x-7)+3x(5-2x)=2x^2+39$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1.24. Скоротіть дріб:

1) $\frac{7}{14}$; 2) $\frac{25}{35}$; 3) $\frac{12}{18}$; 4) $\frac{30}{45}$; 5) $\frac{36}{48}$; 6) $\frac{51}{85}$.

1.25. Зведіть дріб:

1) $\frac{1}{8}$ до знаменника 24; 2) $\frac{2}{7}$ до знаменника 28;

3) $\frac{4}{15}$ до знаменника 30; 4) $\frac{8}{9}$ до знаменника 63.

1.26. Подайте у вигляді степеня вираз:
1) m^3m^4; 2) pp^7; 3) $x^9 : x^3$;
4) $(a^3)^7$; 5) $b^2 \cdot (b^3)^4$; 6) $(c^4)^5 : c^{12}$.

1.27. На який вираз треба помножити одночлен $2a^2b$, щоб отримати:
1) $2a^3b$; 2) $2a^2b^4$; 3) $4a^5b$; 4) $16a^4b^3$?

1.28. Розкладіть на множники многочлен:
1) $ab-b^2$; 2) m^7+m^5; 3) $8m^2-4mn$;
4) $6a^3b-15a^2b^2$; 5) x^2+6x+9; 6) $c^2-10c+25$;
7) x^2-25; 8) p^4-49m^2; 9) $a^2+ab+7a+7b$.

Життєва математика

1.29. Лікарка Наталя Борисівна веде здоровий спосіб життя, тому на роботу і з роботи їздить на велосипеді. Вранці вона дістається до роботи за 15 хв, рухаючись зі швидкістю 12 км/год. З роботи повертається зі швидкістю 10 км/год. Скільки часу витрачає Наталя Борисівна на шлях з роботи додому?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

1.30. Скільки існує двоцифрових натуральних чисел, які дорівнюють сумі добутку й суми своїх цифр?

§ 2. Основна властивість раціонального дробу

1. Основна властивість раціонального дробу

Основна властивість звичайного дробу: *якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, то одержимо дріб, що дорівнює даному.* Або для будь-яких натуральних чисел a, b і c справджуються рівності:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \text{ і } \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Доведемо, що ці рівності є правильними не тільки для натуральних значень a, b і c, а й для будь-яких інших значень за умови $b \neq 0$ і $c \neq 0$.

Доведемо спочатку, що $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Нехай $\frac{a}{b} = a : b = p$. Тоді, за означенням частки, $a = bp$. Помножимо обидві частини цієї рівності на c, матимемо: $ac = (bp)c$. Використовуючи переставну і сполучну властивості множення, одержимо: $ac = (bc)p$. Оскільки $b \neq 0$ і $c \neq 0$, то і $bc \neq 0$. З останньої рівності (за означенням частки) маємо: $\frac{ac}{bc} = p$. Оскільки $\frac{a}{b} = p$ і $\frac{ac}{bc} = p$, то $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Ця рівність є тотожністю, отже, можемо поміняти в ній ліву і праву частини місцями:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Ця тотожність дає змогу замінити дріб $\frac{ac}{bc}$ на дріб $\frac{a}{b}$, тобто *скоротити* дріб $\frac{ac}{bc}$ на спільний множник c чисельника і знаменника.

Властивість дробу, що записується рівностями $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ і $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, називають *основною властивістю раціонального дробу*.

Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий відмінний від нуля вираз, то одержимо дріб, що дорівнює даному, тобто

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \text{ та } \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

2. Скорочення раціонального дробу

Розглянемо приклади застосування цієї властивості для дробів на їх області допустимих значень.

Приклад 1. Скоротити дріб $\dfrac{24a^2}{16a}$.

Розв'язання. Подамо чисельник і знаменник цього дробу у вигляді добутків, що містять однаковий (спільний) множник $8a$, і скоротимо дріб на цей вираз: $\dfrac{24a^2}{16a} = \dfrac{8a \cdot 3a}{8a \cdot 2} = \dfrac{3a}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{3a}{2}$.

Приклад 2. Скоротити дріб $\dfrac{x^2 - 9y^2}{5x + 15y}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу та скоротимо дріб на спільний множник чисельника і знаменника:

$$\frac{x^2 - 9y^2}{5x + 15y} = \frac{(x - 3y)\cancel{(x + 3y)}}{5\cancel{(x + 3y)}} = \frac{x - 3y}{5}.$$

Відповідь: $\dfrac{x - 3y}{5}$.

Отже, щоб скоротити дріб, треба:

1) розкласти на множники чисельник і знаменник дробу (за потреби);
2) виконати ділення чисельника і знаменника на їх спільний множник та записати результат.

Розглянуті приклади приводять до потреби уточнити прийняті у 7 класі означення тотожно рівних виразів та тотожностей.

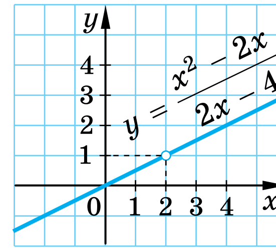
Два вирази, відповідні значення яких між собою рівні для будь-яких допустимих значень змінних, називають ***тотожними***, або ***тотожно рівними***.

Рівність, яка є правильною для будь-яких допустимих значень змінних, називають ***тотожністю***.

Приклад 3. Знайти область визначення функції $y = \dfrac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Областю визначення функції є всі числа, крім тих, що перетворюють знаменник $2x - 4$ на нуль. Оскільки $2x - 4 = 0$ для $x = 2$, то областю визначення функції є всі числа, крім числа 2.

Спростимо дріб у формулі функції: $\dfrac{x^2 - 2x}{2x - 4} = \dfrac{x\cancel{(x - 2)}}{2\cancel{(x - 2)}} = \dfrac{x}{2}$.



Мал. 2.1

Отже, функція $y = \frac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ має вигляд $y = \frac{x}{2}$ за умови $x \neq 2$, а її графіком є пряма $y = \frac{x}{2}$ без точки з абсцисою 2, тобто без точки (2; 1). Таку точку називають «виколотою» і обов'язково виключають її з графіка, зображуючи «порожньою». Зрозуміло, що графік цієї функції не може містити точку з абсцисою 2, оскільки число 2 не належить області визначення функції. Графік функції $y = \frac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ зображено на малюнку 2.1.

3. Зведення раціонального дробу до нового знаменника

Тотожність $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ дає змогу зводити дроби до іншого (нового) знаменника.

Приклад 4. Звести дріб $\frac{5m}{4p}$ до знаменника $12p^4$.

Розв'язання. Оскільки $12p^4 = 4p \cdot 3p^3$, то, помноживши чисельник і знаменник даного в умові дробу на $3p^3$, одержимо дріб зі знаменником $12p^4$: $\frac{5m}{4p} = \frac{5m \cdot 3p^3}{4p \cdot 3p^3} = \frac{15mp^3}{12p^4}$.

Множник $3p^3$, як і для звичайних дробів, називають *додатковим множником* чисельника і знаменника дробу $\frac{5m}{4p}$.

Відповідь: $\frac{15mp^3}{12p^4}$.

Приклад 5. Звести дріб $\frac{7}{a-b}$ до знаменника $b - a$.

Розв'язання. Оскільки $b - a = -1 \cdot (a - b)$, то, помноживши чисельник і знаменник дробу $\frac{7}{a-b}$ на додатковий множник -1, одержимо дріб зі знаменником $b - a$: $\frac{7}{a-b} = \frac{7 \cdot (-1)}{(a-b) \cdot (-1)} = \frac{-7}{b-a}$.

Оскільки зміна знака перед дробом приводить до зміни знака в чисельнику або знаменнику, то $\frac{7}{a-b} = \frac{-7}{b-a} = -\frac{7}{b-a}$.

Відповідь: $-\frac{7}{b-a}$.

Якщо змінити знак у чисельнику (або знаменнику) дробу одночасно зі знаком перед дробом, то одержимо дріб, тотожно рівний даному, тобто $\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}$.

Наприклад, $\frac{c-2}{5} = -\frac{2-c}{5}$.

Якими рівностями записують основну властивість дробу? Сформулюйте її. ○ Доведіть тотожність $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. ○ Поясніть, як скоротити раціональний дріб.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

2.1. (*Усно.*) Скоротіть дріб:

1) $\frac{7x}{7y}$; 2) $\frac{3a}{15b}$; 3) $\frac{xy}{xm}$; 4) $\frac{ab}{b^2}$; 5) $\frac{5ac}{4ab}$; 6) $\frac{10xy}{10my}$.

2.2. Скоротіть дріб:

1) $\frac{3m}{3p}$; 2) $\frac{4x}{12y}$; 3) $\frac{ab}{ap}$; 4) $\frac{t^2}{tx}$; 5) $\frac{9xy}{8xz}$; 6) $\frac{4mn}{4pn}$.

2

2.3. Скоротіть дріб:

1) $\frac{15ab}{20am}$; 2) $\frac{-2a^2m}{5ap}$; 3) $\frac{16ax^2}{20xb}$; 4) $\frac{-8m^2n}{-2n^3}$;

5) $\frac{-ap^2}{p^3c}$; 6) $\frac{4abc}{12ac^3}$; 7) $\frac{26m^2n}{39mn^2}$; 8) $\frac{a^5c^4}{-c^3a^6}$.

2.4. Скоротіть дріб:

1) $\frac{8at}{12ap}$; 2) $\frac{-3xy}{7x^2y}$; 3) $\frac{12m^2n}{20xm}$; 4) $\frac{-6p^3c}{-3p^4}$;

5) $\frac{-kp^3}{p^4t}$; 6) $\frac{5xyz}{15y^2z}$; 7) $\frac{22x^2y}{-33y^2x}$; 8) $\frac{t^7p^8}{p^6t^9}$.

2.5. Подайте частку у вигляді дробу і скоротіть цей дріб:

1) $12x^2y : (4xy^3)$; 2) $3a^2bc : (-18ab^2c^2)$;

3) $-10ap^3 : (-15a^2)$; 4) $-14x^9 : (2x^7y)$.

2.6. Зведіть дріб:

1) $\frac{5}{4m}$ до знаменника $20m$; 2) $\frac{p}{a^2}$ до знаменника a^5.

2.7. Зведіть дріб: 1) $\frac{4}{3p}$ до знаменника $15p$; 2) $\frac{x}{y^3}$ до знаменника y^7.

2.8. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m(a-2)}{p(a-2)}$; 2) $\frac{4(x+2)^2}{(x+2)^3}$; 3) $\frac{mn(p+7)}{m^2n(p+7)^2}$; 4) $\frac{16m^3(a+3)^2}{20m^4(a+3)}$.

2.9. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x(b+7)}{y(b+7)}$; 2) $\frac{5(m-3)^3}{(m-3)^4}$; 3) $\frac{a^2y(x-2)^2}{ay(x-2)}$; 4) $\frac{12x^3(y-7)}{16x^2(y-7)^2}$.

2.10. Розкладіть на множники чисельник і знаменник і скоротіть дріб:

1) $\frac{4a+12b}{16ab}$; 2) $\frac{5x-5y}{7(x-y)}$; 3) $\frac{3m(x+2)}{x^2+2x}$; 4) $\frac{ax-a}{a}$;

5) $\frac{y}{y^2-yx}$; 6) $\frac{2x-6y}{5x-15y}$; 7) $\frac{a+2b}{a^2+2ab}$; 8) $\frac{2x^2-10xy}{x-5y}$.

2.11. Скоротіть дріб, попередньо розклавши його чисельник і знаменник на множники:

1) $\frac{3a+15b}{9ab}$; 2) $\frac{mn-m}{4(n-1)}$; 3) $\frac{p^2-3p}{4k(p-3)}$;

4) $\frac{xy-2x}{x}$; 5) $\frac{m}{m^2+mn}$; 6) $\frac{4a-12c}{7a-21c}$.

2.12. Скоротіть дріб: 1) $\frac{a(x-y)}{5(y-x)}$; 2) $\frac{3a-9b}{15b-5a}$; 3) $\frac{7y-14}{y^2-4}$;

4) $\frac{m^2-9}{m^2-6m+9}$; 5) $\frac{p^2-1}{p^3-p^2}$; 6) $\frac{x^2+10x+25}{mx+5m}$.

2.13. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m(p-2)}{a(2-p)}$; 2) $\frac{3a+12}{a^2-16}$; 3) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; 4) $\frac{mc+4c}{m^2+8m+16}$.

3 **2.14.** Спростіть вираз:

1) $\frac{a^5-a^3}{a^4-a^2}$; 2) $\frac{p^9+p^7}{p^5+p^7}$; 3) $\frac{2a^2-a^3}{a^6-2a^5}$; 4) $\frac{5c^5-10c^4}{12c^5-6c^6}$.

2.15. Спростіть вираз:

1) $\frac{t^9-t^8}{t^8-t^7}$; 2) $\frac{a^6+a^3}{a^9+a^6}$; 3) $\frac{3b^2-b^3}{b^8-3b^7}$; 4) $\frac{4a^4-8a^3}{12a^2-6a^3}$.

2.16. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m^2n-m}{m^2-m^3n}$; 2) $\frac{15m^3-15mn}{10n^2-10nm^2}$; 3) $\frac{m^3+27}{m^2-3m+9}$;

4) $\frac{20+10a+5a^2}{a^3-8}$; 5) $\frac{3p+pn-3y-yn}{7p-7y}$; 6) $\frac{am+an-bm-bn}{am-an-bm+bn}$.

2.17. Скоротіть дріб:

1) $\frac{16p^3-16pq}{12p^3q-12pq^2}$; 2) $\frac{a^2-2a+4}{a^3+8}$;

3) $\frac{7+7a+7a^2}{a^3-1}$; 4) $\frac{5m+an-5n-am}{a^2-10a+25}$.

2.18. Зведіть дріб:

1) $\dfrac{5}{a-b}$ до знаменника $a^2 - ab$;

2) $\dfrac{4}{m+n}$ до знаменника $m^2 + 2mn + n^2$;

3) $\dfrac{9}{x-y}$ до знаменника $x^2 - y^2$;

4) $\dfrac{4}{k-1}$ до знаменника $k^3 - 1$;

5) $\dfrac{a}{a-b}$ до знаменника $b - a$;

6) $\dfrac{p}{p-2}$ до знаменника $4 - p^2$.

2.19. Зведіть дріб: 1) $\dfrac{7}{m+n}$ до знаменника $m^2 + mn$;

2) $\dfrac{4}{x-y}$ до знаменника $x^2 - 2xy + y^2$;

3) $\dfrac{a}{a+b}$ до знаменника $a^2 - b^2$;

4) $\dfrac{c}{c-7}$ до знаменника $7 - c$.

2.20. Знайдіть значення виразу $-\dfrac{(c^3)^5(x^{12})^2}{9(c^6)^2(x^3)^8}$, якщо $c = -3$, $x = 2025$, та дізнаєтеся, скільки разів представники від України вигравали в пісенному конкурсі «Євробачення».

2.21. Обчисліть значення дробу $\dfrac{6x^2 - 3xy}{8xy - 4y^2}$, якщо $x = -4$, $y = -\dfrac{1}{4}$, та дізнаєтеся, у якому столітті було засновано місто Кам'янець-Подільський (Хмельницька обл.).

Місто Кам'янець-Подільський

4 **2.22.** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{48x}$;

2) $\dfrac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4}$;

3) $\dfrac{(3b - 9c)^2}{5b - 15c}$.

2.23. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{(m+5)^2+(m-5)^2}{m^2+25}$; 2) $\dfrac{a^4-b^4}{a^3+b^3}$; 3) $\dfrac{6m+2n}{(12m+4n)^2}$.

2.24. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $y=\dfrac{x^2+6x}{6x+36}$; 2) $y=\dfrac{x^2-4x+4}{2-x}$.

2.25. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $y=\dfrac{x^2-5x}{25-5x}$; 2) $y=\dfrac{x^2+6x+9}{3+x}$.

Вправи для повторення

2.26. Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{2^{12}}{2^{14}}$; 2) $\dfrac{3^9}{3^6}$; 3) $\dfrac{7^4}{49}$; 4) $\dfrac{125}{5^5}$.

2.27. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+3y=2, \\ 3x-2y=17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+2y=2, \\ 7x-2y=-22. \end{cases}$

2.28. Спростіть вираз:
1) $(2x+3y)^2-(x+7y)(4x-y)$; 2) $(m+3)(m^2-5)-m(m-4)^2$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

2.29. Обчисліть:

1) $\dfrac{1}{7}+\dfrac{3}{7}$; 2) $\dfrac{7}{13}+\dfrac{8}{13}$; 3) $\dfrac{9}{11}-\dfrac{5}{11}$; 4) $\dfrac{3}{17}-\dfrac{9}{17}$;

5) $\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}$; 6) $-\dfrac{11}{15}+\dfrac{2}{15}$; 7) $-\dfrac{3}{10}-\dfrac{7}{10}$; 8) $-\dfrac{2}{7}-\left(-\dfrac{1}{7}\right)$.

Життєва математика

2.30. На 1 січня 2016 року сільського населення в Україні було на 38,375094 % менше, ніж міського. Знайдіть кількість міського і кількість сільського населення в Україні станом на 1 січня 2016 року, якщо загальна кількість населення на цю дату складала 42 760 516 осіб.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

2.31. Катер за течією річки долає відстань від пункту A до пункту B за 2 год, а проти течії – за 3 год. За який час від пункту A до пункту B пропливе пліт?

§ 3. Додавання та віднімання дробів з однаковими знаменниками

1. Додавання дробів з однаковими знаменниками

Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий. Наприклад:
$\frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{3+5}{11} = \frac{8}{11}$, або у вигляді формули: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Ця формула справджується для будь-яких дробів за умови $c \neq 0$. Доведемо це.

Нехай $\frac{a}{c} = p$ і $\frac{b}{c} = q$. Тоді, за означенням частки, $a = cp$ і $b = cq$. Маємо: $a + b = cp + cq = c(p + q)$.

Оскільки $c \neq 0$, то, за означенням частки, $p + q = \frac{a+b}{c}$, отже, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$. ■

Маємо *правило додавання дробів з однаковими знаменниками.*

Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити без змін, тобто

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Приклад 1. $\frac{5p}{2x} + \frac{3p}{2x} = \frac{5p+3p}{2x} = \frac{8p}{2x} = \frac{4p}{x}$.

2. Віднімання дробів з однаковими знаменниками

Аналогічно можна довести тотожність $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$, якою записують правило віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Маємо *правило віднімання дробів з однаковими знаменниками.*

Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити без змін, тобто

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Приклад 2.

$$\frac{10x-14}{7p}-\frac{3x}{7p}=\frac{10x-14-3x}{7p}=\frac{7x-14}{7p}=\frac{7(x-2)}{7p}=\frac{x-2}{p}.$$

Розглянемо ще кілька прикладів.

3. Застосування правил додавання та віднімання дробів під час розв'язування вправ

Приклад 3. Знайти суму та різницю дробів $\frac{2x+y}{2xy}$ і $\frac{2x-y}{2xy}$.

Розв'язання. $\frac{2x+y}{2xy}+\frac{2x-y}{2xy}=\frac{2x+y+2x-y}{2xy}=\frac{4x}{2xy}=\frac{2}{y}$;

$$\frac{2x+y}{2xy}-\frac{2x-y}{2xy}=\frac{2x+y-(2x-y)}{2xy}=\frac{2x+y-2x+y}{2xy}=\frac{2y}{2xy}=\frac{1}{x}.$$

Відповідь: $\frac{2}{y}$; $\frac{1}{x}$.

Приклад 4. Спростити вираз $\frac{m^2+5m}{m^2-3m}+\frac{7}{m^2-3m}-\frac{11m-2}{m^2-3m}$.

Розв'язання.

$$\frac{m^2+5m}{m^2-3m}+\frac{7}{m^2-3m}-\frac{11m-2}{m^2-3m}=\frac{m^2+5m+7-(11m-2)}{m^2-3m}=$$

$$=\frac{m^2+5m+7-11m+2}{m^2-3m}=\frac{m^2-6m+9}{m^2-3m}=\frac{(m-3)^2}{m(m-3)}=\frac{m-3}{m}.$$

Відповідь: $\frac{m-3}{m}$.

Приклад 5. Знайти суму $\frac{10x}{y-2x}+\frac{5y}{2x-y}$.

Розв'язання. Оскільки $2x-y=-(y-2x)$, то другий доданок можна подати з тим самим знаменником, що й у першого доданка (ми вже розглядали таку дію на с. 20): $\frac{5y}{2x-y}=\frac{5y}{-(y-2x)}=-\frac{5y}{y-2x}$.

Тоді $\frac{10x}{y-2x}+\frac{5y}{2x-y}=\frac{10x}{y-2x}-\frac{5y}{y-2x}=\frac{10x-5y}{y-2x}=\frac{-5(y-2x)}{y-2x}=-5.$

4. Подання дробу у вигляді суми або різниці кількох дробів

Якщо в тотожностях $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ та $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ поміняти місцями ліві й праві частини, то одержимо тотожності:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c} \text{ та } \frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}.$$

За допомогою цих тотожностей дріб, чисельник якого є сумою або різницею кількох виразів, можна записати у вигляді суми або різниці кількох дробів.

Приклад 6. $\dfrac{2x+5y-9}{xy}=\dfrac{2x}{xy}+\dfrac{5y}{xy}-\dfrac{9}{xy}=\dfrac{2}{y}+\dfrac{5}{x}-\dfrac{9}{xy}.$

Приклад 7. Записати дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу: 1) $\dfrac{a^2+2a-7}{a}$; 2) $\dfrac{5m+3n}{m+n}$.

Розв'язання.

1) $\dfrac{a^2+2a-7}{a}=\dfrac{a^2}{a}+\dfrac{2a}{a}-\dfrac{7}{a}=a+2-\dfrac{7}{a}$;

2) $\dfrac{5m+3n}{m+n}=\dfrac{2m+3m+3n}{m+n}=\dfrac{2m+3(m+n)}{m+n}=\dfrac{2m}{m+n}+\dfrac{3(m+n)}{m+n}=$

$=\dfrac{2m}{m+n}+3=3+\dfrac{2m}{m+n}.$

Відповідь: 1) $a+2-\dfrac{7}{a}$; 2) $3+\dfrac{2m}{m+n}$.

Сформулюйте правило додавання дробів з однаковими знаменниками. Доведіть його. ○ Сформулюйте правило віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

3.1. (*Усно.*) Виконайте дію:

1) $\dfrac{a}{5}+\dfrac{b}{5}$; 2) $\dfrac{x}{9}-\dfrac{y}{9}$; 3) $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{a}$; 4) $\dfrac{7}{b}-\dfrac{5}{b}$.

3.2. Знайдіть суму або різницю:

1) $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{x}{5}$; 2) $\dfrac{7y}{3}-\dfrac{2y}{3}$; 3) $\dfrac{a+b}{x}-\dfrac{a}{x}$; 4) $\dfrac{7x^2}{y}+\dfrac{5x^2}{y}$.

3.3. Виконайте дію:

1) $\dfrac{3m}{8}+\dfrac{2m}{8}$; 2) $\dfrac{9p}{17}-\dfrac{p}{17}$;

3) $\dfrac{x-y}{m}+\dfrac{y}{m}$; 4) $\dfrac{5c^2}{n}-\dfrac{2c^2}{n}$.

2

3.4. Подайте у вигляді дробу:

1) $\dfrac{7a}{4x}-\dfrac{3a}{4x}$; 2) $\dfrac{x+y}{8}-\dfrac{x-3y}{8}$; 3) $\dfrac{a+4}{9}+\dfrac{5-a}{9}$;

4) $\dfrac{x+3y}{10}+\dfrac{4x+7y}{10}$; 5) $\dfrac{5m-2}{8m}-\dfrac{m-10}{8m}$; 6) $\dfrac{7a+13}{6a}+\dfrac{17-a}{6a}$.

3.5. Спростіть вираз:

1) $\frac{5x}{2a}+\frac{3x}{2a}$; 2) $\frac{a+b}{12}-\frac{a-5b}{12}$; 3) $\frac{b-3}{5}+\frac{13-b}{5}$;

4) $\frac{a+2b}{8}+\frac{3a+6b}{8}$; 5) $\frac{6m-3}{10m}-\frac{m-13}{10m}$; 6) $\frac{5x-3}{4x}+\frac{11-x}{4x}$.

3.6. Спростіть вираз:

1) $\frac{3x-7y}{4xy}+\frac{15y-3x}{4xy}$; 2) $\frac{7a+p^3}{3p}-\frac{7a-2p^3}{3p}$;

3) $\frac{5a-b^4}{6b^5}-\frac{b^4+5a}{6b^5}$; 4) $\frac{3a-4}{8a}+\frac{4a+5}{8a}-\frac{1-a}{8a}$.

3.7. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{3a-b}{ab}-\frac{5b+3a}{ab}$; 2) $\frac{9m+2k^2}{5k}-\frac{9m-3k^2}{5k}$;

3) $\frac{5b-m^2}{4m^3}-\frac{m^2+5b}{4m^3}$; 4) $\frac{4a-3}{6a}+\frac{a+8}{6a}-\frac{5-a}{6a}$.

3.8. Обчисліть значення виразу $\frac{7a-5}{4a^2}+\frac{5+a}{4a^2}$, якщо $a=\frac{1}{8}$, та дізнаєтеся, у якому віці фігуристка Оксана Баюл стала першою олімпійською чемпіонкою незалежної України.

Оксана Баюл

3.9. У 1995 р. українська легкоатлетка Інеса Кравець установила світовий рекорд з потрійного стрибка. Знайдіть значення виразу $\frac{11b-7}{6b^2}+\frac{7+b}{6b^2}$, якщо $b=\frac{1}{13}$. Дізнаєтеся, скільки років протримався цей світовий рекорд.

3.10. Виконайте дію:

1) $\frac{x^2}{x-5}-\frac{25}{x-5}$; 2) $\frac{36}{y+6}-\frac{y^2}{y+6}$;

3) $\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{6}{x^2-9}$; 4) $\frac{7a-1}{a^2-b^2}-\frac{7b-1}{a^2-b^2}$;

5) $\frac{2x+y}{(x-y)^2}+\frac{x-4y}{(x-y)^2}$; 6) $\frac{9m+5n}{(m+n)^2}-\frac{m-3n}{(m+n)^2}$.

3.11. Спростіть вираз:

1) $\frac{49}{7-m}-\frac{m^2}{7-m}$; 2) $\frac{x+7}{x^2-1}-\frac{6}{x^2-1}$;

3) $\frac{5x-2}{x^2-y^2}-\frac{5y-2}{x^2-y^2}$; 4) $\frac{3a-4b}{(a-b)^2}+\frac{2a-b}{(a-b)^2}$.

3.12. Спростіть вираз:

1) $\frac{a}{x-1}+\frac{5}{1-x}$; 2) $\frac{m}{c-3}-\frac{p}{3-c}$;

3) $\frac{5x}{x-y}+\frac{5y}{y-x}$; 4) $\frac{10p}{2p-m}+\frac{5m}{m-2p}$.

3.13. Виконайте дію:

1) $\frac{c}{a-2}+\frac{x}{2-a}$; 2) $\frac{a}{x-y}-\frac{8}{y-x}$;

3) $\frac{2m}{m-n}+\frac{2n}{n-m}$; 4) $\frac{16x}{4x-y}+\frac{4y}{y-4x}$.

3 **3.14.** Виконайте дію:

1) $\frac{m^2-m}{m^2+4m+4}-\frac{4-m}{m^2+4m+4}$; 2) $\frac{9c}{c^2-6c}-\frac{18+6c}{c^2-6c}$.

3.15. Знайдіть різницю:

1) $\frac{a^2+3a}{a^2+6a+9}-\frac{3a+9}{a^2+6a+9}$; 2) $\frac{3m}{m^2-5m}-\frac{m+10}{m^2-5m}$.

3.16. Доведіть тотожність:

1) $\frac{(a-b)^2}{2ab}-\frac{(a+b)^2}{2ab}=-2$; 2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}=2$.

3.17. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{m^2}{2m-10}+\frac{25}{10-2m}$, якщо $m=25$;

2) $\frac{x^2+9y^2}{x-3y}+\frac{6xy}{3y-x}$, якщо $x=2026$, $y=\frac{1}{3}$.

3.18. Обчисліть:

1) $\frac{x^2}{3x-18}+\frac{36}{18-3x}$, якщо $x=-12$;

2) $\frac{c^2}{c-5k}-\frac{25k^2-10ck}{5k-c}$, якщо $c=199$, $k=0{,}2$.

3.19. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

1) $\frac{m+3}{m}$; 2) $\frac{a^4+a^3-5}{a^2}$;

3) $\frac{x^2+5x-3}{x+5}$; 4) $\frac{4a-4b+7}{a-b}$.

3.20. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

1) $\frac{a-7}{a}$; 2) $\frac{m^2-m^3+7}{m^2}$;

3) $\frac{y^2+y+2}{y+1}$; 4) $\frac{5p-5q-1}{p-q}$.

4 **3.21.** Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\dfrac{7-4m}{(2-m)^2}-\dfrac{9-5m}{(m-2)^2}$; 2) $\dfrac{12a}{(2-a)^3}+\dfrac{3a^2+12}{(a-2)^3}$;

3) $\dfrac{m^2-6n}{(m-2)(n-3)}-\dfrac{2(m-3n)}{(2-m)(3-n)}$.

3.22. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{16-7a}{(3-a)^2}-\dfrac{13-6a}{(a-3)^2}$; 2) $\dfrac{15(2m-3)}{(3-m)^3}+\dfrac{5m^2}{(m-3)^3}$;

3) $\dfrac{p^2-9q}{(p-3)(q-4)}-\dfrac{3(p-3q)}{(3-p)(4-q)}$.

Вправи для повторення

3.23. Подайте вираз у вигляді многочлена:

1) $(a-1)(a+3)^2$; 2) $(x-4)^2(x+2)$.

3.24. Скоротіть дріб $\dfrac{x^2+y^2-z^2-2xy}{x^2-y^2+z^2+2xz}$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

3.25. Обчисліть:

1) $\dfrac{1}{7}+\dfrac{5}{14}$; 2) $\dfrac{5}{12}-\dfrac{3}{16}$; 3) $\dfrac{1}{8}-\dfrac{3}{16}+\dfrac{7}{24}$.

3.26. Подайте одночлен $15a^3b^7$ у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює:

1) $3ab^5$; 2) $-5a^2b^7$; 3) $-b^6$; 4) $15ab$.

Життєва математика

3.27. 1) На території шкільного подвір'я росте дерево білої акації (робінія звичайна). Через 5 год після поливу вода по її стовбуру піднялася на висоту 7 м 20 см. Обчисліть швидкість переміщення води в стовбурі білої акації.

2) *Практична діяльність*. Дізнайтеся з різноманітних джерел інформації про користь білої акації в житті людини та господарстві.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

3.28. (*Національна олімпіада Великої Британії, 1968 р.*) Нехай $a_1, a_2, ..., a_7$ – цілі числа, а $b_1, b_2, ..., b_7$ – ті самі числа в іншому порядку. Доведіть, що число $(a_1-b_1)(a_2-b_2)...(a_7-b_7)$ є парним.

§ 4. Додавання та віднімання дробів з різними знаменниками

1. Найпростіші приклади додавання та віднімання дробів з різними знаменниками

Якщо дроби мають різні знаменники, то їх, як і звичайні дроби, спочатку зводять до спільного знаменника, а потім додають або віднімають за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Розглянемо, як додати дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$. Спочатку зведемо ці дроби до їх спільного знаменника bd. Для цього чисельник і знаменник дробу $\frac{a}{b}$ помножимо на додатковий множник d: $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$. А чисельник і знаменник дробу $\frac{c}{d}$ помножимо на додатковий множник b: $\frac{c}{d}=\frac{cb}{db}$. Дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ *звели до спільного знаменника* bd, після чого додаємо їх.

Цю послідовність дій для додавання дробів з різними знаменниками можна записати так:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+bc}{bd},\text{ або скорочено: }\ {}^{d/}\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}+{}^{b/}\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{\boldsymbol{ad+bc}}{\boldsymbol{bd}}.$$

Аналогічно виконують і віднімання дробів з різними знаменниками:

$$^{d/}\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}-{}^{b/}\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{\boldsymbol{ad-bc}}{\boldsymbol{bd}}.$$

Приклад 1. Виконати дію: 1) $\frac{3}{m}+\frac{4}{n}$; 2) $\frac{2}{a}-\frac{b}{7}$.

Розв'язання.

1) $^{n/}\frac{3}{m}+{}^{m/}\frac{4}{n}=\frac{3n+4m}{mn}$; 2) $^{7/}\frac{2}{a}-{}^{a/}\frac{b}{7}=\frac{14-ab}{7a}$.

Часто під час додавання й віднімання дробів з різними знаменниками вдається знайти простіший спільний знаменник, ніж добуток знаменників цих дробів. У такому разі кажуть про *найпростіший* спільний знаменник (аналогічно до *найменшого* спільного знаменника для числових дробів). Узагалі у дробів є безліч спільних знаменників.

2. Додавання та віднімання дробів, знаменниками яких є одночлени

Розглянемо приклад, де знаменники дробів – одночлени.

Приклад 2. Виконати дію $\dfrac{7}{6x^2y} + \dfrac{3}{8xy^3}$.

Розв'язання. Спільним знаменником цих дробів можна вважати одночлен $48x^3y^4$, що є добутком знаменників дробів, але в цьому разі він не буде найпростішим спільним знаменником.

Спробуємо знайти найпростіший спільний знаменник. Оскільки знаменники дробів є одночленами, то і найпростішим спільним знаменником також буде одночлен. Коефіцієнт цього одночлена має ділитися і на 6, і на 8. Найменшим таким числом є число 24. До спільного знаменника кожна зі змінних має входити з найбільшим із показників степеня, з якими вона входить до знаменників дробів. Так, найпростішим спільним знаменником буде одночлен $24x^2y^3$. Тоді додатковим множником для першого дробу є вираз $4y^2$, бо $24x^2y^3 = 6x^2y \cdot 4y^2$, а для другого – вираз $3x$, бо $24x^2y^3 = 8xy^3 \cdot 3x$. Отже, маємо:

$$\frac{^{4y^2/}7}{6x^2y} + \frac{^{3x/}3}{8xy^3} = \frac{4y^2 \cdot 7 + 3x \cdot 3}{24x^2y^3} = \frac{28y^2 + 9x}{24x^2y^3}.$$

Відповідь: $\dfrac{28y^2 + 9x}{24x^2y^3}$.

Зверніть увагу, що у прикладі 2 під час зведення дробів до спільного знаменника додаткові множники $4y^2$ та $3x$ не містили жодного спільного множника, відмінного від одиниці. Це означає, що ми знайшли саме найпростіший спільний знаменник дробів.

3. Додавання та віднімання дробів, знаменниками яких є многочлени

Тепер розглянемо приклад, у якому знаменниками дробів є многочлени.

Приклад 3. Виконати віднімання $\dfrac{x+4}{xy - x^2} - \dfrac{y+4}{y^2 - xy}$.

Розв'язання. Щоб знайти спільний знаменник, розкладемо знаменники на множники. Маємо:

$$xy - x^2 = x(y - x) \text{ та } y^2 - xy = y(y - x).$$

Найпростішим спільним знаменником дробів буде вираз $xy(y - x)$. Тоді додатковим множником для першого дробу є y, а для другого – x. Виконаємо віднімання:

$$\frac{x+4}{xy - x^2} - \frac{y+4}{y^2 - xy} = \frac{^{y/}x+4}{x(y-x)} - \frac{^{x/}y+4}{y(y-x)} = \frac{y(x+4) - x(y+4)}{xy(y-x)} =$$

$$= \frac{xy + 4y - xy - 4x}{xy(y-x)} = \frac{4y - 4x}{xy(y-x)} = \frac{4(y-x)}{xy(y-x)} = \frac{4}{xy}.$$

Відповідь: $\dfrac{4}{xy}$.

4. Алгоритм виконання додавання та віднімання дробів із різними знаменниками

Отже, щоб виконати додавання або віднімання дробів з різними знаменниками, треба:

1) розкласти на множники знаменники дробів, якщо це потрібно;
2) знайти спільний знаменник, бажано найпростіший;
3) знайти додаткові множники і звести дроби до спільного знаменника;
4) знайти суму або різницю отриманих дробів;
5) скоротити отриманий дріб, якщо він скоротний, та записати відповідь.

Розглянемо застосування алгоритму в такому прикладі.

Приклад 4. Подати вираз $\frac{2a}{a-6}-\frac{6}{a+6}+\frac{2a^2}{36-a^2}$ у вигляді дробу.

Розв'язання. 1) Розкладемо знаменник третього дробу на множники $36-a^2=(6-a)(6+a)$. Оскільки перший дріб має знаменник $a-6$, то знаменник третього дробу краще подати так: $36-a^2=-(a-6)(a+6)$.

Маємо: $\frac{2a}{a-6}-\frac{6}{a+6}-\frac{2a^2}{(a-6)(a+6)}$.

2) Найпростішим спільним знаменником трьох дробів є вираз

$$(a-6)(a+6).$$

3) Додатковим множником до першого дробу є вираз $(a+6)$, до другого – $(a-6)$, до третього – 1. Запишемо це

$$\frac{^{a+6/}2a}{a-6}-\frac{^{a-6/}6}{a+6}-\frac{^{1/}2a^2}{(a-6)(a+6)}.$$

4) Маємо далі:

$$\frac{2a(a+6)-6(a-6)-2a^2}{(a-6)(a+6)}=\frac{2a^2+12a-6a+36-2a^2}{(a-6)(a+6)}=\frac{6a+36}{(a-6)(a+6)}.$$

5) Скоротимо отриманий дріб $\frac{6(a+6)}{(a-6)(a+6)}=\frac{6}{a-6}$.

Коротко розв'язання можна записати так:

$$\frac{2a}{a-6}-\frac{6}{a+6}+\frac{2a^2}{36-a^2}=\frac{^{a+6/}2a}{a-6}-\frac{^{a-6/}6}{a+6}-\frac{^{1/}2a^2}{(a-6)(a+6)}=$$

$$=\frac{2a(a+6)-6(a-6)-2a^2}{(a-6)(a+6)}=\frac{2a^2+12a-6a+36-2a^2}{(a-6)(a+6)}=\frac{6a+36}{(a-6)(a+6)}=$$

$$=\frac{6(a+6)}{(a-6)(a+6)}=\frac{6}{a-6}.$$

Відповідь. $\frac{6}{a-6}$.

5. Додавання та віднімання цілого виразу і дробу

Аналогічно виконують додавання і віднімання цілого виразу і дробу.

Приклад 5. Спростити вираз $a + 1 - \dfrac{a^2 - a}{a - 2}$.

Розв'язання. Запишемо вираз $a + 1$ у вигляді дробу зі знаменником 1 та виконаємо віднімання:

$$a + 1 - \frac{a^2 - a}{a - 2} = \frac{^{a-2/}a + 1}{1} - \frac{a^2 - a}{a - 2} = \frac{(a - 2)(a + 1) - (a^2 - a)}{a - 2} =$$

$$= \frac{a^2 + a - 2a - 2 - a^2 + a}{a - 2} = \frac{-2}{a - 2} = -\frac{2}{a - 2} = \frac{2}{2 - a}.$$

Відповідь: $\dfrac{2}{2 - a}$.

Який знаменник є спільним для дробів $\dfrac{2}{n}$ і $\dfrac{4}{m}$? Як виконати додавання та віднімання дробів з різними знаменниками?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

4.1. (*Усно.*) Знайдіть спільний знаменник дробів:

1) $\dfrac{a}{3}$ і $\dfrac{b}{6}$; 2) $\dfrac{x}{12}$ і $\dfrac{y}{8}$; 3) $\dfrac{a}{x}$ і $\dfrac{b}{y}$; 4) $\dfrac{c}{m}$ і $\dfrac{x}{3}$.

4.2. Виконайте дію: 1) $\dfrac{m}{2} - \dfrac{y}{3}$; 2) $\dfrac{a}{4} + \dfrac{x}{8}$; 3) $\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$; 4) $\dfrac{2}{c} + \dfrac{k}{3}$.

4.3. Виконайте дію: 1) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{a}{4}$; 2) $\dfrac{m}{6} - \dfrac{n}{3}$; 3) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$; 4) $\dfrac{t}{5} - \dfrac{4}{p}$.

2

4.4. Подайте у вигляді дробу:

1) $\dfrac{3}{5a} - \dfrac{1}{2a}$; 2) $\dfrac{a}{4b} + \dfrac{7a}{5b}$; 3) $\dfrac{2a^2}{9b} + \dfrac{5a^2}{18b}$; 4) $\dfrac{7m}{12n^2} - \dfrac{m}{18n^2}$.

4.5. Виконайте дію:

1) $\dfrac{3}{4m} + \dfrac{2}{5m}$; 2) $\dfrac{x}{6y} - \dfrac{3x}{8y}$; 3) $\dfrac{4a}{9m^2} + \dfrac{5a}{12m^2}$; 4) $\dfrac{4x^2}{15y} - \dfrac{x^2}{10y}$.

4.6. Перетворіть на дріб вираз:

1) $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{x - 4}{5}$; 2) $\dfrac{4m - 2n}{10} - \dfrac{m - n}{5}$; 3) $\dfrac{a + 2}{4a} - \dfrac{3 - 7a}{6a}$;

4) $\dfrac{2 - 3y}{y} - \dfrac{5 - 3x}{x}$; 5) $\dfrac{x + 7}{5x} - \dfrac{3y + 4}{15y}$; 6) $\dfrac{4a + b}{2a} + \dfrac{a - 6b}{3b}$.

4.7. Подайте у вигляді дробу:

1) $\dfrac{a}{4} + \dfrac{a - 2}{3}$; 2) $\dfrac{2x - y}{14} - \dfrac{x - y}{7}$;

3) $\dfrac{x - 6}{2x} + \dfrac{7 - 2y}{4y}$; 4) $\dfrac{6m - n}{3m} - \dfrac{8n - 5m}{4n}$.

4.8. Виконайте дію:

1) $\frac{1}{a^2} + \frac{a-2}{a}$; 2) $\frac{2+m}{m^2} - \frac{m^2-5}{m^3}$; 3) $\frac{1}{2x^5} + \frac{1-3x^2}{x^7}$;

4) $\frac{a-b}{ab} - \frac{b-a}{b^2}$; 5) $\frac{3n+m}{mn^2} + \frac{n-3m}{m^2n}$; 6) $\frac{x-2y}{xy^2} - \frac{y-2x}{x^2y}$.

4.9. Спростіть:

1) $\frac{m+2}{m^2} - \frac{1}{m}$; 2) $\frac{5}{n^5} + \frac{3-4n^2}{n^7}$;

3) $\frac{x-y}{x^2} - \frac{y-x}{xy}$; 4) $\frac{c-2p}{cp^2} + \frac{2c-p}{pc^2}$.

4.10. Виконайте дії:

1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; 2) $\frac{1}{c^3} - \frac{2}{c^2} + \frac{3}{c}$;

3) $\frac{1}{xy} - \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}$; 4) $\frac{a+b}{ab} - \frac{b+c}{bc} + \frac{a+c}{ac}$.

4.11. Виконайте дії:

1) $\frac{1}{p} - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$; 2) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}$;

3) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$; 4) $\frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz} + \frac{x+z}{xz}$.

4.12. Доведіть тотожність $\frac{3x+1}{7x} - \frac{y-1}{2y} - \frac{7x+y}{14xy} = \frac{1-x}{14x}$.

4.13. Доведіть тотожність $\frac{3m+2}{5m} - \frac{n-1}{2n} - \frac{5m+3n}{10mn} = \frac{m+1}{10m}$.

4.14. Перетворіть на дріб вираз:

1) $x + \frac{2}{y}$; 2) $3m - \frac{1}{m}$; 3) $\frac{4}{p} - p^2$;

4) $\frac{a^2+y}{a} - a$; 5) $2x - \frac{6x^2+1}{3x}$; 6) $m + \frac{2-4mn}{4n}$.

4.15. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $m - \frac{3}{n}$; 2) $4p + \frac{1}{p}$; 3) $\frac{x+y^2}{y} - y$; 4) $7p - \frac{14p^2+3}{2p}$.

4.16. Спростіть вираз:

1) $1 - \frac{m}{2} - \frac{n}{3}$; 2) $4 + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$;

3) $\frac{m-2}{3} - 1 + \frac{m+2}{4}$; 4) $\frac{1}{a+b} + a - b$.

4.17. Виконайте дії:

1) $\frac{m}{3}+\frac{n}{4}-1$; 2) $5-\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$;

3) $\frac{a+3}{5}-1+\frac{a-2}{2}$; 4) $\frac{1}{x-y}+x+y$.

4.18. Знайдіть суму та різницю дробів:

1) $\frac{1}{x-y}$ і $\frac{1}{x+y}$; 2) $\frac{1}{a+b}$ і $\frac{1}{a}$.

4.19. Знайдіть суму та різницю дробів:

1) $\frac{1}{2a+b}$ і $\frac{1}{2a-b}$; 2) $\frac{1}{m-n}$ і $\frac{1}{m}$.

4.20. Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{a}+\frac{3}{a-1}$; 2) $\frac{c}{a-c}-\frac{c}{a}$;

3) $\frac{3}{x+y}+\frac{2}{x-y}$; 4) $\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-2}$;

5) $\frac{a+1}{a}-\frac{a}{a-1}$; 6) $\frac{a}{2a-1}-\frac{a}{2a+1}$.

4.21. Виконайте дію:

1) $\frac{4}{b}+\frac{7}{b+2}$; 2) $\frac{3}{m-n}-\frac{2}{m+n}$;

3) $\frac{p}{p-2}-\frac{3}{p+3}$; 4) $\frac{x}{1-x}+\frac{1+x}{x}$.

4.22. Виконайте дію:

1) $\frac{a-2}{2(a+1)}+\frac{a}{a+1}$; 2) $\frac{m}{4(a+b)}-\frac{3m}{5(a+b)}$;

3) $\frac{a-2}{2a+6}-\frac{a+1}{3a+9}$; 4) $\frac{4}{ax-ay}+\frac{5}{bx-by}$;

5) $\frac{5}{x}-\frac{30}{x(x+6)}$; 6) $\frac{6}{x^2+3x}-\frac{2}{x}$.

4.23. Виконайте дію:

1) $\frac{m-1}{3(m+2)}+\frac{m}{m+2}$; 2) $\frac{7a}{3(b+2a)}-\frac{4a}{9(b+2a)}$;

3) $\frac{x-2}{3x-12}-\frac{x+1}{2x-8}$; 4) $\frac{3}{mx+my}+\frac{2}{nx+ny}$;

5) $\frac{4}{a}-\frac{8}{a(a+2)}$; 6) $\frac{8}{m^2+8m}-\frac{1}{m}$.

4.24. Сучасна українська науковиця Марина В'язовська отримала медаль Філдса – найпрестижнішу премію для математиків у світі. Спростіть вираз $\frac{4n+m}{n^2-m^2}+\frac{1}{n+m}$ та обчисліть його значення, якщо $n=-2$, $m=-3$. Дізнаєтеся, скільки всього жінок-науковиць мають цю медаль.

4.25. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\frac{a-6}{a^2-4}+\frac{3}{a-2}$; 2) $\frac{x}{x-5}-\frac{x^2}{x^2-10x+25}$.

4.26. Перетворіть вираз на дріб:

1) $\frac{4a-b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a-b}$; 2) $\frac{2}{b+3}+\frac{b+6}{b^2-9}$;

3) $\frac{m}{m+4}-\frac{m^2}{m^2+8m+16}$.

3 **4.27.** Спростіть вираз:

1) $\frac{a+4}{ab-a^2}+\frac{b+4}{ab-b^2}$; 2) $\frac{m^2}{mx-x^2}+\frac{x}{x-m}$;

3) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2+2x}$; 4) $\frac{3ab-27a^2}{b^2-3ab}-\frac{3a^2-b^2}{ab-3a^2}$.

4.28. Спростіть вираз:

1) $\frac{a-2}{ab-a^2}-\frac{2-b}{ab-b^2}$; 2) $\frac{t^2}{ta+a^2}-\frac{a}{t+a}$;

3) $\frac{4}{a^2-9}-\frac{2}{a^2+3a}$; 4) $\frac{3n^2-8m^2}{n^2-2mn}-\frac{3mn-n^2}{mn-2m^2}$.

4.29. Доведіть тотожність

$$\frac{(a-1)(a-2)}{12}-\frac{(a-1)(a-5)}{3}+\frac{(a-5)(a-2)}{4}=1.$$

4.30. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $m-n-\frac{m^2+n^2}{m+n}$; 2) $p-\frac{4}{p-2}-2$;

3) $a^2-\frac{a^4}{a^2-1}+1$; 4) $\frac{8p^2}{2p-3}-4p-1$.

4.31. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $m-\frac{9}{m+3}+3$; 2) $\frac{6m^2}{3m+1}-2m+4$.

4.32. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу $\frac{4m-5}{7m-21}-\frac{m-1}{2m-6}$ від значення m не залежить.

4.33. Спростіть вираз:

1) $\frac{x-1}{x^2-x+1}+\frac{2-x}{x^3+1}$; 2) $\frac{2m}{m-5}-\frac{5}{m+5}+\frac{2m^2}{25-m^2}$;

3) $\frac{6}{m^2-6m}+\frac{m-12}{6m-36}$; 4) $\frac{3}{2a+6}+\frac{a^2-a-3}{a^2-9}-1$.

4.34. Спростіть вираз:

1) $\frac{a+1}{a^2+a+1}+\frac{a+2}{a^3-1}$; 2) $\frac{2a}{a-3}+\frac{a}{a+3}+\frac{2a^2}{9-a^2}$;

3) $\frac{4}{m^2+4m}+\frac{m+8}{4m+16}$; 4) $\frac{2}{3b+6}+\frac{b^2-b-2}{b^2-4}-1$.

4.35. Доведіть тотожність $\frac{0{,}9}{0{,}25a+0{,}5}-\frac{0{,}3a+0{,}6}{0{,}5a^2+2a+2}=\frac{3}{a+2}$.

4.36. Доведіть тотожність $\frac{0{,}35}{0{,}5a-1{,}5}-\frac{0{,}2a-0{,}6}{a^2-6a+9}=\frac{1}{2(a-3)}$.

4.37. Перетворіть вираз на дріб:

1) $\frac{a^2-2ab+4b^2}{a^2-4b^2}+\frac{a^2+2ab+4b^2}{(a+2b)^2}$; 2) $\frac{2}{(a-3)^2}-\frac{4}{a^2-9}+\frac{2}{(a+3)^2}$.

4.38. Перетворіть вираз на дріб:

1) $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}$; 2) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{(x+2)^2}$.

4.39. За якого значення a вираз $2+\frac{a}{x-4}$ тотожно дорівнює дробу $\frac{2x}{x-4}$?

4.40. Доведіть, що значення виразу $\frac{a^3+3a}{a+2}-\frac{3a^2-14a+16}{a^2-4}+2a$ для всіх допустимих значень змінної є додатним.

4.41. Доведіть тотожність $a+a^2+\frac{2a^2+3a+1}{a^2-1}-\frac{a^3+2a}{a-1}=-1$.

4.42. Побудуйте графік функції $y=15\left(\frac{3x+4}{5x-10}-\frac{x+4}{3x-6}\right)$.

4.43. Знайдіть значення виразу

$$\frac{3a+0{,}5b}{9a^2-1{,}5ab}-\frac{12a}{9a^2-0{,}25b^2}-\frac{3a-0{,}5b}{9a^2+1{,}5ab},$$

якщо $a=\frac{1}{6}$, $b=-1\frac{4}{9}$. Відтак дізнаєтеся, у якому віці українець Руслан Пономарьов став наймолодшим в історії чемпіоном світу із шахів.

4.44. Знайдіть значення виразу

$$\frac{x+0,2y}{4x^2-0,8xy}-\frac{12,5x}{12,5x^2-0,5y^2}-\frac{x-0,2y}{4x^2+0,8xy},$$

якщо $x=-10$, $y=49$.

4.45. Чи існує таке значення x, для якого значення виразу

$$\frac{1}{2-x}-\frac{1}{2+x}-\frac{x}{4-x^2}+\frac{x^2+4}{2x^3-8x}$$

дорівнює нулю?

Вправи для повторення

4.46. Скільки кілограмів солі міститься у 60 кг її 5-відсоткового розчину?

4.47. З двох міст одночасно назустріч одна одній виїхали дві велосипедистки. Відстань між містами становить s км, швидкості велосипедисток v_1 км/год і v_2 км/год. Через t год вони зустрілися. Складіть формулу для обчислення t. Знайдіть значення t, якщо $s=150$ км, $v_1=12$ км/год, $v_2=13$ км/год.

4.48. Відомо, що $\frac{x}{y}=3$. Знайдіть значення дробу:

1) $\frac{x+y}{y}$; 2) $\frac{x-y}{y}$; 3) $\frac{x+7y}{y}$; 4) $\frac{x^2+2xy}{xy}$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

4.49. Виконайте множення:

1) $\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{16}$; 2) $\frac{3}{7}\cdot1\frac{5}{9}$; 3) $2\frac{2}{3}\cdot3\frac{3}{4}$; 4) $7\frac{1}{7}\cdot2\frac{1}{5}\cdot3\frac{1}{2}$.

4.50. Обчисліть: 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$.

Життєва математика

4.51. Після уроків у класах школи зібрано 0,7 кг паперового сміття.

1) Якщо учні школи залишатимуть щодня таку кількість паперу, то скільки його пропаде за 190 навчальних днів в одній школі? У 20 школах району?

2) Для виробництва 1 т паперу потрібно приблизно 900 м^2 лісу. Якщо учні шкіл району здадуть усі паперові відходи за рік, то скільки м^2 лісу вони збережуть від вирубування?

3) *Проєктна діяльність.* Як можна використати паперові відходи? Завітайте в сусідні супермаркети або крамниці з промисловими та канцелярськими товарами і складіть список товарів, які виробляють з макулатури.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

4.52. Для шкільної актової зали придбали люстру на 31 лампочку. Адміністрація школи хоче мати можливість умикати будь-яку їх кількість, від 1 до 31. Яка найменша кількість звичайних вимикачів для цього знадобиться?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Укажіть вираз, що не є цілим раціональним виразом.

А. $\frac{1}{5}a^2xy$ **Б.** $\frac{m-3}{5}$ **В.** $\frac{5}{m-3}$ **Г.** $0,25x + y$

2. Скоротіть дріб $\frac{5ax}{5xy}$.

А. $\frac{5a}{y}$ **Б.** $\frac{a}{y}$ **В.** $\frac{y}{a}$ **Г.** $\frac{a}{5y}$

3. Виконайте дію $\frac{m}{3} - \frac{5}{b}$.

А. $\frac{m-5}{3-b}$ **Б.** $\frac{3m-5b}{3b}$ **В.** $\frac{15-mb}{3b}$ **Г.** $\frac{mb-15}{3b}$

2

4. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі $\frac{a-3}{a+2}$.

А. a – будь-яке число
Б. a – будь-яке число, крім 3
В. a – будь-яке число, крім -2
Г. a – будь-яке число, крім -2 і 3

5. Скоротіть дріб $\frac{2p+4}{p^2-4}$.

А. $\frac{2}{p-2}$ **Б.** $\frac{2}{p+2}$ **В.** $\frac{2}{p}$ **Г.** $\frac{2}{2-p}$

6. Виконайте дію $\frac{4m}{m-a} + \frac{4a}{a-m}$.

А. $\frac{4m+4a}{m-a}$ **Б.** 4 **В.** -4 **Г.** $\frac{4m+4a}{a-m}$

3

7. Для яких значень x дріб $\frac{(3+x)(1-x)}{5x-5}$ дорівнює нулю?

А. -3 і 1 **Б.** -3
В. 1 **Г.** Таких значень x немає

8. Спростіть вираз

$$\frac{2m}{m-3}+\frac{m}{m+3}+\frac{2m^2}{9-m^2}.$$

А. $\frac{m}{m-3}$ **Б.** $\frac{m}{m+3}$ **В.** $\frac{5m^2+3m}{m^2-9}$ **Г.** $-\frac{1}{3}$

9. Подайте дріб $\frac{m^3-m^4+3}{m^3}$ у вигляді суми цілого виразу і дробу.

А. $1-\frac{1}{m}+\frac{3}{m^3}$ **Б.** $1+\frac{3}{m^3}$

В. $1-m+\frac{3}{m^3}$ **Г.** $1-m+\frac{1}{m^3}$

4

10. Для яких значень x вираз $\frac{x^2-9}{|x+1|-4}$ має зміст?

А. x – будь-яке число
Б. x – будь-яке число, крім 3
В. x – будь-яке число, крім –5
Г. x – будь-яке число, крім 3 і –5

11. Для яких значень x дріб $\frac{x^2-9}{|x+1|-4}$ дорівнює нулю?

А. 3 **Б.** 3 і –3 **В.** –3 **Г.** 3; –5

12. Знайдіть значення виразу $\frac{2(x-4y)}{(x-2)(y-1)}-\frac{x^2-8y}{(2-x)(1-y)}$, якщо $x=13,\ y=0,99$.

А. 1300 **Б.** –1300 **В.** 130 **Г.** –130

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3

13. Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г), якщо $x = 2{,}5$.

Вираз	*Значення виразу*
1. $\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}$	**А.** 4
2. $\frac{4x}{x-2}+\frac{8}{2-x}$	**Б.** 4,5
3. $\frac{100}{10x-x^2}+\frac{x}{x-10}$	**В.** 5
	Г. 5,5

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–4

1

1. Які з виразів є цілими, а які – дробовими:

1) $\frac{1}{3}a^2b$; 2) $\frac{x-y}{x}$; 3) $\frac{c+2}{9}$; 4) $p^2 - p - 19$?

2. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m^2}{mn}$; 2) $\frac{4ab}{4bc}$.

3. Виконайте дію:

1) $\frac{a-b}{n} + \frac{b}{n}$; 2) $\frac{x}{2} - \frac{3}{y}$.

2

4. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{5}{x(x-1)}$; 2) $\frac{2a}{a+2} + \frac{1}{a-3}$.

5. Скоротіть дріб:

1) $\frac{16am}{20bm}$; 2) $\frac{12am^2}{8mc}$; 3) $\frac{2m-6}{m^2-9}$; 4) $\frac{ax+2a}{x^2+4x+4}$.

6. Виконайте дію:

1) $\frac{3a}{a-b} + \frac{3b}{b-a}$; 2) $\frac{5x+y}{x^2y} + \frac{x-5y}{xy^2}$.

3

7. Спростіть вираз $\frac{2b}{b-4} + \frac{b}{b+4} + \frac{2b^2}{16-b^2}$.

8. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

1) $\frac{c^2-c^3+5}{c^2}$; 2) $\frac{p^2-p-2}{p-1}$.

4

9. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2-4x}{16-4x}$.

Додаткові завдання

4

10. Знайдіть:

1) область визначення виразу $\frac{x^2-16}{|x+1|-5}$;

2) значення x, для яких дріб $\frac{x^2-16}{|x+1|-5}$ дорівнює нулю.

11. Спростіть вираз $\frac{3(a-2b)}{(a-3)(b-4)} - \frac{a^2-6b}{(3-a)(4-b)}$.

§ 5. Множення дробів. Піднесення дробу до степеня

1. Множення дробів

Добуток двох звичайних дробів – це дріб, чисельник якого – добуток чисельників, а знаменник – добуток знаменників цих дробів:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Доведемо, що ця рівність є тотожністю для будь-яких значень a, b, c і d за умови, що $b \neq 0$ і $d \neq 0$.

Нехай $\frac{a}{b} = p$, $\frac{c}{d} = q$. Тоді, за означенням частки, $a = bp$, $c = dq$. Тому $ac = (bp)(dq) = (bd)(pq)$. Оскільки $bd \neq 0$, то, знову врахувавши означення частки, одержимо: $pq = \frac{ac}{bd}$. Отже, якщо $b \neq 0$ і $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. ■

Сформулюємо *правило множення дробів*.

Щоб помножити дріб на дріб, треба перемножити окремо чисельники й окремо знаменники та записати перший добуток чисельником, а другий – знаменником дробу, тобто

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Приклад 1. Виконати множення $\frac{b^4}{9m^2} \cdot \frac{12m}{b^2}$.

Розв'язання. $\frac{b^4}{9m^2} \cdot \frac{12m}{b^2} = \frac{b^4 \cdot 12m}{9m^2 \cdot b^2} = \frac{4b^2}{3m}$.

Відповідь: $\frac{4b^2}{3m}$.

Приклад 2. Знайти добуток $\frac{cm + cd}{2x} \cdot \frac{8x^3}{m^2 - d^2}$.

Розв'язання. Використаємо правило множення дробів, попередньо розклавши чисельник першого дробу і знаменник другого на множники:

$$\frac{cm + cd}{2x} \cdot \frac{8x^3}{m^2 - d^2} = \frac{c(m + d) \cdot 8x^3}{2x \cdot (m - d)(m + d)} = \frac{4cx^2}{m - d}.$$

Відповідь: $\frac{4cx^2}{m - d}$.

Зверніть увагу, що у прикладах 1 і 2 під час множення дробів ми не знаходили одразу результат множення чисельників і знаменників. Спочатку ми записали добутки в чисельнику і знаменнику за правилом множення дробів, потім скоротили отриманий дріб, бо він виявився скоротним, а вже потім виконали множення в чисельнику і в знаменнику та записали відповідь. Доцільно це враховувати й надалі.

Приклад 3. Помножити дріб $\frac{x+2}{x^2-2x}$ на многочлен $x^2 - 4x + 4$.

Розв'язання. Оскільки $x^2 - 4x + 4 = \frac{x^2-4x+4}{1}$, то:

$$\frac{x+2}{x^2-2x}\cdot(x^2-4x+4)=\frac{x+2}{x^2-2x}\cdot\frac{x^2-4x+4}{1}=\frac{(x+2)(x-2)^2}{x(x-2)}=$$

$$=\frac{(x+2)(x-2)}{x}=\frac{x^2-4}{x}.$$

Відповідь: $\frac{x^2-4}{x}$.

Правило множення дробів можна поширити на добуток трьох і більше множників.

Приклад 4. $\frac{x^3-8}{x^2-9}\cdot\frac{3x+9}{x-2}\cdot\frac{5x-15}{3x^2+6x+12}=$

$$=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)\cdot 3(x+3)\cdot 5(x-3)}{(x-3)(x+3)\cdot(x-2)\cdot 3(x^2+2x+4)}=5.$$

2. Піднесення дробу до степеня

Розглянемо піднесення дробу $\frac{a}{b}$ до степеня n, де n – натуральне число.

За означенням степеня і правилом множення дробів, маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ множників}}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ множників}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ множників}}}=\frac{a^n}{b^n}.$$

Отже, маємо правило *піднесення дробу до степеня*.

Щоб піднести дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник і перший результат записати в чисельник, а другий – у знаменник дробу, тобто

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Приклад 5. $\left(\dfrac{3x^2y}{5t^3}\right)^3 = \dfrac{(3x^2y)^3}{(5t^3)^3} = \dfrac{3^3(x^2)^3y^3}{5^3\cdot(t^3)^3} = \dfrac{27x^6y^3}{125t^9}$.

Приклад 6. Подати вираз $\left(-\dfrac{m^7p^{12}}{t}\right)^5$ у вигляді дробу.

Розв'язання.

$$\left(-\frac{m^7p^{12}}{t}\right)^5 = (-1)^5\cdot\frac{(m^7)^5\cdot(p^{12})^5}{t^5} = -\frac{m^{35}p^{60}}{t^5}.$$

Відповідь: $-\dfrac{m^{35}p^{60}}{t^5}$.

? Сформулюйте правило множення дробів. Доведіть його. ○ Сформулюйте правило піднесення дробу до степеня. Доведіть його.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

5.1. Виконайте множення:

1) $\dfrac{4x}{a}\cdot\dfrac{b}{3m}$; 2) $\dfrac{2}{a}\cdot\dfrac{a}{5}$; 3) $\dfrac{5m}{4n}\cdot\dfrac{3}{p}$; 4) $\dfrac{3x}{8}\cdot\dfrac{1}{x}$.

5.2. Виконайте множення:

1) $\dfrac{5p}{a}\cdot\dfrac{x}{2b}$; 2) $\dfrac{b}{9}\cdot\dfrac{7}{b}$; 3) $\dfrac{4}{7a}\cdot\dfrac{5b}{3}$; 4) $\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{m}{8}$.

5.3. Перетворіть на дріб вираз:

1) $\dfrac{a^2}{5}\cdot\dfrac{7}{a}$; 2) $\dfrac{b^4}{3}\cdot\dfrac{5}{b^2}$; 3) $\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{a}{3}$; 4) $\dfrac{9}{x^2}\cdot\dfrac{x}{3}$.

5.4. Перетворіть на дріб вираз:

1) $\dfrac{7}{b}\cdot\dfrac{b^2}{3}$; 2) $\dfrac{5}{a^3}\cdot\dfrac{a^5}{2}$; 3) $\dfrac{m}{8}\cdot\dfrac{1}{m^2}$; 4) $\dfrac{a^2}{12}\cdot\dfrac{4}{a}$.

2

5.5. Виконайте дію:

1) $\dfrac{5a}{7}\cdot\dfrac{21}{20a^2}$; 2) $\dfrac{3,5}{14a^2}\cdot\dfrac{4a^3}{5b}$; 3) $\dfrac{c^2}{30}\cdot\dfrac{20}{cm}$;

4) $-\dfrac{3m}{5a^2}\cdot\dfrac{a}{9m^2}$; 5) $\dfrac{4x^2}{7p}\cdot\left(-\dfrac{21p}{8x^3}\right)$; 6) $-\dfrac{5x^2}{7y^3}\cdot\left(-\dfrac{21y^2}{25x}\right)$.

5.6. Перетворіть на дріб вираз:

1) $\dfrac{15m^2}{22}\cdot\dfrac{11}{10m}$; 2) $\dfrac{6p}{7}\cdot\dfrac{2,5c^2}{15p^3}$; 3) $\dfrac{15}{xp}\cdot\dfrac{x^2}{45}$;

4) $\dfrac{4a}{p^2}\cdot\left(-\dfrac{p}{8a^2}\right)$; 5) $-\dfrac{5c^2}{7y}\cdot\dfrac{49y}{10c^3}$; 6) $-\dfrac{6a^2}{65b^3}\cdot\left(-\dfrac{13b}{30a}\right)$.

5.7. Перетворіть на дріб вираз:

1) $9p \cdot \frac{b}{6p^2}$; 2) $\frac{4m^3}{x^2} \cdot x^3$; 3) $9ab^2 \cdot \left(-\frac{5b}{3a^3}\right)$;

4) $-7ab^3 \cdot \frac{b^5}{14a}$; 5) $-4mn^2 \cdot \frac{1}{8mn}$; 6) $-11a^2b \cdot \left(-\frac{5}{22a^3b^2}\right)$.

5.8. Виконайте дію:

1) $\frac{a}{16m^2} \cdot 12m$; 2) $a^3 \cdot \frac{7x^3}{a^2}$;

3) $-\frac{7y}{4x^2} \cdot 12xy^3$; 4) $5cm^4 \cdot \left(-\frac{m}{15c}\right)$;

5) $-5ab^2 \cdot \left(-\frac{1}{10ab}\right)$; 6) $13c^2d \cdot \frac{7}{26c^3d^2}$.

5.9. Спростіть вираз:

1) $\frac{7c^3}{10m^2} \cdot \frac{25m^3}{14c^8}$; 2) $-\frac{8a^3}{27c^4} \cdot \frac{45c^5}{16a^3}$;

3) $\frac{4c^3}{15a^8} \cdot \left(-\frac{5a^3}{8c^4}\right)$; 4) $-\frac{1}{25p^2q^7} \cdot \left(-\frac{10p^3q^7}{11}\right)$.

5.10. Спростіть вираз:

1) $\frac{9m^2}{25a^2} \cdot \frac{35a^3}{18m^5}$; 2) $\frac{7p^3}{18a^3} \cdot \left(-\frac{27a^4}{14p^3}\right)$;

3) $-\frac{5m^3}{21n^7} \cdot \frac{7n^2}{10m^4}$; 4) $-\frac{1}{18c^3d^4} \cdot \left(-\frac{12c^4d^4}{7}\right)$.

5.11. Виконайте множення:

1) $\frac{a^2+2a}{5} \cdot \frac{a}{4a+8}$; 2) $\frac{7m}{a} \cdot \frac{a^2-ab}{21}$;

3) $\frac{2a-b}{10a} \cdot \frac{15a^2}{b-2a}$; 4) $\frac{10ab}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{5ab}$;

5) $-\frac{ab-ac}{10p} \cdot \frac{25p}{xc-xb}$; 6) $\frac{a^2+ab}{x^2} \cdot \frac{xy}{a^2+2ab+b^2}$.

5.12. Виконайте множення:

1) $\frac{m^2-3m}{7} \cdot \frac{x}{2m-6}$; 2) $\frac{5a}{x^2+xy} \cdot \frac{x}{15}$;

3) $\frac{a-b}{16m^2} \cdot \frac{24m}{b-a}$; 4) $\frac{x^2-y^2}{5pc} \cdot \frac{20pc}{x-y}$;

5) $\frac{3a-3b}{12x} \cdot \left(-\frac{18x}{mb-ma}\right)$; 6) $\frac{m^2-2mn+n^2}{pc} \cdot \frac{p^2}{m^2-mn}$.

5.13. Спростіть вираз $\frac{5x^2 + 15x}{y^2 - 2y} \cdot \frac{2 - y}{x + 3}$ та знайдіть його значення, якщо $x = 17$, $y = -\frac{1}{23}$. Відтак дізнаєтеся, у якому році українка Катерина Ющенко винайшла одну з перших у світі мов програмування високого рівня з назвою «Адресна мова».

5.14. Спростіть вираз $\frac{35a - 5a^2}{b^2 + 4b} \cdot \frac{4 + b}{a - 7}$ та знайдіть його значення, якщо $a = 79$, $b = -0{,}2$. Відтак дізнаєтеся, у якому році футбольна команда «Динамо» (Київ) уперше виборола європейський Кубок кубків.

5.15. Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{p}{4m}\right)^3$; 2) $\left(\frac{3c^2}{m}\right)^4$; 3) $\left(-\frac{3m^2n}{7}\right)^2$;

4) $\left(-\frac{2m^2}{3x^3}\right)^3$; 5) $\left(\frac{2a^3b}{x^7}\right)^5$; 6) $\left(-\frac{c^2m^3}{p}\right)^{10}$.

5.16. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\left(\frac{c}{5m}\right)^2$; 2) $\left(\frac{y}{2x^3}\right)^4$; 3) $\left(-\frac{4c^2m^3}{5}\right)^2$;

4) $\left(-\frac{3c^3}{m^7}\right)^3$; 5) $\left(\frac{c^3m}{2a^2}\right)^6$; 6) $\left(-\frac{ab^3}{c^2}\right)^8$.

3 **5.17.** Спростіть вираз:

1) $\frac{54a^2c}{81b^3} \cdot \frac{32ab}{13c^3} \cdot \frac{52bc^2}{128a^3}$; 2) $\frac{147x^4y^2}{p^3} \cdot 10xp^2 \cdot \frac{y^3}{105x^5y}$.

5.18. Виконайте дії:

1) $\frac{14xz^3}{81y^2} \cdot \frac{27y^3}{5xz} \cdot \frac{45xy}{7z^2}$; 2) $\frac{b^3}{111m^5} \cdot 3mc^3 \cdot \frac{74m^3b}{c^4}$.

5.19. Знайдіть добуток:

1) $\frac{m^2 - 4m + 4}{m^2 + 6m + 9} \cdot \frac{m^2 - 9}{3m - 6}$; 2) $-\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 3x + 9} \cdot \frac{x^3 + 27}{25 - x^2}$.

5.20. Виконайте множення:

1) $\frac{a^2 + 8a + 16}{a^2 - 2a + 1} \cdot \frac{7a - 7}{a^2 - 16}$; 2) $-\frac{y^3 - 8}{9 - y^2} \cdot \frac{y^2 - 6y + 9}{y^2 + 2y + 4}$.

5.21. Перетворіть на дріб:

1) $(4a + 20b) \cdot \frac{5}{a^2 - 25b^2}$; 2) $(m^2 - 4) \cdot \frac{2m}{(m - 2)^2}$;

3) $-\frac{a}{2a^2 - 18} \cdot (a^2 - 6a + 9)$; 4) $(x^3 + 27y^3) \cdot \frac{5}{3x^2 - 9xy + 27y^2}$.

5.22. Перетворіть на дріб:

1) $\frac{4}{x^2-9y^2}\cdot(6x+18y)$; 2) $(c^2+4c+4)\cdot\left(-\frac{c}{3c^2-12}\right)$.

5.23. Виконайте дії:

1) $\left(\frac{25x^2}{8y^3}\right)^3\cdot\left(-\frac{16y^5}{125x^3}\right)^2$; 2) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^3$.

5.24. Виконайте дії:

1) $\left(-\frac{16m^3}{27n^5}\right)^2\cdot\left(\frac{9n^4}{8m^2}\right)^3$; 2) $\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3\cdot\frac{m^2+2mn+n^2}{m^2-2mn+n^2}$.

5.25. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{6ab-b}{5a+b}\cdot\frac{25a^2-b^2}{6a-1}$, якщо $a=1{,}2$, $b=6$;

2) $\frac{a^3+8}{a^2-1}\cdot\frac{a^2+a}{a^2-2a+4}$, якщо $a=6$.

4 **5.26.** Виконайте множення:

1) $\frac{x^2+ax-cx-ca}{x^2-ax+cx-ac}\cdot\frac{x^2+ac+xc+xa}{x^2+ac-xc-xa}$;

2) $\frac{5a-5b}{3c+3y}\cdot\frac{c^2-y^2-c-y}{a^2-b^2+a-b}$.

5.27. Обчисліть $\frac{a^2-b^2+a+b}{a^2-b^2+a-b}\cdot\frac{4a-4b}{8a+8b}$, якщо $a=100$, $b=101$.

Вправи для повторення

5.28. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y)=3,\\ \frac{1}{3}(x-y)=5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{x-1}{3}+\frac{y-1}{2}=2,\\ \frac{x-1}{2}-\frac{y-1}{12}=\frac{4}{3}.\end{cases}$

5.29. Побудуйте графік функції $y=\frac{x^3-8}{x-2}-x^2$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

5.30. Знайдіть число, взаємно обернене із числом:

1) 4; 2) −7; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{2}{5}$; 5) 0,16; 6) 1,2.

5.31. Обчисліть:

1) $\dfrac{26}{45} : \dfrac{91}{135}$; 2) $2\dfrac{1}{2} : \dfrac{15}{16}$; 3) $-3\dfrac{1}{7} : 2\dfrac{5}{14}$; 4) $-5\dfrac{13}{15} : \left(-1\dfrac{8}{25}\right)$.

Життєва математика

5.32. Родина витрачає 13 % своїх доходів на оплату комірного, 45 % – на продукти харчування, 17 % – на побутові товари і послуги, а решту на відпочинок. Який річний бюджет родини, якщо на відпочинок вона витрачає 120 000 грн на рік?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

5.33. На моніторі комп'ютера – число 2500. Щохвилини комп'ютерна програма множить або ділить це число на 2 або на 5, одержуючи при цьому натуральне число. Чи може на моніторі рівно через годину з'явитися число: 1) 10 000; 2) 20 000?

§ 6. Ділення дробів

Щоб знайти частку двох звичайних дробів, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}, \text{ або у вигляді формули: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Доведемо, що ця рівність є тотожністю для будь-яких значень a, b, c і d за умови, що $b \neq 0$, $c \neq 0$ і $d \neq 0$.

Оскільки $\left(\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}\right) \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \left(\dfrac{d}{c} \cdot \dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{a}{b} \cdot 1 = \dfrac{a}{b}$, то, за означенням частки, маємо: $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$. ■

Отже, якщо $b \neq 0$, $c \neq 0$ і $d \neq 0$, то $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$.

Дріб $\dfrac{d}{c}$ називають *оберненим* до дробу $\dfrac{c}{d}$.

Сформулюємо *правило ділення дробів.*

Щоб поділити один дріб на інший, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника, тобто

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}.$$

Приклад 1. Поділити дріб $\frac{21x^2}{8y^3}$ на дріб $\frac{3x}{16y^2}$.

Розв'язання. $\frac{21x^2}{8y^3} : \frac{3x}{16y^2} = \frac{21x^2}{8y^3} \cdot \frac{16y^2}{3x} = \frac{21x^2 \cdot 16y^2}{8y^3 \cdot 3x} = \frac{7x \cdot 2}{y} = \frac{14x}{y}$.

Відповідь: $\frac{14x}{y}$.

Приклад 2. Виконати дію $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 2x} : \frac{3x + 15}{x}$.

Розв'язання. $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 2x} : \frac{3x + 15}{x} = \frac{(x-5)(x+5)}{x(x+2)} \cdot \frac{x}{3(x+5)} =$

$= \frac{(x-5)(x+5)x}{3x(x+2)(x+5)} = \frac{x-5}{3(x+2)}$.

Відповідь: $\frac{x-5}{3(x+2)}$.

Приклад 3. Спростити вираз $\frac{a^2 - 4}{5a} : (a^2 + 4a + 4)$.

Розв'язання. Оскільки $a^2 + 4a + 4 = \frac{a^2 + 4a + 4}{1}$, то:

$\frac{a^2 - 4}{5a} : (a^2 + 4a + 4) = \frac{a^2 - 4}{5a} : \frac{a^2 + 4a + 4}{1} = \frac{(a-2)(a+2)}{5a} \cdot \frac{1}{(a+2)^2} =$

$= \frac{(a-2)(a+2) \cdot 1}{5a(a+2)^2} = \frac{a-2}{5a(a+2)}$.

Відповідь: $\frac{a-2}{5a(a+2)}$.

Сформулюйте правило ділення дробів. Доведіть його.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

6.1. Виконайте ділення:

1) $\frac{2}{a} : \frac{3}{b}$; 2) $\frac{7}{x} : \frac{y}{2}$; 3) $\frac{m}{3} : \frac{m}{4}$; 4) $\frac{a^2}{2} : \frac{a}{7}$.

6.2. Виконайте ділення:

1) $\frac{5}{x} : \frac{2}{y}$; 2) $\frac{a}{2} : \frac{5}{b}$; 3) $\frac{4}{x} : \frac{5}{x}$; 4) $\frac{x^2}{3} : \frac{x}{2}$.

2

6.3. Спростіть вираз:

1) $\frac{7b}{12a} : \frac{21b^2}{16a}$; 2) $\frac{15}{2n^2} : \frac{3m}{8n}$; 3) $\frac{9b}{14a} : \frac{5b^2}{21a^2}$;

4) $-\frac{3x^2}{a} : \frac{6x^3}{a^2}$; 5) $14x^2 : \frac{7x}{a}$; 6) $\frac{8x^3}{7a} : (-2x^2)$;

7) $-\frac{12a^2}{b} : (16a^2)$; 8) $-40ma^5 : \left(-\frac{8m^2}{a}\right)$.

6.4. Виконайте дію:

1) $\frac{3a^2}{b} : \frac{a}{b^2}$; 2) $-\frac{3p}{c^3} : \frac{15p^2}{c^2}$; 3) $\frac{4p}{5c} : \frac{8p^2}{15c^3}$;

4) $\frac{15m^3}{c} : (-10m^2)$; 5) $-\frac{2a^2}{b} : (-8a^2)$; 6) $-12a^2bc : \frac{4ab}{m}$.

6.5. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{12m^2}{7c^4} : \frac{6m^4}{35c^3}$; 2) $\frac{9m^2}{22n^3} : \left(-\frac{m^5}{11n^6}\right)$;

3) $-\frac{7ab}{4cd} : \frac{21a^2b}{8cd^3}$; 4) $-\frac{27m^2n}{7c^2x} : \left(-\frac{9mn^2}{7c^2x^3}\right)$.

6.6. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{6a^2}{5b^2} : \frac{2a^3}{15b}$; 2) $-\frac{4a^2}{27x} : \frac{a^4}{9x^3}$;

3) $\frac{5xy}{2m^2n} : \left(-\frac{15x^2y}{8mn^3}\right)$; 4) $-\frac{2ab^2}{9x^2p} : \left(-\frac{2a^2b}{27x^2p^3}\right)$.

6.7. Виконайте ділення:

1) $\frac{2a+b}{4p} : \frac{b+2a}{8p^2}$; 2) $\frac{3a-2x}{7x^2} : \frac{2x-3a}{14x}$;

3) $\frac{a^2-3a}{9y^2} : \frac{5a}{9y}$; 4) $\frac{a^2+a}{9b^2} : \frac{5+5a}{b^3}$;

5) $\frac{7ab}{c^2-3c} : \frac{14ab^2}{3c-9}$; 6) $\frac{11a}{m^2-2m} : \frac{22a^2}{6-3m}$.

6.8. Виконайте ділення:

1) $\frac{x-y}{2a^2} : \frac{y-x}{8a}$; 2) $\frac{p^2+2p}{18a^2} : \frac{7p}{9a}$;

3) $\frac{x^2+x}{9ab} : \frac{5x+5}{18a^2b}$; 4) $\frac{3x-x^2}{7p} : \frac{2x-6}{14p^2}$.

6.9. Спростіть вираз:

1) $\frac{m^2-n^2}{p+2q} : \frac{mn+m^2}{2p+4q}$; 2) $\frac{6x-30}{2x+5} : \frac{x^2-25}{4x+10}$;

3) $\frac{a+2}{a-2} : \frac{a^2+4a+4}{5a-10}$; 4) $\frac{x+y}{p-2m} : \frac{x^2+2xy+y^2}{2m^2-mp}$.

6.10. Спростіть вираз:

1) $\frac{ab+b^2}{m-3n} : \frac{a^2-b^2}{2m-6n}$; 2) $\frac{x-5}{y^2-4} : \frac{2x-10}{3y-6}$;

3) $\frac{x^2-9}{x^2+x} : \frac{x^2+6x+9}{7x+7}$; 4) $\frac{x-4y}{a^2-2ab+b^2} : \frac{4xy-x^2}{a-b}$.

6.11. Українська біологиня Оксана Савенко, яка вивчає морських китів, тюленів, дельфінів, стала першою жінкою, котра вирушила в зимову експедицію на станцію «Академік Вернадський». Спростіть вираз $\frac{6x^2-3xy}{m^2+2m} : \frac{y-2x}{m+2}$ та знайдіть його значення, якщо $x = 10$, $m = -2$. Відтак дізнаєтеся, скільки місяців провела науковиця у складі експедиції.

6.12. У 2012 р. в Україні встановлено рекорд за тривалістю музичного телемарафону національної пісні. Спростіть вираз $\frac{n^2+3n}{5c-p} : \frac{n+3}{10p^2-50pc}$, знайдіть його значення, якщо $n = 5{,}5$, $p = -2$, та дізнаєтеся, скільки годин тривав цей телемарафон.

3 **6.13.** Виконайте дії:

1) $\frac{4a^2}{5b^3} : \frac{8a^3}{7c^3} : \frac{14c^2}{15b^2}$; 2) $\frac{2a^3}{25b^3} \cdot \frac{10b^2}{3c^4} : \frac{4a^2}{15bc}$;

3) $\frac{c^3}{18p^4} : \left(\frac{9c^2}{20p^3} : \frac{27c^3p}{10}\right)$; 4) $\frac{115a^3}{34b^4} : \frac{92a^6}{51b^3} \cdot \frac{4b^2}{15a^2}$.

6.14. Подайте у вигляді нескоротного дробу вираз:

1) $\frac{3a^2}{2b^2c^2} : \frac{7c^6}{6b^3} : \frac{9ab}{14c^2}$; 2) $\frac{7x^3}{4y^2} \cdot \frac{216x^6}{343y^3} : \frac{18x^8}{49y^4}$.

6.15. Виконайте ділення:

1) $\frac{9+6a+4a^2}{2a-1} : \frac{27-8a^3}{1-4a^2}$;

2) $\frac{8+x^3}{16-x^4} : \frac{x^2-2x+4}{x^2+4}$;

3) $(25x^2-10xy+y^2) : \frac{y^2-5xy}{7}$;

4) $\frac{(6y-4x)^2}{3} : (9y^2-12xy+4x^2)$.

6.16. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{x^3-8}{9x^2-16} : \frac{x^2+2x+4}{3x-4}$, якщо $x = -3$;

2) $(m^2-10mn+25n^2) : \frac{0{,}2m^2-5n^2}{5}$, якщо $m = 10$, $n = 3$.

6.17. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\frac{a^2y^3}{5}\right)^3 : \left(-\frac{a^3y^4}{25}\right)^2$, якщо $a = 117\frac{1}{3}$, $y = 0{,}02$;

2) $\frac{(2x-y)^2}{(x-2y)^2} : \frac{4x^2-y^2}{x^2-4y^2}$, якщо $x = 4{,}2$, $y = 1{,}6$.

4 **6.18.** Спростіть вираз $\frac{0,5a^2-32}{0,5a^3-62,5} : \frac{0,2a+1,6}{0,2a^2+a+5}$.

6.19. Доведіть тотожність $\frac{m^3+27}{75m^2-12} : \frac{\frac{1}{3}m^2-m+3}{m-0,4} = \frac{m+3}{25m+10}$.

6.20. Спростіть $\frac{6ab+6-4a-9b}{a^2-12a+36} : \frac{9b^2-12b+4}{3ab-18b-2a+12}$.

6.21. Виконайте дію $\frac{a+4}{x-a} : \frac{ab+4b-2a-8}{cx+xy-ac-ay}$.

Вправи для повторення

6.22. Подайте дріб у вигляді суми або різниці двох дробів:

1) $\frac{2a-b}{ab}$; 2) $\frac{7y^2+y^3}{y^5}$;

3) $\frac{4m^2+5n^2}{m^2n}$; 4) $\frac{18x-24x^2y}{30y^2}$.

6.23. Обчисліть значення дробу:

1) $\frac{m^2+6mn+9n^2}{(2m+6n)^2}$, якщо $m = 2\frac{1}{13}$, $n = -2\frac{1}{7}$;

2) $\frac{0,1x^2-2,5y^2}{x^2+10xy+25y^2}$, якщо $x = 100$, $y = 20$.

6.24. Доведіть тотожність $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{8}{1-x^8}$.

Життєва математика

6.25. Щомісяця протягом 3 місяців прибуток малого підприємства збільшувався на 10 % відносно прибутку за попередній місяць. Податок на прибуток підприємства (ППП) в Україні складає 18 %. У якому розмірі сплатило це підприємство ППП за ці 3 місяці, якщо прибуток за перший місяць склав 40 000 грн?

Цікаві задачі — поміркуй одначе

6.26. Український гросмейстер Василь Іванчук узяв участь у чемпіонаті світу з бліцу. У перший день він переміг суперників у 70 % партій, а на другий день виграв ще 15 партій поспіль. Відсоток виграшних партій за два дні сягнув 80 %. Скільки партій за ці два дні зіграв Василь Іванчук?

§ 7. Тотожні перетворення раціональних виразів

Розглянемо приклади перетворень раціональних виразів.

Приклад 1. Довести тотожність $\frac{6x+y}{3x} - \frac{5y^2}{x^2} \cdot \frac{x}{15y} = 2.$

Доведення. Спростимо ліву частину рівності:

$$\frac{6x+y}{3x} - \frac{5y^2}{x^2} \cdot \frac{x}{15y} = \frac{6x+y}{3x} - \frac{5y^2 \cdot x}{x^2 \cdot 15y} = \frac{6x+y}{3x} - \frac{y}{3x} =$$

$$= \frac{6x+y-y}{3x} = \frac{6x}{3x} = 2.$$

За допомогою тотожних перетворень ми звели ліву частину рівності до правої. Отже, рівність є тотожністю.

Приклад 2. Спростити вираз

$$\left(\frac{2x}{4x^2-y^2} + \frac{1}{y-2x}\right) : \left(\frac{2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2}\right).$$

Розв'язання. Спочатку виконаємо дію в кожній з дужок, а потім — дію ділення:

1) $$\frac{2x}{4x^2-y^2} + \frac{1}{y-2x} = \frac{2x}{(2x-y)(2x+y)} - \frac{^{2x+y/}1}{2x-y} = \frac{2x-(2x+y)}{(2x-y)(2x+y)} =$$

$$= \frac{2x-2x-y}{(2x-y)(2x+y)} = -\frac{y}{(2x-y)(2x+y)} = \frac{y}{(y-2x)(2x+y)};$$

2) $$\frac{2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2} = \frac{^{2x+y/}2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{(2x+y)^2} =$$

$$= \frac{2x(2x+y)-4x^2}{(2x+y)^2} = \frac{4x^2+2xy-4x^2}{(2x+y)^2} = \frac{2xy}{(2x+y)^2};$$

3) $$\frac{y}{(y-2x)(2x+y)} : \frac{2xy}{(2x+y)^2} = \frac{y \cdot (2x+y)^2}{(y-2x)(2x+y) \cdot 2xy} =$$

$$= \frac{2x+y}{2x(y-2x)} = \frac{2x+y}{2xy-4x^2}.$$

Відповідь: $\frac{2x+y}{2xy-4x^2}$.

Розв'язання можна було записати й «ланцюжком»:

$$\left(\frac{2x}{4x^2 - y^2} + \frac{1}{y - 2x}\right) : \left(\frac{2x}{2x + y} - \frac{4x^2}{4x^2 + 4xy + y^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{2x}{(2x - y)(2x + y)} - \frac{^{2x+y/}1}{2x - y}\right) : \left(\frac{^{2x+y/}2x}{2x + y} - \frac{4x^2}{(2x + y)^2}\right) =$$

$$= \frac{2x - (2x + y)}{(2x - y)(2x + y)} : \frac{2x(2x + y) - 4x^2}{(2x + y)^2} =$$

$$= \frac{(2x - 2x - y)(2x + y)^2}{(2x - y)(2x + y)(4x^2 + 2xy - 4x^2)} = \frac{-y(2x + y)}{(2x - y) \cdot 2xy} =$$

$$= -\frac{2x + y}{2x(2x - y)} = \frac{2x + y}{2x(y - 2x)} = \frac{2x + y}{2xy - 4x^2}.$$

Кожний вираз, що містить суму, різницю, добуток і частку раціональних дробів, можна подати у вигляді раціонального дробу.

Приклад 3. Довести, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\dfrac{\dfrac{3x^3 - y}{y} + 1}{\dfrac{3x + y}{y} - 1}$ є невід'ємним.

Доведення. Можна подати цей вираз у вигляді частки $\left(\dfrac{3x^3 - y}{y} + 1\right) : \left(\dfrac{3x + y}{y} - 1\right)$ і далі перетворити його, як у прикладі 2.

А можна, використовуючи основну властивість дробу, помножити чисельник і знаменник цього дробу на їх спільний знаменник, тобто на y:

$$\frac{\dfrac{3x^3 - y}{y} + 1}{\dfrac{3x + y}{y} - 1} = \frac{\left(\dfrac{3x^3 - y}{y} + 1\right)y}{\left(\dfrac{3x + y}{y} - 1\right)y} = \frac{\dfrac{(3x^3 - y)y}{y} + y}{\dfrac{(3x + y)y}{y} - y} = \frac{3x^3 - y + y}{3x + y - y} = \frac{3x^3}{3x} = x^2.$$

Отже, для всіх допустимих значень змінних вираз тотожно дорівнює одночлену x^2, значення якого є невід'ємним для всіх значень x.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2

7.1. Виконайте дії:

1) $\dfrac{12a + b}{3a} - \dfrac{7b^2}{a^2} \cdot \dfrac{a}{21b}$;

2) $\dfrac{m^2 - n^2}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x - 3}{m - n} - \dfrac{m}{x + 3}$;

3) $\dfrac{a - b}{2a + b} + \dfrac{1}{a - b} : \dfrac{2a + b}{a^2 - b^2}$;

4) $x - \dfrac{x^2 - xy}{x + y} \cdot \dfrac{x}{x - y}$.

7.2. Виконайте дії:

1) $\frac{10x+y}{5x}-\frac{3y^2}{x^2}\cdot\frac{x}{15y}$;

2) $\frac{a^2-4}{9-b^2}:\frac{a-2}{3+b}-\frac{2}{3-b}$;

3) $\frac{x+y}{3x-y}+\frac{1}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{3x-y}$;

4) $m+\frac{m^2+mn}{n-m}\cdot\frac{m}{m+n}$.

7.3. Паралімпієць-візочник, українець Олег Іваненко, проплив 62 км Ла-Маншем. Знайдіть значення виразу $\frac{2b}{m}+\frac{a^2-b^2}{5m^2}\cdot\frac{10m}{a+b}$, якщо $a = 4{,}5$, $b = -2025$, $m = 0{,}5$, та дізнаєтеся, за скільки годин спортсмен проплив небезпечну протоку.

7.4. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{x}{7}+\frac{7}{x}+2\right)\cdot\frac{1}{x+7}$;

2) $\left(1+\frac{m}{3n}\right):\left(1-\frac{m}{3n}\right)$;

3) $\left(\frac{a}{a+2}-3a\right)\cdot\frac{a+2}{a}$;

4) $\left(2+\frac{x}{x+1}\right):\frac{9x+6}{5x^2+5x}$.

7.5. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{m}{5}+\frac{5}{m}-2\right)\cdot\frac{1}{m-5}$;

2) $\left(1-\frac{x}{y}\right):\left(1+\frac{x}{y}\right)$;

3) $\left(\frac{b}{b-3}-2b\right)\cdot\frac{b-3}{b}$;

4) $\left(3-\frac{m}{m+2}\right):\frac{4m+12}{m^2+2m}$.

7.6. Доведіть тотожність:

1) $\left(1-\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot\frac{b}{a-b}=\frac{a-b}{b}$;

2) $\left(\frac{m}{n^2}-\frac{1}{m}\right):\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m+n}{n}$.

7.7. Доведіть тотожність:

1) $\left(1+\frac{2x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\frac{y}{x+y}=\frac{x+y}{y}$;

2) $\left(\frac{2m}{n^2}-\frac{1}{2m}\right):\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2m}\right)=\frac{2m-n}{n}$.

3

7.8. Виконайте дії:

1) $\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}\right)\cdot\frac{x^2-4}{4x}$;

2) $\left(\frac{a+3}{a-3}-\frac{a-3}{a+3}\right):\frac{24a}{a^2-6a+9}$.

7.9. Виконайте дії:

1) $\frac{8m}{m^2-1}:\left(\frac{m+1}{m-1}-\frac{m-1}{m+1}\right)$;

2) $\left(\frac{a-2}{a+2}+\frac{a+2}{a-2}\right)\cdot\frac{a^2-4a+4}{2a^2+8}$.

7.10. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{36}{a-3}:\left(\dfrac{a+3}{a-3}-\dfrac{a-3}{a+3}+\dfrac{36}{a^2-9}\right)$; 2) $\left(\dfrac{2x+y}{x-2y}+\dfrac{2x-y}{x+2y}\right)\cdot\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+y^2}$.

7.11. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{16}{x+2}:\left(\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{16}{x^2-4}-\dfrac{x-2}{x+2}\right)$; 2) $\left(\dfrac{5a+1}{a-2}+\dfrac{5a-1}{a+2}\right)\cdot\dfrac{a^2-4}{5a^2+2}$.

7.12. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{a}{a-5}-\frac{a}{a+5}-\frac{a^2+25}{25-a^2}\right)\cdot\frac{a-5}{a^2+10a+25}=\frac{1}{a+5}.$$

7.13. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{b}{b+7}+\frac{b^2+49}{b^2-49}-\frac{b}{b-7}\right):\frac{b-7}{b^2+14b+49}=b+7.$$

7.14. Виконайте дії:

1) $\left(\dfrac{1}{1-a^2}-\dfrac{1}{a^2+2a+1}\right):\dfrac{2a}{a^2-1}$;

2) $\left(\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{x+3}{2x+2}+\dfrac{6}{2x^2-2}\right)\cdot\dfrac{4x^2-4}{5}$.

7.15. Виконайте дії:

1) $\left(\dfrac{1}{4-a^2}-\dfrac{1}{a^2-4a+4}\right)\cdot\dfrac{a^2-4}{2a}$;

2) $\left(\dfrac{a+1}{3a-3}-\dfrac{a+2}{3a+3}+\dfrac{21-a}{3a^2-3}\right):\dfrac{4}{a^2-1}$.

7.16. Доведіть тотожність:

1) $\left(2-\dfrac{2a^2-a}{a^2-a+1}\right):\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{a-1}{a^2-a+1}\right)=a+1$;

2) $\left(\dfrac{m-2}{m^2-2m+4}-\dfrac{6m-13}{m^3+8}\right)\cdot\dfrac{2m^3+16}{18-6m}=\dfrac{3-m}{3}$.

7.17. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $\dfrac{a+2}{16}\cdot\left(\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{3a-8}{a^2-2a+4}-\dfrac{4a-28}{a^3+8}\right)$;

2) $\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{3}{a^3+1}+\dfrac{3}{a^2-a+1}\right)\left(a-\dfrac{2a-1}{a+1}\right)$.

7.18. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу $\dfrac{b-2}{15}\cdot\left(\dfrac{1}{b-2}+\dfrac{9b+6}{b^3-8}-\dfrac{1-2b}{b^2+2b+4}\right)$ від значення змінної не залежить.

7.19. Подайте у вигляді раціонального дробу:

1) $\left(\frac{m}{n}-\frac{n}{m}\right)^2$; 2) $\left(\frac{a^2}{b}-1\right)^2+\left(\frac{a^2}{b}+1\right)^2$;

3) $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}\right)^2+\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)^2$; 4) $\left(\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}\right)^2-\left(\frac{a+b}{a}-\frac{a-b}{b}\right)^2$.

7.20. Перетворіть вираз на дріб:

1) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2$; 2) $\left(\frac{m}{n^2}+1\right)^2-\left(\frac{m}{n^2}-1\right)^2$.

7.21. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$; 2) $\dfrac{\frac{7x-a}{a}+1}{\frac{7x+a}{a}-1}$; 3) $\dfrac{\frac{1}{p}-\frac{1}{2p}}{\frac{1}{p^2}-\frac{1}{2p^2}}$;

4) $\dfrac{c-\frac{6c-9}{c}}{\frac{3}{c}-1}$; 5) $\dfrac{\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}}{\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}}$; 6) $\dfrac{\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}}{\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}}$.

7.22. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{1+\frac{4}{m}}{1-\frac{4}{m}}$; 2) $\dfrac{\frac{3p+m}{m}-1}{\frac{3p-m}{m}+1}$; 3) $\dfrac{\frac{1}{4t}+\frac{1}{t}}{\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{t^2}}$;

4) $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x-\frac{2x-1}{x}}$; 5) $\dfrac{\frac{m}{2-m}+\frac{2+m}{m}}{\frac{m}{2+m}+\frac{2-m}{m}}$; 6) $\dfrac{\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}}$.

4 **7.23.** Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\frac{8}{4a-b}:\left(\frac{2a-0,5b}{4a^2+ab+0,25b^2}+\frac{24ab}{64a^3-b^3}+\frac{1}{2a-0,5b}\right)$ від значення змінних не залежить.

7.24. Знайдіть значення виразу

$$\left(\frac{1,5a-4}{0,5a^2-a+2}-\frac{2a-14}{0,5a^3+4}+\frac{1}{a+2}\right):\frac{4}{a+2},$$

якщо $a = 197$.

7.25. Відомо, що $x-\frac{1}{x}=7$. Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{1}{x^2}$.

7.26. Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{1}{x^2}$, якщо $x+\frac{1}{x}=3$.

7.27. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{8x^2+2x}{8x^3-1}-\dfrac{2x+1}{4x^2+2x+1}\right)\left(1+\dfrac{2x+1}{2x}-\dfrac{4x^2+10x}{4x^2+2x}\right);$

2) $\dfrac{p^2-2p+1}{4}\cdot\left(\dfrac{2p}{p^3+1}:\dfrac{1-p}{p^2-p+1}+\dfrac{2}{p-1}\right):\dfrac{p-1}{p+1}.$

7.28. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{4x}{x^2-1}\right)\left(\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{4x}{x^2-1}\right)$$

не залежить від значення змінної.

7.29. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{m^2-3m}{m^3+3m^2+3m+1}+\frac{1}{m^2+2m+1}\right)\left(\frac{3-m}{m^2-2m+1}-\frac{2}{1-m}\right)$$

є додатним для всіх допустимих значень змінної.

7.30. Подайте у вигляді раціонального дробу або цілого виразу:

1) $1-\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{x+1}};$ 2) $\dfrac{m}{m-\dfrac{1}{m-\dfrac{m}{1-m}}}.$

7.31. Подайте у вигляді раціонального дробу або цілого виразу:

1) $1+\dfrac{2x}{1-\dfrac{x}{x+2}};$ 2) $\dfrac{1}{n-\dfrac{1}{n+\dfrac{n}{n-1}}}.$

Вправи для повторення

7.32. Подайте вираз у вигляді степеня:

1) $x^7x^3 : x^2;$ 2) $(x^5 : x^2) : x;$

3) $(a^2)^3\cdot a;$ 4) $(x^3)^5 : x^4.$

7.33. Доведіть, що число 8^9-4^{12} ділиться на 7.

7.34. Побудуйте графік функції:

1) $y=\begin{cases}2x+4, & \text{якщо } x<0,\\ 4-x, & \text{якщо } x\geqslant 0;\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}2x+5, & \text{якщо } x<-1,\\ 3, & \text{якщо } -1\leqslant x\leqslant 4,\\ x-1, & \text{якщо } x>4.\end{cases}$

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

7.35. Для яких значень змінної має зміст вираз:

1) $\frac{x-1}{7}$;   2) $\frac{7}{x-1}$;   3) $\frac{x+2}{x(x+3)}$;

4) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}$;   5) $\frac{x^2}{x^2-9}$;   6) $\frac{x-5}{x^2-4x}$?

7.36. Для яких значень змінної дорівнює нулю значення дробу:

1) $\frac{(m-1)m}{m+2}$;   2) $\frac{x^2-2x}{8}$;   3) $\frac{(m+2)m}{m^2-4}$;   4) $\frac{x}{x^2+x}$?

7.37. Розв'яжіть рівняння:

1) $2(x-3)=4(x+7)-11$;   2) $5(x-2)-7(x+1)=9(x-8)$.

7.38. Розв'яжіть рівняння, використовуючи основну властивість пропорції:

1) $\frac{2x-4}{7}=\frac{3x+1}{9}$;   2) $\frac{2x-11}{5}=\frac{3x+17}{10}$.

Життєва математика

7.39. Заробітна плата водійки тролейбуса пропорційна кількості відпрацьованих годин. За місяць водійка відпрацювала 160 годин та отримала 21 600 грн. Скільки годин має відпрацювати водійка наступного місяця, щоб отримати 24 300 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

7.40. (*З книги «Універсальна арифметика» Ньютона.*) Дехто забажав розділити певну суму коштів між жебраками порівну. Якби в нього було на 8 динарів більше, то він мав би дати кожному по 3 динари, але він роздав лише по 2 динари і ще 3 в нього залишилося. Скільки було жебраків?

§ 8. Раціональні рівняння

1. Рівносильні рівняння

Два рівняння називають ***рівносильними***, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і ті рівняння, які коренів не мають.

Так, наприклад, рівносильними є рівняння $x+3=5$ і $4x=8$, оскільки коренем кожного з них є число 2.

Рівняння $x - 3 = 7$ і $2x = 18$ не є рівносильними, оскільки коренем першого з них є число 10, а коренем другого – число 9.

Раніше, у 7 класі, ви ознайомилися з властивостями, що перетворюють рівняння на рівносильні їм рівняння.

1. Якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному.
2. Якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини у другу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному.
3. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

2. Раціональні рівняння

Розглянемо рівняння:

$$3(x-1)+2x=x+7;\qquad \frac{x+2}{3}-\frac{x+7}{6}=x;\qquad \frac{2}{x-1}=14+\frac{1}{x}.$$

Ліва і права частини кожного з них є раціональними виразами.

Рівняння, ліва і права частини яких є раціональними виразами, називають ***раціональними рівняннями***.

У перших двох із записаних вище рівнянь ліва і права частини є цілими виразами. Такі рівняння називають ***цілими раціональними рівняннями***. Якщо в рівнянні хоча б одна частина є дробовим виразом, то рівняння називають ***дробовим раціональним рівнянням***. Третє із записаних вище рівнянь є дробовим раціональним.

Як розв'язувати цілі раціональні рівняння, ми розглянули в попередніх класах. Розглянемо тепер, як розв'язувати дробові раціональні рівняння, тобто рівняння зі змінною у знаменнику.

3. Область визначення рівняння

Ліва і права частини дробових раціональних рівнянь можуть мати зміст не для всіх значень змінної.

Значення змінних, для яких ліва і права частини рівняння мають зміст, називають ***допустимими значеннями змінної*** у рівнянні.

Ці значення утворюють *область визначення рівняння* (ОВР), або *область допустимих значень* (ОДЗ) змінної у рівнянні.

Областю визначення рівняння **(ОВР) називають множину значень змінної, для яких мають зміст обидві частини рівняння.**

4. Використання умови рівності дробу нулю

Нагадаємо, що $\frac{P}{Q}=0$, коли $\begin{cases}P=0,\\Q\neq 0.\end{cases}$ У таких випадках кажуть, що рівняння $\frac{P}{Q}=0$ *рівносильне системі* $\begin{cases}P=0,\\Q\neq 0.\end{cases}$

Приклад 1. Розв’язати рівняння $\frac{x}{x-2}=3$.

Розв’язання. За допомогою тотожних перетворень і властивостей рівнянь зведемо рівняння до вигляду $\frac{P}{Q}=0$, де P і Q – цілі раціональні вирази. Маємо:

$$\frac{x}{x-2}=3;\quad \frac{x}{x-2}-\frac{3}{1}=0;\quad \frac{x-3(x-2)}{x-2}=0;\quad \frac{x-3x+6}{x-2}=0.$$

Остаточно маємо рівняння: $\frac{6-2x}{x-2}=0$.

Щоб дріб $\frac{6-2x}{x-2}$ дорівнював нулю, треба, щоб чисельник $6-2x$ дорівнював нулю, а знаменник $x-2$ не дорівнював нулю.
Тоді $6-2x=0$, звідки $x=3$. Для $x=3$ знаменник $x-2=3-2=1\neq 0$.
Отже, $x=3$ – єдиний корінь рівняння.
Розв’язування останнього рівносильного даному рівняння, враховуючи умову рівності дробу нулю, зручно записувати так:

$$\frac{6-2x}{x-2}=0;\quad \begin{cases}6-2x=0,\\x-2\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x=3,\\x\neq 2;\end{cases}\quad x=3.$$

Відповідь: 3.

Отже, розв’язуючи дробове раціональне рівняння, можна:

1) за допомогою тотожних перетворень звести рівняння до вигляду $\frac{P}{Q}=0$;
2) прирівняти чисельник P до нуля й розв’язати одержане ціле рівняння;
3) виключити з його коренів ті, за яких знаменник Q дорівнює нулю, і записати відповідь.

Приклад 2. Чи є рівносильними рівняння

$$\frac{x-2}{x+1}=0 \text{ і } \frac{2x-x^2}{x-3}=0?$$

Розв'язання. Оскільки рівняння називають рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені або не мають коренів, знайдемо корені цих рівнянь.

Перше рівняння має єдиний корінь $x = 2$, а друге – два корені: $x = 0$ і $x = 2$ (розв'яжіть рівняння самостійно). Тому рівняння не є рівносильними.

Відповідь: ні.

5. Використання основної властивості пропорції

Якщо $\frac{P}{Q}=\frac{M}{N}$, то $PN = MQ$, де $Q \neq 0$, $N \neq 0$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{2x+1}{x-1}=\frac{x}{x-2}+1.$

Розв'язання. Знайдемо область визначення рівняння (ОВР). Оскільки знаменники дробів не можуть дорівнювати нулю, то $x - 1 \neq 0$ і $x - 2 \neq 0$. Маємо: $x \neq 1$ і $x \neq 2$, тобто ОВР містить усі числа, крім 1 і 2.

Зведемо рівняння до вигляду пропорції, додавши вирази у правій частині рівняння: $\frac{2x+1}{x-1}=\frac{x+x-2}{x-2}$.

Одержимо: $\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2x-2}{x-2}$.

За основною властивістю пропорції, маємо:

$(2x + 1)(x - 2) = (2x - 2)(x - 1)$.

Розв'яжемо це рівняння:

$2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 2x - 2x + 2$,

звідки $x = 4$.

Оскільки число 4 належить ОВР, то 4 є його коренем.

Запис розв'язування, щоб не забути врахувати ОВР, зручно закінчити переходом від рівняння до системи, яка йому рівносильна:

$$\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2x-2}{x-2}; \quad \begin{cases}(2x+1)(x-2)=(2x-2)(x-1),\\ x-1\neq 0,\\ x-2\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x^2-4x+x-2=2x^2-2x-2x+2,\\ x\neq 1,\\ x\neq 2;\end{cases} \quad \begin{cases}x=4,\\ x\neq 1,\\ x\neq 2;\end{cases} \quad x=4.$$

Відповідь: 4.

Отже, для розв'язування дробового раціонального рівняння можна:

1) знайти область визначення рівняння (ОВР);
2) звести рівняння до вигляду $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{M}{N}$;
3) записати рівняння $P \cdot N = M \cdot Q$ і розв'язати його;
4) виключити з отриманих коренів ті, що не належать ОВР, і записати відповідь.

6. Метод множення обох частин рівняння на спільний знаменник дробів

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\dfrac{x-2}{x^2-1}=\dfrac{5}{x^2-x}+\dfrac{5}{x^2+x}$.

Розв'язання. Знайдемо ОВР та найпростіший спільний знаменник усіх дробів рівняння, розклавши знаменники на множники:

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{5}{x(x-1)}+\frac{5}{x(x+1)}.$$

ОВР містить усі числа x, для яких $x \neq 0$, $x-1 \neq 0$, $x+1 \neq 0$. Отже, всі значення x, крім чисел 0, 1 і −1. А найпростішим спільним знаменником буде вираз $x(x-1)(x+1)$.

Помножимо обидві частини рівняння на цей вираз:

$$\left.\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{5}{x(x-1)}+\frac{5}{x(x+1)}\ \right|\cdot x(x-1)(x+1).$$

Матимемо: $x(x-2)=5(x+1)+5(x-1)$, а після спрощення: $x^2-12x=0$, тобто $x(x-12)=0$,

звідки $x=0$ або $x=12$.

Але число 0 не належить ОВР, тому не є його коренем.

Отже, число 12 – єдиний корінь рівняння.

Відповідь: 12.

Розв'язуючи дробове раціональне рівняння, можна:

1) знайти ОВР;
2) знайти найпростіший спільний знаменник дробів, що входять у рівняння;
3) помножити обидві частини рівняння на цей спільний знаменник;
4) розв'язати одержане ціле рівняння;
5) виключити з його коренів ті, що не належать ОВР, і записати відповідь.

? Які рівняння називають раціональними? ○ Яке рівняння називають цілим раціональним, а яке – дробовим раціональним? ○ Як можна розв'язати дробове раціональне рівняння?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

8.1. (*Усно.*) Назвіть цілі раціональні рівняння, дробові раціональні рівняння:

1) $\frac{2}{x} + \frac{x}{3} = 1$; 2) $x^2 - 2x(x + 3) = x - 7$;

3) $\frac{x+2}{4} - \frac{x-3}{8} = 15$; 4) $\frac{4}{x+2} - \frac{8}{x-3} = 15$.

8.2. Чи є число 1 коренем рівняння:

1) $\frac{x}{x+2} = 0$; 2) $\frac{x-1}{x+2} = 0$; 3) $\frac{x}{x-1} = 0$; 4) $\frac{x^2-1}{x} = 0$?

8.3. Чи є число 2 коренем рівняння:

1) $\frac{x-2}{x+3} = 0$; 2) $\frac{x}{x+3} = 0$; 3) $\frac{x}{x-2} = 0$; 4) $\frac{4-x^2}{x+1} = 0$?

8.4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x-2} = 0$; 2) $\frac{x-3}{x} = 0$; 3) $\frac{x+2}{x-1} = 0$; 4) $\frac{x+5}{x} = 0$.

8.5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x+1} = 0$; 2) $\frac{x-2}{x} = 0$; 3) $\frac{x+3}{x-4} = 0$; 4) $\frac{x+7}{x} = 0$.

2

8.6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-8}{x+4} = 0$; 2) $\frac{3x+7}{x} = 0$; 3) $\frac{x^2}{x-9} = 0$; 4) $\frac{x-1}{1-x} = 0$.

8.7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x+12}{x-4} = 0$; 2) $\frac{2x-5}{x} = 0$; 3) $\frac{x^2}{x+1} = 0$; 4) $\frac{2-x}{x-2} = 0$.

8.8. Знайдіть корені рівняння:

1) $2 - \frac{x+3}{x} = 0$; 2) $\frac{x}{x+2} = 2$; 3) $\frac{x}{x-4} = \frac{9}{5}$; 4) $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x-3}$.

8.9. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{2x+1}{x} - 3 = 0$; 2) $\frac{x}{x-4} = 5$;

3) $\frac{x}{x+2} = \frac{5}{3}$; 4) $\frac{5}{x-2} = \frac{3}{x+4}$.

8.10. Чи є рівносильними рівняння:

1) $\frac{x}{x-2} = \frac{4}{x-2}$ і $\frac{x-5}{x} = \frac{3-x}{x}$;

2) $\frac{x^2+2x}{x-3} = \frac{x^2-4}{x-3}$ і $\frac{2x-3}{3x} - \frac{x-2}{3x} = 0$?

8.11. Чи є рівносильними рівняння:

1) $\dfrac{x-4}{x}=\dfrac{2-x}{x}$ і $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}$;

2) $\dfrac{x^2-x}{x-1}=\dfrac{x^2+5}{x-1}$ і $\dfrac{3x-1}{2x}-\dfrac{2x-5}{2x}=0$?

8.12. Розв'яжіть рівняння, використовуючи основну властивість пропорції:

1) $\dfrac{2x^2-1}{x+1}=2x$; 2) $\dfrac{3x^2+1}{x}=3x-1$;

3) $\dfrac{x-3}{2x^2+1}=\dfrac{1}{2x}$; 4) $\dfrac{4x^2-3}{2x-1}=2x+3$.

8.13. Розв'яжіть рівняння, використовуючи основну властивість пропорції:

1) $\dfrac{3x^2+2}{x-2}=3x$; 2) $\dfrac{2x^2-1}{x}=2x+1$;

3) $\dfrac{2x-3}{2x^2+3}=\dfrac{1}{x}$; 4) $\dfrac{6x^2-1}{2x+3}=3x-1$.

8.14. Знайдіть дріб, що дорівнює $\dfrac{2}{3}$, у якого знаменник на 5 більший за чисельник.

8.15. Знайдіть дріб, що дорівнює $\dfrac{1}{5}$, у якого чисельник на 12 менший від знаменника.

8.16. Яке число треба додати до чисельника дробу $\dfrac{3}{10}$, щоб отримати дріб $\dfrac{1}{2}$?

8.17. Яке число треба відняти від знаменника дробу $\dfrac{5}{18}$, щоб отримати дріб $\dfrac{1}{3}$?

3 **8.18.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x+4}{2x-1}-\dfrac{x+8}{2x+1}=0$; 2) $\dfrac{1}{5x}-\dfrac{1}{10x}=\dfrac{1}{30}$;

3) $2+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{8-x}{2-x}$; 4) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{5x-5}=\dfrac{1}{10}$.

8.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x+1}{3x+1}-\dfrac{x}{3x-1}=0$; 2) $\dfrac{1}{6x}-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{6}$;

3) $3+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{x}{x-1}$; 4) $\dfrac{1}{4x+4}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{3}{8}$.

8.20. Чи є рівносильними рівняння

$$\frac{2x+6}{x+1}+\frac{3x-7}{x-2}=5 \text{ і } \frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}?$$

8.21. Чи є рівносильними рівняння

$$\frac{3x-12}{x-3}+\frac{x+12}{x}=4 \text{ і } \frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}?$$

8.22. Чисельник дробу на 5 менший від знаменника. Якщо до чисельника додати 14, а від знаменника відняти 1, то одержимо дріб, обернений даному. Знайдіть початковий дріб.

8.23. Знаменник дробу на 3 більший за чисельник. Якщо до чисельника додати 8, а від знаменника відняти 1, то одержимо дріб, обернений даному. Знайдіть початковий дріб.

8.24. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{x^2-2}{x^2+2x}=\frac{x-1}{x}+\frac{x+3}{x+2}$; 2) $\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}$.

8.25. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-2}{x^2-x}=\frac{x+2}{x}+\frac{x+3}{x-1}$; 2) $\frac{x^2+8}{x^2-4}=\frac{x}{x+2}+\frac{3}{x-2}$.

4 **8.26.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{|x-1|-5}{x-6}=0$; 2) $\frac{|x-1|-1}{x(x-2)}=0$.

8.27. Знайдіть корені рівняння: 1) $\frac{|x-2|-3}{x-5}=0$; 2) $\frac{|x-2|-2}{x(x-4)}=0$.

8.28. Для яких значень a рівняння не має розв'язків:

1) $\frac{x-2a}{x(x-8)}=0$; 2) $\frac{x-a+1}{x^2-3x}=0$?

8.29. Для яких значень a рівняння $\frac{(x-a)(x-2a-1)}{x-3}=0$ має лише один корінь?

Вправи для повторення

8.30. Спростіть вираз $\frac{10x}{x+2}-\frac{x-8}{3x+6}\cdot\frac{120}{x^2-8x}$ та знайдіть його значення, якщо $x=20$. Відтак дізнаєтеся, скільки олімпійських медалей у скарбниці гімнастки Лариси Латиніної, почесної громадянки міста Херсон.

8.31. Скоротіть дріб $\frac{4a^2-b^2+2a-b}{4a^2+4ab+b^2+2a+b}$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

8.32. Знайдіть значення степеня:

1) $(-2)^3$; 2) 14^2; 3) $(-1)^{11}$; 4) 0^5;

5) $(0,3)^3$; 6) $(-0,8)^2$; 7) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$; 8) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$.

8.33. Обчисліть:

1) $2^5 - 3^2$; 2) $(-1)^9 + (-1)^8$; 3) $4^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2$; 4) $5^3 : \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

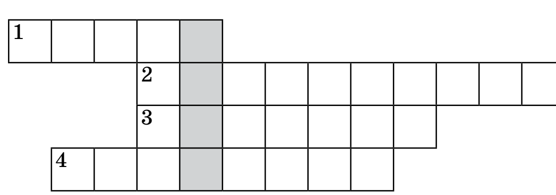
8.34. Подайте у вигляді степеня з:
1) основою 2 числа 2, 4, 8, 16, 32, 128, 512;
2) основою 3 числа 81, 243;
3) основою 5 числа 5, 25, 625;
4) основою 10 числа 100, 10 000.

Життєва математика

8.35. У червні 1 кг помідорів на ринку коштував у середньому 60 грн. У липні ця вартість зменшилася на 30 %, а в кінці серпня – ще на 50 %. Скільки в середньому коштував на ринку 1 кг помідорів у кінці серпня?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

8.36. *Видатні українці.* Запишіть по горизонталях прізвища видатних українців (за потреби використовуйте додаткову літературу та інтернет) і отримаєте у виділеному стовпчику прізвище видатного французького математика, про дослідження якого дізнаєтеся в одному з наступних розділів.



1. Найтитулованіша українська диригентка, котра стала першою жінкою-диригентом за майже півторастолітню історію «Метрополітен-опера» в Нью-Йорку. Входить до трійки найкращих диригенток сучасності.
2. Інженер-авіаконструктор, що народився в Україні, конструктор першого гелікоптера.
3. Український футболіст, володар «Золотого м’яча» 1986 року.
4. Видатна українська поетеса, лауреатка Шевченківської премії. Почесний професор Києво-Могилянської академії, доктор Львівського та Чернівецького університетів.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Знайдіть добуток $\frac{15}{m^2} \cdot \frac{m}{5}$.

А. $\frac{m}{3}$ **Б.** $\frac{3}{m}$ **В.** $\frac{5}{m}$ **Г.** $3m$

2. Виконайте ділення $\frac{3}{p} : \frac{9}{p^3}$.

А. $\frac{27}{p^4}$ **Б.** $\frac{3}{p^2}$ **В.** $3p^2$ **Г.** $\frac{p^2}{3}$

3. Укажіть рівняння, коренем якого є число 2.

А. $\frac{x-2}{x} = 0$ **Б.** $\frac{x}{x-2} = 0$

В. $\frac{x+2}{x-1} = 0$ **Г.** $\frac{x-2}{x-2} = 0$

2

4. Виконайте множення $\frac{m^2 - m}{p^2} \cdot \frac{ap}{m^2 - 2m + 1}$.

А. $\frac{a}{p(m-1)}$ **Б.** $\frac{am}{p(m+1)}$ **В.** $\frac{am}{p(m-1)}$ **Г.** $\frac{am}{m-1}$

5. $\left(-\frac{2p^7}{a^5}\right)^3 = \ldots$

А. $\frac{8p^{21}}{a^{15}}$ **Б.** $-\frac{8p^{21}}{a^{15}}$ **В.** $-\frac{6p^{21}}{a^{15}}$ **Г.** $-\frac{8p^{10}}{a^8}$

6. Знайдіть корінь рівняння $\frac{2x^2 - 5}{x+1} = 2x$.

А. $-2{,}5$ **Б.** $2{,}5$ **В.** $-\frac{2}{5}$ **Г.** Коренів немає

3

7. Спростіть вираз $(25x^2 - 10x + 1) : \frac{10x^2 - 2x}{4x}$.

А. 2 **Б.** $10x^2 - 2x$ **В.** $10x - 2$ **Г.** $\frac{5x-1}{2}$

8. Знайдіть значення виразу $\frac{8}{x+1} : \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1}\right)$, якщо $x = 2{,}01$.

А. 0 **Б.** 1 **В.** 2,01 **Г.** 2

9. Укажіть рівняння, що є рівносильним рівнянню

$$\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}=\frac{18}{x^2-9}.$$

А. $x-3=0$ **Б.** $\frac{x+2}{x}=0$ **В.** $\frac{x}{x+2}=0$ **Г.** $\frac{5x-x^2}{x}=0$

4 **10.** Спростіть вираз $\frac{0{,}1a^3+0{,}8}{0{,}2a^2-0{,}8}:\frac{0{,}5a^2-a+2}{0{,}25a+0{,}5}$.

А. $\frac{a+2}{4(a-2)}$ **Б.** $\frac{a+2}{a-2}$ **В.** $\frac{a-2}{4(a+2)}$ **Г.** $\frac{4(a+2)}{a-2}$

11. Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{1}{x^2}$, якщо $x-\frac{1}{x}=5$.

А. 3 **Б.** 7 **В.** 23 **Г.** 27

12. Розв'яжіть рівняння $\frac{2-|x-5|}{x-7}=0$.

А. Розв'язків немає **Б.** 7 **В.** 3 **Г.** 3; 7

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г), якщо $a=7$.

Вираз	*Значення виразу*
1. $\frac{a^2-4}{16}\cdot\frac{8}{a+2}$	**А.** 2
2. $\frac{a^2+6a+9}{20}:\frac{a+3}{4}$	**Б.** 2,25
3. $\left(\frac{a}{4}+\frac{4}{a}+2\right)\cdot\frac{7}{a+4}$	**В.** 2,5
	Г. 2,75

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 5–8

1 **1.** Виконайте множення: 1) $\frac{c^4}{4}\cdot\frac{5}{c^2}$; 2) $\frac{12}{a^2}\cdot\frac{a}{3}$.

2. Виконайте ділення:

1) $\frac{p}{5}:\frac{p}{7}$; 2) $\frac{2}{a^2}:\frac{4}{a}$.

3. Чи є число 4 коренем рівняння:

1) $\frac{x^2-16}{x}=0$; 2) $\frac{x}{x-4}=0$?

2 **4.** Виконайте дії:

1) $\dfrac{2a^3}{15m^2} \cdot \left(-\dfrac{5m}{6a^3}\right)$; 2) $\dfrac{x^2 - xy}{a^2} \cdot \dfrac{ab}{x^2 - 2xy + y^2}$;

3) $-\dfrac{3m^2}{7c^3} : \left(-\dfrac{9m^3}{28c}\right)$; 4) $\dfrac{x^2 - 16}{3x - 6} : \dfrac{2x + 8}{5x - 10}$.

5. Піднесіть дріб до степеня: 1) $\left(-\dfrac{2a^3}{m^2}\right)^3$; 2) $\left(\dfrac{a^2b}{c^3}\right)^{10}$.

6. Розв'яжіть рівняння: 1) $\dfrac{4x + 8}{x - 3} = 0$; 2) $\dfrac{4x^2 - 8}{x + 1} = 4x$.

3 **7.** Спростіть вираз $\left(\dfrac{2a + 1}{2a - 1} - \dfrac{2a - 1}{2a + 1}\right) : \dfrac{2a^2}{4a^2 - 1}$.

8. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{7}{x + 7} + \frac{x^2 + 49}{x^2 - 49} - \frac{7}{7 - x}\right) \cdot \frac{x - 7}{x^2 + 14x + 49} = \frac{1}{x + 7}.$$

4 **9.** Відомо, що $x + \dfrac{1}{x} = 9$. Знайдіть значення виразу $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Додаткові завдання

4 **10.** Спростіть вираз $\dfrac{0,2a^3 - 1,6}{0,1a^2 - 1,6} : \dfrac{0,5a^2 + a + 2}{0,25a - 1}$.

11. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{|2 - x| - 3}{x - 5} = 0$.

§ 9. Степінь із цілим показником

1. Поняття про степінь із цілим показником

У 7 класі ми вивчали степінь з натуральним показником. За означенням:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}},$$

де n – натуральне число, $n > 1$ і $a^1 = a$.

У математиці, а також під час розв'язування задач практичного змісту, наприклад з фізики або хімії, трапляються степені, показник яких дорівнює нулю або є цілим від'ємним числом. Степінь з від'ємним показником можна знайти в науковій і довідковій літературі. Наприклад, масу атома гелію записують так: $6,64 \cdot 10^{-27}$ кг. Як розуміти зміст запису 10^{-27}?

Розглянемо степені числа 3 з показниками 1, 2, 3, 4, ... :

$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$ – це відповідно 3, 9, 27, 81, ...

У цьому рядку кожне наступне число втричі більше за попереднє. Продовжимо рядок у протилежному напрямку, зменшуючи щоразу показник степеня на 1. Одержимо: ..., $3^{-3}, 3^{-2}, 3^{-1}, 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$

Таким чином, число 3^0 має бути втричі меншим від 3^1, тобто від числа 3. Але втричі меншим від числа 3 є число 1, отже, $3^0 = 1$.

Рівність $a^0 = 1$ справджується для будь-якої основи a, якщо $a \neq 0$.

Нульовий степінь відмінного від нуля числа $\boldsymbol{a}$ дорівнює одиниці, тобто $\boldsymbol{a}^0 = 1$, де $\boldsymbol{a} \neq 0$.

Повернімося до рядка зі степенями числа 3, де ліворуч від числа $3^0 = 1$ записано число 3^{-1}. Це число втричі менше від 1, тобто дорівнює $\frac{1}{3}$. Отже, $3^{-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$. Міркуючи аналогічно, матимемо: $3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$; $3^{-3} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$ і т. д.

Отже, маємо означення степеня із цілим від'ємним показником.

Якщо $\boldsymbol{a} \neq 0$ і $\boldsymbol{n}$ – натуральне число, то $\boldsymbol{a}^{-n} = \dfrac{1}{\boldsymbol{a}^n}$.

Приклад 1. Замінити степінь дробом:

1) 5^{-7}; 2) x^{-1}; 3) $(a + b)^{-9}$.

Розв'язання. За означенням:

1) $5^{-7} = \frac{1}{5^7}$; 2) $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$; 3) $(a + b)^{-9} = \frac{1}{(a + b)^9}$.

Приклад 2. Замінити дріб степенем:

1) $\frac{1}{a^2}$; 2) $\frac{1}{m - n}$; 3) $\frac{1}{7^{13}}$.

Розв'язання. 1) $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$; 2) $\frac{1}{m - n} = (m - n)^{-1}$; 3) $\frac{1}{7^{13}} = 7^{-13}$.

2. Обчислення значень виразів, що містять степінь із цілим показником

Приклад 3. Обчислити: 1) 4^{-2}; 2) $(-9)^0$; 3) $(-5)^{-3}$.

Розв'язання. 1) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$; 2) $(-9)^0 = 1$;

3) $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$.

Розглянемо, як піднести дріб $\frac{a}{b}$ до цілого від'ємного степеня. Якщо n – натуральне число і $a \neq 0$, маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^{n} = 1 : \frac{a^n}{b^n} = 1 \cdot \frac{b^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}.$$

Отже,

якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, n – натуральне число, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

Приклад 4. Обчислити: 1) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 2) $27 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-4}$; 3) $(1{,}6)^{-2}$.

Розв'язання. 1) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{7}\right)^{2} = \frac{9}{49}$.

2) Враховуючи послідовність виконання арифметичних дій, спочатку піднесемо дріб до степеня, а потім виконаємо множення:

$$27 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-4} = 27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{27 \cdot 16}{81} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

3) Запишемо десятковий дріб 1,6 у вигляді неправильного дробу та виконаємо піднесення до степеня за формулою:

$$(1,6)^{-2} = \left(1\frac{6}{10}\right)^{-2} = \left(1\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{8}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{8}\right)^{2} = \frac{25}{64}.$$

Відповідь: 1) $\frac{9}{49}$; 2) $5\frac{1}{3}$; 3) $\frac{25}{64}$.

3. Спрощення виразів, що містять степені із цілим показником

Розглянемо спрощення виразів зі степенями із цілим показником.

Приклад 5. Подати вираз $(a^{-3} - b^{-3}) : (a^{-1} - b^{-1})$ у вигляді дробу.

Розв'язання. Маємо: $(a^{-3} - b^{-3}) : (a^{-1} - b^{-1}) = \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) =$

$$= \frac{b^3 - a^3}{a^3b^3} : \frac{b-a}{ab} = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2) \cdot ab}{a^3b^3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2b^2}.$$

Відповідь: $\frac{b^2 + ab + a^2}{a^2b^2}$.

Якого значення набуває вираз a^0, якщо $a \neq 0$? Сформулюйте означення степеня із цілим від'ємним показником. Доведіть тотожність $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

9.1. (*Усно.*) Чи правильна рівність:

1) $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$; 2) $4^0 = 0$;

3) $19^{-5} = -\frac{1}{19^5}$; 4) $(-4)^0 = 1$?

9.2. Замініть дробом степінь із цілим від'ємним показником:

1) 4^{-5}; 2) a^{-1}; 3) p^{-10};

4) c^{-8}; 5) $(2a)^{-3}$; 6) $(a + b)^{-4}$.

9.3. Запишіть у вигляді дробу степінь із цілим від'ємним показником:

1) b^{-3}; 2) 7^{-1}; 3) 2^{-7};

4) t^{-6}; 5) $(3m)^{-2}$; 6) $(c - d)^{-7}$.

9.4. Запишіть дріб у вигляді степеня:

1) $\frac{1}{9^4}$; 2) $\frac{1}{p^5}$; 3) $\frac{1}{10^9}$;

4) $\frac{1}{m}$; 5) $\frac{1}{(ab)^4}$; 6) $\frac{1}{(m-n)^4}$.

9.5. Замініть степенем із цілим від'ємним показником дріб:

1) $\frac{1}{c^3}$; 2) $\frac{1}{19^7}$; 3) $\frac{1}{t^5}$;

4) $\frac{1}{b}$; 5) $\frac{1}{(cm)^6}$; 6) $\frac{1}{(a+x)^2}$.

2

9.6. Обчисліть:

1) 7^{-2}; 2) $(-2)^{-2}$; 3) $(-1)^{-5}$; 4) 12^{-1};

5) $(-7)^{-1}$; 6) 10^{-3}; 7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 8) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$;

9) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$; 10) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-5}$; 11) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 12) $\left(-2\frac{1}{5}\right)^{-1}$;

13) $0{,}1^{-1}$; 14) $(-0{,}2)^{-2}$; 15) $(1{,}2)^{-2}$; 16) $(-0{,}25)^{-3}$.

9.7. Обчисліть:

1) 2^{-3}; 2) $(-1)^{-6}$; 3) 15^{-1}; 4) $(-9)^{-1}$;

5) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$; 6) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$; 7) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 8) $\left(-3\frac{1}{7}\right)^{-1}$;

9) $0{,}2^{-1}$; 10) $(-0{,}1)^{-2}$; 11) $(1{,}5)^{-2}$; 12) $(-0{,}5)^{-4}$.

9.8. Подайте числа 16; 8; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$ у вигляді степеня з основою 2.

9.9. Подайте у вигляді степеня з основою 10 числа 100; 10; 1; 0,1; 0,01.

9.10. Знайдіть значення виразу:

1) -5^{-2}; 2) $(-0{,}8)^{-2}$; 3) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 4) $-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$.

9.11. Обчисліть:

1) -2^{-3}; 2) $(-0{,}4)^{-2}$; 3) $-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 4) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

9.12. Подайте вираз у вигляді дробу, що не містить степеня з від'ємним показником:
1) $2a^{-3}$; 2) $3mb^{-1}$; 3) $a^2b^{-3}c$; 4) $a^{-3}b^{-7}$.

9.13. Подайте вираз у вигляді дробу, що не містить степеня з від'ємним показником:
1) $4b^{-5}$; 2) $7a^{-1}p$; 3) $mn^{-2}p^7$; 4) $c^{-2}b^{-5}$.

3

9.14. Обчисліть:

1) $81 \cdot 3^{-5}$; 2) $-25 \cdot 10^{-2}$; 3) $27 \cdot (-18)^{-1}$;

4) $2\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$; 5) $-8 \cdot 2^{-4} + 3^0$; 6) $8^{-2} + 6^{-1}$;

7) $2{,}5^{-1} + (-13)^0$; 8) $4^{-3} - (-4)^{-2}$; 9) $(-8)^{-2} + (0{,}4)^{-1}$;

10) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2} \cdot 10^{-3}$; 11) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} : \left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 12) $1{,}25^{-2} + 2{,}5^{-3}$.

9.15. Знайдіть значення виразу:

1) $-64 \cdot 4^{-4}$; 2) $36 \cdot (-27)^{-1}$; 3) $-7 \cdot 0{,}1^{-2} + 5^0$;

4) $-3\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{-1}$; 5) $5^{-2} - 10^{-1}$; 6) $3{,}2^{-1} + \left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

7) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot 20^{-2}$; 8) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; 9) $1{,}5^{-2} - 1{,}2^{-3}$.

9.16. Обчисліть значення виразу $100(3^{-1} + 9^{-2} - 5^2 \cdot 3^{-4})^{-1}$ та дізнаєтеся, якою була довжина (у м) прапора України, який розгорнули в Дарницькому районі міста Києва до дня Державного прапора України.

9.17. Порівняйте з нулем вираз:
1) 8^{-13}; 2) $(-3{,}7)^{-10}$; 3) $(-2{,}9)^{-11}$; 4) $-(-2{,}1)^{-7}$.

9.18. Порівняйте з нулем значення виразу a^n, якщо:
1) $a > 0$ і n – ціле число;
2) $a < 0$ і n – парне від'ємне число;
3) $a < 0$ і n – непарне від'ємне число.

9.19. Порівняйте з нулем значення виразу b^m, якщо:
1) $b = 5$, $m = -13$; 2) $b = -1$, $m = -200$; 3) $b = -3$, $m = -41$.

9.20. Перетворіть вираз так, щоб він не містив степенів з від'ємним показником:

1) $\dfrac{m^2n^2p^{-3}}{cx^3a^{-4}}$; 2) $\dfrac{7^0a^{-1}b^2}{5^{-2}x^{-3}m^{-1}}$.

9.21. Використовуючи від'ємний показник степеня, подайте у вигляді добутку дріб:

1) $\dfrac{3x^2}{p}$; 2) $\dfrac{15m}{n^2c^3}$; 3) $\dfrac{2x}{b^5(a-b)^2}$; 4) $\dfrac{(x+y)^7}{(x-y)^3}$.

9.22. Подайте у вигляді добутку, використовуючи степінь з від'ємним показником, дріб:

1) $\dfrac{5m^2}{x}$; 2) $\dfrac{7c^2}{y^7n^5}$; 3) $\dfrac{p}{c^4(x-y)^3}$; 4) $\dfrac{(a+2)^5}{(a-5)^2}$.

9.23. Подайте вираз у вигляді дробу:
1) $m^{-3} + n^{-2}$; 2) $ab^{-1} + ba^{-1} + c^0$;
3) $(m + n^{-1})(m^{-1} + n)$; 4) $(a^{-1} + b^{-1}) : (a^{-2} - b^{-2})$.

9.24. Подайте вираз у вигляді дробу:
1) $xy^{-3} + x^{-1}y^2$; 2) $(x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} - y^{-1})$.

4 **9.25.** Обчисліть: 1) $(1 + (1 - 5^{-2})^{-1})^{-1}$; 2) $(1 - (1 + 3^{-1})^{-2})^{-2}$.

9.26. Знайдіть значення виразу $(1 + (1 - 3^{-1})^{-1})^{-1} + (1 - (1 + 3^{-1})^{-1})^{-1}$.

9.27. Спростіть вираз $(1 - x^{-2})\left(1 - \dfrac{1}{x^{-1} - 1} + \dfrac{1}{x^{-1} + 1}\right)$.

Вправи для повторення

9.28. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\dfrac{a^2 + 2a}{a^2 - 4a + 4} - \dfrac{4a}{a^2 - 4a + 4}$; 2) $\dfrac{3p}{p^2 - 2p} - \dfrac{8 - p}{p^2 - 2p}$.

9.29. Сергій сказав Олексію: «Дай мені 2 гривні, і тоді грошей у нас стане порівну». Олексій відповів Сергію: «Краще ти дай мені 2 гривні, і тоді грошей у мене стане вдвічі більше, ніж у тебе». Скільки грошей у кожного?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

9.30. Подайте у вигляді степеня:
1) a^5a^3; 2) $b^7 : b^3$; 3) $(c^5)^4$;
4) m^7m; 5) $t^{10} : t$; 6) $(p^7)^2$.

9.31. Піднесіть до степеня одночлен:
1) $(mn^2)^7$; 2) $(-2p^3)^2$; 3) $(-5cm^2)^3$; 4) $(-a^2c^3)^{10}$.

9.32. Спростіть вираз: 1) $(5m^2n)^3 \cdot (0{,}2m^3n)^2$; 2) $(-0{,}1p^7c^3)^4 \cdot (10pc^2)^3$.

Життєва математика

9.33. Рейтингова агенція визначає рейтинг співвідношення «ціна–якість» для мікрохвильових печей за такими параметрами: середня ціна P та показники функціональності F, якості Q і дизайну D, – кожний з яких експерти оцінюють від 0 до 4 балів. Підсумовують рейтинг за формулою $R = 8(F + Q) + 4D - 0{,}01P$.
За даними таблиці, у якій зазначено всі вищезгадані параметри, визначте, яка з моделей мікрохвильових печей А, Б, В, Г має найнижчий рейтинг і яка – найвищий.

Модель печі	Середня ціна, грн	Функціональність	Якість	Дизайн
А	3200	2	3	2
Б	3600	3	2	4
В	3800	4	3	1
Г	4200	4	2	3

Цікаві задачі – поміркуй одначе

9.34. (*Задача Стенфордського університету.*) Серед дідусевих паперів було знайдено рахунок із записом:

72 індики – *67,9* долара.

Першу й останню цифри вартості індиків замінили «зірочками», оскільки вони стерлися і стали нерозбірливими. Що це за цифри і скільки коштував один індик?

§ 10. Властивості степеня із цілим показником

1. Властивості степеня із цілим показником

Відомі нам властивості степеня з натуральним показником справджуються і для степеня з основою, відмінною від нуля, та цілим від'ємним показником. Отже,

для будь-якого $a \neq 0$, $b \neq 0$ і будь-яких цілих m і n:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Ці властивості можна довести, спираючись на формулу $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ та властивості степеня з натуральним показником.

Доведемо, наприклад, формулу $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ для випадку, коли m і n – від'ємні цілі числа.

Нехай $m = -p$, $n = -q$, де p і q – натуральні числа. Маємо:

$$a^m \cdot a^n = a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p \cdot a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} =$$

$$= a^{-p+(-q)} = a^{m+n}.$$

Отже, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, якщо m і n – від'ємні цілі числа. ■

Якщо один з показників m або n – від'ємне ціле число, а другий – натуральне або нуль, формулу доводять аналогічно.

2. Застосування властивостей степеня із цілим показником до перетворень виразів

Приклад 1. Виконати дію:

1) a^2a^{-7}; 2) $b^{15} : b^{20}$; 3) $(x^{-3})^2 \cdot x^{-14}$.

Розв'язання.

1) $a^2a^{-7} = a^{2+(-7)} = a^{-5}$;

2) $b^{15} : b^{20} = b^{15-20} = b^{-5}$;

3) $(x^{-3})^2 \cdot x^{-14} = x^{-3\cdot 2} \cdot x^{-14} = x^{-6} \cdot x^{-14} = x^{-6+(-14)} = x^{-20}$.

Приклад 2. Подати степінь у вигляді добутку $(4a^5b^{-6})^{-2}$.

Розв'язання. $(4a^5b^{-6})^{-2} = 4^{-2}(a^5)^{-2}(b^{-6})^{-2} = \frac{1}{16}a^{-10}b^{12}$.

Відповідь: $\frac{1}{16}a^{-10}b^{12}$.

Приклад 3. Спростити вираз $\frac{1}{2}x^{-3}y^5 \cdot (-4xy^{-5})$.

Розв'язання. $\frac{1}{2}x^{-3}y^5 \cdot (-4xy^{-5}) = \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot x^{-3}x \cdot y^5y^{-5} = -2x^{-3+1}y^{5+(-5)} =$

$= -2x^{-2}y^0 = -\frac{2}{x^2}$.

Відповідь: $-\frac{2}{x^2}$.

Приклад 4. Подати у вигляді виразу, що не містить степенів з від'ємним показником, вираз $\left(\frac{x^{-2}y}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{x^{-3}y^2}\right)^{-2}$.

Розв'язання. $\left(\frac{x^{-2}y}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{x^{-3}y^2}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{x^{-2}y}\right)^{3} \cdot \left(\frac{x^{-3}y^2}{9}\right)^{2} = \frac{3^3 \cdot x^{-6}y^4}{x^{-6}y^3 \cdot 9^2} =$

$= \frac{27}{81}x^{-6+6}y^{4-3} = \frac{1}{3}y$.

Відповідь: $\frac{1}{3}y$.

3. Застосування властивостей степеня із цілим показником до обчислень значень виразів

Приклад 5. Обчислити $\dfrac{9^4 \cdot 3^{-22}}{27^{-5}}$.

Розв'язання. Подамо 9 та 27 у вигляді степеня з основою 3 та використаємо властивості степеня:

$$\frac{9^4 \cdot 3^{-22}}{27^{-5}} = \frac{(3^2)^4 \cdot 3^{-22}}{(3^3)^{-5}} = \frac{3^8 \cdot 3^{-22}}{3^{-15}} = \frac{3^{-14}}{3^{-15}} = 3^{-14-(-15)} = 3^1 = 3.$$

Відповідь: 3.

Приклад 6. Обчислити значення виразу $\dfrac{2^{3n-2} \cdot 3^{n+1}}{24^n}$, де n – ціле число.

Розв'язання. $\dfrac{2^{3n-2} \cdot 3^{n+1}}{24^n} = \dfrac{2^{3n} \cdot 2^{-2} \cdot 3^n \cdot 3^1}{(2^3 \cdot 3)^n} = \dfrac{1}{2^2} \cdot 3 \cdot \dfrac{2^{3n} \cdot 3^n}{2^{3n} \cdot 3^n} = \dfrac{3}{4} = 0,75.$

Відповідь: 0,75.

Сформулюйте властивості степеня із цілим показником.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

10.1. (*Усно.*) Які з рівностей є тотожностями:
1) $m^3 \cdot m^{-7} = m^{-21}$; 2) $a^7 \cdot a^{-9} = a^{-2}$; 3) $a^5 \cdot a^{-5} = a$;
4) $c^8 : c^{-5} = c^{13}$; 5) $c^4 : c^5 = c$; 6) $m : m^8 = m^{-7}$;
7) $(a^7)^{-1} = a^{-7}$; 8) $(b^{-2})^{-3} = b^{-6}$; 9) $(t^5)^{-2} = t^{10}$?

10.2. Подайте у вигляді степеня добуток:
1) a^5a^{-2}; 2) $a^{-7}a^6$; 3) a^9a^{-9}; 4) $a^{-4}a^{-3}$.

10.3. Подайте у вигляді степеня добуток:
1) b^7b^{-3}; 2) $b^{-6}b^3$; 3) $b^{-5}b^{-7}$; 4) $b^{-8}b^8$.

10.4. Подайте у вигляді степеня частку:
1) $m^3 : m^{-2}$; 2) $m^5 : m^6$; 3) $m^{-3} : m^{-3}$; 4) $m^{-1} : m^{-8}$.

10.5. Подайте у вигляді степеня частку:
1) $c^5 : c^{-1}$; 2) $c^2 : c^8$; 3) $c^{-2} : c^{-3}$; 4) $c^{-4} : c^{-4}$.

10.6. Піднесіть степінь до степеня:
1) $(x^{-4})^{-2}$; 2) $(x^{-1})^{17}$; 3) $(x^0)^{-5}$; 4) $(x^7)^{-4}$.

10.7. Піднесіть степінь до степеня:
1) $(n^{-2})^{-7}$; 2) $(n^{15})^{-1}$; 3) $(n^{-8})^0$; 4) $(n^5)^{-3}$.

2

10.8. Подайте a^{-10} у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами, якщо один з множників дорівнює:
1) a^{-3}; 2) a^7; 3) a^{-1}; 4) a^{12}.

10.9. Подайте у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами степінь:
1) m^8; 2) m^{-2}; 3) m^{-17}; 4) m^0.

10.10. Обчисліть:

1) $2^7 \cdot 2^{-6}$; 2) $5^{-3} \cdot 5$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$; 5) $3^8 : 3^9$; 6) $7^{-15} : 7^{-16}$;

7) $9 : 9^{-1}$; 8) $\left(\frac{1}{15}\right)^{-15} : \left(\frac{1}{15}\right)^{-15}$; 9) $(2^{-2})^3$;

10) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{-2}$; 11) $(0{,}1^{-1})^4$; 12) $\left(\left(\frac{1}{19}\right)^{-8}\right)^0$.

10.11. Знайдіть значення виразу:

1) $3^9 \cdot 3^{-8}$; 2) $2^{-3} \cdot 2$; 3) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^5$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7$; 5) $10^4 : 10^5$; 6) $8^{-12} : 8^{-13}$;

7) $7 : 7^{-1}$; 8) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-7} : \left(\frac{2}{7}\right)^{-7}$; 9) $(3^{-1})^4$;

10) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}$; 11) $(0{,}2^3)^{-1}$; 12) $\left(\left(\frac{7}{13}\right)^0\right)^{-12}$.

10.12. Подайте у вигляді степеня з основою a вираз:

1) $a^7 : a^3 \cdot a^{-12}$; 2) $(a^5)^{-3} \cdot a^{12}$;
3) $(a^{-8})^3 : a^4$; 4) $a^0 \cdot (a^{-3})^4 \cdot a^5$;
5) $a^{-3} \cdot a^0 : a^5 : a$; 6) $(a^3)^{-2} \cdot (a^{-1})^{-6}$.

10.13. Подайте у вигляді степеня з основою b вираз:

1) $b^3 : b^7 \cdot b^2$; 2) $(b^{-2})^4 \cdot b^{10}$;
3) $(b^3)^{-2} : b^3$; 4) $b^7 \cdot (b^{-2})^3 \cdot b^0$;
5) $b^0 \cdot b^{-4} : b^3 : b$; 6) $(b^{-4})^{-1} \cdot (b^2)^{-2}$.

10.14. Спростіть вираз:

1) $4a^{-8}b^7 \cdot 5a^{10}b^{-3}$; 2) $10m^{-6}n^4 \cdot 0{,}4m^6n^{-9}$;

3) $\frac{1}{3}x^{-4}y^6 \cdot (-9x^5y^{-3})$; 4) $\left(-\frac{2}{7}b^{-6}m^{-4}\right)\left(-1\frac{1}{6}b^{-4}m^{-2}\right)$.

10.15. Спростіть вираз:

1) $10m^3n^{-2} \cdot 2m^{-5}n^4$; 2) $0{,}02a^{-8}b^3 \cdot 100a^8b^{-7}$;

3) $-\frac{1}{8}x^{-3}y^7 \cdot 16x^4y^{-10}$; 4) $\left(-1\frac{1}{4}p^{-3}c^{-5}\right)\left(-\frac{2}{5}p^{-2}c^{-3}\right)$.

10.16. Подайте у вигляді добутку степінь:

1) $(xy)^{-2}$; 2) $(ab^{-2})^{-3}$; 3) $(x^{-4}y^{3})^{-1}$; 4) $(m^{0}c^{-3})^{-2}$;

5) $(0{,}1a^{-2})^{-1}$; 6) $\left(\frac{1}{3}m^{-3}p\right)^{-2}$; 7) $(-2c^{-3}p)^{-3}$; 8) $\left(\frac{2}{3}b^{-1}c^{-8}\right)^{-1}$.

10.17. Подайте у вигляді добутку степінь:

1) $(p^{-2}n)^{-5}$; 2) $(a^{-2}b^{3})^{-4}$; 3) $(0{,}2m^{-4})^{-1}$;

4) $\left(\frac{1}{5}a^{-2}b\right)^{-2}$; 5) $(-4ab^{-2})^{-3}$; 6) $\left(\frac{3}{4}c^{-2}b^{-3}\right)^{-1}$.

3

10.18. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $64m^{-3}$; 2) $0{,}01p^{-8}$; 3) $0{,}0025c^{-8}p^{12}$; 4) $5\frac{1}{16}c^{12}x^{-20}$.

10.19. Обчисліть:

1) $((5^{-2})^{-6}\cdot(5^{-8})^{2})^{-1}$; 2) $\frac{10^{-8}\cdot(10^{-2})^{4}}{(10^{-5})^{3}}$;

3) $\frac{(3^{-2})^{3}\cdot(3^{-1})^{5}}{(3^{6})^{-2}}$; 4) $\frac{(7^{-2})^{-5}\cdot(7^{4})^{-3}}{(7^{3})^{-4}\cdot(7^{-1})^{-8}}$.

10.20. Знайдіть значення виразу:

1) $((4^{-4})^{-2}\cdot(4^{-5})^{2})^{-1}$; 2) $\frac{2^{-8}\cdot(2^{-2})^{5}}{(2^{-4})^{6}\cdot(2^{2})^{4}}$.

10.21. Знайдіть значення виразу:

1) $243\cdot3^{-6}$; 2) $64\cdot(2^{-3})^{3}$; 3) $5^{-8}\cdot25^{5}:125$;

4) $49^{-1}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{-4}$; 5) $\frac{36^{-3}\cdot6^{-8}}{(-6)^{-13}}$; 6) $\frac{8^{-3}\cdot2^{-10}}{16^{-5}}$.

10.22. Обчисліть:

1) $128\cdot2^{-5}$; 2) $81\cdot(3^{-2})^{3}$; 3) $7^{-8}\cdot343^{3}:49$;

4) $36^{-2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{-6}$; 5) $\frac{100^{-2}\cdot10^{-7}}{1000^{-3}}$; 6) $\frac{5^{-3}\cdot25^{8}}{125^{5}}$.

10.23. Знайдіть значення виразу $\frac{6^{-8}\cdot2^{-13}}{36^{-5}\cdot4^{-7}}$ та дізнаєтеся, якої висоти (у м) був флагшток у м. Дніпро, де було піднято стяг України розмірами 12 × 18 м і масою 23 кг.

10.24. Спростіть вираз:

1) $3{,}5a^{3}b^{7}:(0{,}5a^{-2}b^{9})$; 2) $3\frac{1}{2}x^{-12}y^{-1}:\left(-1\frac{3}{4}x^{6}y^{-4}\right)$.

10.25. Спростіть вираз:

1) $\frac{13a}{b^{-5}}\cdot\frac{b^{-8}}{26a^{-2}}$; 2) $-\frac{12a^{-3}}{35x}\cdot\frac{7x^{-7}}{6a^{-8}}$.

10.26. Спростіть вираз:

1) $4,9m^3n^{-4} : (0,7mn^{-2})$;

2) $\frac{7c^{-3}}{x^5} \cdot \left(-\frac{x^7}{21c^{-1}}\right)$.

10.27. Подайте у вигляді виразу, що не містить степеня з від'ємним показником:

1) $\left(\frac{p^{-8}c^{12}}{m^{-4}t^{15}}\right)^{-2}$;

2) $\left(\frac{b^{-3}}{c^5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{b^{-2}}{c^{-4}}\right)^3$;

3) $\left(\frac{7x^{-2}}{3y^{-4}}\right)^{-2} \cdot 49x^{-4}y^3$;

4) $\left(\frac{a^{-3}b}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{a^{-2}b^2}\right)^{-3}$.

10.28. Подайте у вигляді виразу, що не містить степеня з від'ємним показником:

1) $\left(\frac{c^{-7}a^2}{b^{-2}x}\right)^{-3}$;

2) $\left(\frac{x^{-4}}{y^2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{x^{-3}}{y^{-3}}\right)^2$;

3) $\left(\frac{5a^{-2}}{2b^{-3}}\right)^{-2} \cdot 25a^{-4}b^2$;

4) $\left(\frac{m^{-2}n^3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{8}{m^{-3}n^4}\right)^{-2}$.

4

10.29. Спростіть вираз (n – ціле число):

1) $\frac{25^n}{5^{2n-3}}$;

2) $\frac{12^n}{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}$;

3) $\frac{a^{4n}b^{2n-1}}{a^{2n}b^{3+2n}}$.

10.30. Спростіть вираз (m – ціле число):

1) $\frac{49^m}{7^{2m-2}}$;

2) $\frac{18^m}{2^{m+2} \cdot 3^{2m-1}}$;

3) $\frac{x^{9m}y^{3m-2}}{x^{3m}y^{4+3m}}$.

10.31. Скоротіть дріб:

1) $\frac{5^{n+2} - 5^n}{12}$ (n – ціле число);

2) $\frac{x^7 + x^{10}}{x^{-1} + x^2}$;

3) $\frac{m^{-3} + 5 - m^7}{5m^2 - m^9 + m^{-1}}$.

10.32. Скоротіть дріб:

1) $\frac{18}{4^{n+1} - 4^n}$ (n – ціле число);

2) $\frac{x^9 + x^5}{x^{-3} + x}$;

3) $\frac{b^{-5} + 3 - b^2}{3b^3 - b^5 + b^{-2}}$.

10.33. Доведіть, що для будь-яких цілих значень m і n вираз набуває одного й того самого значення:

1) $\frac{2^m \cdot 3^{n-1} - 2^{m-1} \cdot 3^n}{2^m \cdot 3^n}$;

2) $\frac{7^{2m} \cdot 4^n}{49^{m+1} \cdot 2^{2n-1} - 49^{m-1} \cdot 2^{2n+1}}$.

Вправи для повторення

10.34. Відомо, що 3 кг огірків і 2 кг помідорів разом коштували 136 грн. Після того як огірки подешевшали на 20 %, а помідори подорожчали на 10 %, за 2 кг огірків і 3 кг помідорів заплатили 144 грн. Знайдіть початкову ціну кілограма огірків і кілограма помідорів.

10.35. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 8.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

10.36. Виконайте дії:
1) $2{,}7 \cdot 10^3$; 2) $1{,}32 \cdot 10^5$; 3) $4{,}7 \cdot 10^{-3}$; 4) $3{,}42 \cdot 10^{-4}$.

Життєва математика

10.37. У магазині спортивного одягу проходить акція: за умови купівлі товару на суму понад 5000 грн надається знижка в розмірі 10 % на наступну покупку. Юля хоче придбати велокуртку вартістю 4500 грн, велочеревики вартістю 1200 грн і светр вартістю 800 грн. Як вона має здійснити покупку, щоб заплатити найменше? Скільки у такому разі вона заплатить і скільки заощадить?

Цікаві задачі — поміркуй одначе

10.38. (*Олімпіада Нью-Йорка, 1977 р.*) Розв'яжіть рівняння $2^x + 1 = y^2$ в натуральних числах[1].

§ 11. Стандартний вигляд числа

1. Поняття про стандартний вигляд числа

У фізиці, хімії, астрономії, техніці часто мають справу і з дуже великими, і з дуже малими значеннями величин. Наприклад, маса Землі дорівнює 5 976 000 000 000 000 000 000 000 кг, а діаметр молекули водню – 0,00000000025 м.

Читати та записувати такі числа у вигляді десяткових дробів незручно, як і використовувати такий запис під час обчислень. Тому такі числа доцільно записувати у вигляді $a \cdot 10^n$, де n – ціле число, $1 \leqslant a < 10$. Наприклад,

$5\,976\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ кг $= 5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг;

$0{,}00000000025$ м $= 2{,}5 \cdot 10^{-10}$ м.

Кажуть, що числа 5 976 000 000 000 000 000 000 000 і 0,00000000025 записано у ***стандартному вигляді***.

Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$, n – ціле число.

Якщо число записано у стандартному вигляді, то показник степеня n називають ***порядком числа***. Наприклад, порядок числа, яким записано масу Землі в кілограмах, дорівнює 24, а порядок числа, яким записано діаметр молекули водню в метрах, дорівнює -10.

[1] Розв'язати в натуральних числах означає знайти ті розв'язки, що є натуральними числами.

У стандартному вигляді можна записати будь-яке додатне число. Порядок числа дає уявлення про це число.

Наприклад, якщо порядок числа x дорівнює 4, то це означає, що $1 \cdot 10^4 \leqslant x < 10 \cdot 10^4$, тобто $10\,000 \leqslant x < 100\,000$. Якщо порядок числа y дорівнює -2, то $1 \cdot 10^{-2} \leqslant y < 10 \cdot 10^{-2}$, тобто $0{,}01 \leqslant y < 0{,}1$.

Великий додатний порядок числа показує, що число дуже велике. Великий за модулем від'ємний порядок числа показує, що число дуже мале. Отже, якщо кажуть, *що одне число на порядок більше за інше*, то це означає, що воно в 10 разів більше за інше; відповідно, якщо на два порядки – у 100 разів більше і т. д.

Приклад 1. Подати число 272 000 у стандартному вигляді.

Розв'язання. У цьому числі поставимо кому так, щоб у цілій частині була одна цифра, відмінна від нуля. У результаті матимемо 2,72. Комою відокремили 5 цифр праворуч, чим зменшили це число у 10^5 разів. Отже, $272\,000 = 2{,}72 \cdot 10^5$.

Відповідь: $2{,}72 \cdot 10^5$.

Приклад 2. Подати число 0,00013 у стандартному вигляді.

Розв'язання. У цьому числі перенесемо кому на 4 знаки праворуч, матимемо 1,3. Водночас число збільшили в 10^4 разів (на 4 порядки). Отже, $0{,}00013 = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$.

Відповідь: $1{,}3 \cdot 10^{-4}$.

2. Дії із числами, записаними у стандартному вигляді

Приклад 3. Виконати дію і подати результат у стандартному вигляді:

1) $(5{,}7 \cdot 10^8) \cdot (3{,}6 \cdot 10^{-2})$; 2) $(2{,}1 \cdot 10^7) : (4{,}2 \cdot 10^{-3})$.

Розв'язання. 1) $(5{,}7 \cdot 10^8) \cdot (3{,}6 \cdot 10^{-2}) = (5{,}7 \cdot 3{,}6) \cdot (10^8 \cdot 10^{-2}) =$
$= 20{,}52 \cdot 10^6 = 2{,}052 \cdot 10^1 \cdot 10^6 = 2{,}052 \cdot 10^7$;

2) $(2{,}1 \cdot 10^7) : (4{,}2 \cdot 10^{-3}) = \dfrac{2{,}1 \cdot 10^7}{4{,}2 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{2{,}1}{4{,}2} \cdot \dfrac{10^7}{10^{-3}} = 0{,}5 \cdot 10^{10} =$
$= 5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^9$.

Відповідь: 1) $2{,}052 \cdot 10^7$; 2) $5 \cdot 10^9$.

Приклад 4. Знайти різницю $4{,}7 \cdot 10^{-3} - 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ та записати результат у стандартному вигляді.

Розв'язання. Маємо зменшуване і від'ємник одного порядку.
$4{,}7 \cdot 10^{-3} - 3{,}2 \cdot 10^{-3} = 10^{-3}(4{,}7 - 3{,}2) = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Відповідь: $1{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Приклад 5. Знайти суму $2{,}3 \cdot 10^4 + 3{,}7 \cdot 10^3$ та записати результат у стандартному вигляді.

Розв'язання. Маємо два доданки різних порядків.
$2{,}3 \cdot 10^4 + 3{,}7 \cdot 10^3 = 2{,}3 \cdot 10^4 + 3{,}7 \cdot 10^4 \cdot 10^{-1} = 10^4(2{,}3 + 3{,}7 \cdot 10^{-1}) =$
$= (2{,}3 + 0{,}37) \cdot 10^4 = 2{,}67 \cdot 10^4$.

Відповідь: $2{,}67 \cdot 10^4$.

? Який запис числа називають його стандартним виглядом?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

11.1. (*Усно.*) Чи записано число у стандартному вигляді:

1) $0{,}42$; 2) $2{,}9 \cdot 10^0$; 3) $3{,}7 \cdot 10^{-8}$; 4) $0{,}05 \cdot 10^{-12}$;
5) $19{,}2 \cdot 10^2$; 6) $1{,}92 \cdot 10^{-29}$; 7) $1{,}92 \cdot 8^{-29}$; 8) $1{,}001 \cdot 10^7$?

11.2. Які із чисел подано у стандартному вигляді:

1) $3{,}0017 \cdot 10^0$; 2) $4{,}2 \cdot 10^{-5}$; 3) $0{,}03$; 4) 117;
5) $10{,}5 \cdot 10^7$; 6) $1{,}115 \cdot 1017$; 7) $2{,}7 \cdot 10^{-3}$; 8) $2{,}7 \cdot 5^{-3}$?

11.3. (*Усно.*) Назвіть порядок числа, поданого у стандартному вигляді:

1) $1{,}7 \cdot 10^5$; 2) $2{,}001 \cdot 10^{-17}$; 3) $4{,}5 \cdot 10^1$; 4) $3{,}7$.

11.4. Яким є порядок числа, поданого у стандартному вигляді:

1) $2{,}7 \cdot 10^{-5}$; 2) $3{,}8 \cdot 10^{12}$; 3) $2{,}45 \cdot 10^0$; 4) $4{,}11 \cdot 10^{-1}$?

2

11.5. Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 200 000; 2) 5800; 3) 20 500; 4) 739;
5) 107,5; 6) 37,04; 7) 2700,5; 8) 300,8;
9) 0,37; 10) 0,0029; 11) 0,000007; 12) 0,010203.

11.6. Подайте у стандартному вигляді число:

1) 50 000; 2) 470 000; 3) 5 030 000; 4) 975;
5) 32,5; 6) 409,1; 7) 12900,5; 8) 87,08;
9) 0,43; 10) 0,00017; 11) 0,00004; 12) 0,90807.

11.7. Розгляньте таблицю, у якій подано кількість населення в деяких містах України на момент останнього перепису населення. Подайте ці числа у стандартному вигляді.

Місто	Область	Чисельність населення, осіб	Місто	Область	Чисельність населення, осіб
Арциз	Одеська	16 370	Енергодар	Запорізька	56 242
Батурин	Чернігівська	3066	Житомир	Житомирська	284 236
Біла Церква	Київська	200 131	Іршава	Закарпатська	9515
Дніпро	Дніпропетровська	1 065 008	Харків	Харківська	1 470 092

11.8. Подайте у стандартному вигляді число:

1) $27 \cdot 10^5$; 2) $427 \cdot 10^{-3}$;
3) $0{,}00027 \cdot 10^5$; 4) $0{,}0037 \cdot 10^{-4}$.

11.9. Запишіть у стандартному вигляді число:

1) $58 \cdot 10^{-8}$; 2) $237{,}2 \cdot 10^7$;
3) $0{,}2 \cdot 10^{-4}$; 4) $0{,}0017 \cdot 10^5$.

11.10. Подайте у вигляді десяткового дробу або цілого числа значення величини:
1) територія України становить $6{,}037 \cdot 10^5$ км^2;
2) діаметр молекули води дорівнює $2{,}8 \cdot 10^{-7}$ мм;
3) населення м. Києва на 1 січня 2015 року становило приблизно $2{,}888 \cdot 10^6$ осіб;
4) маса пташки колібрі дорівнює $1{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг.

11.11. Округліть число до сотень і отриманий результат запишіть у стандартному вигляді:
1) 137 152; 2) 12 311; 3) 2197,2; 4) 1000,135.

11.12. Запишіть у вигляді десяткового дробу або цілого числа:
1) $2{,}735 \cdot 10^4$; 2) $3{,}7 \cdot 10^{-3}$; 3) $3{,}17 \cdot 10^7$; 4) $1{,}2 \cdot 10^{-5}$.

11.13. Виконайте множення та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $(1{,}7 \cdot 10^3) \cdot (3 \cdot 10^{-8})$; 2) $(2{,}5 \cdot 10^{-5}) \cdot (6 \cdot 10^{-2})$.

11.14. Виконайте множення та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $(1{,}2 \cdot 10^{-8}) \cdot (4 \cdot 10^5)$; 2) $(1{,}5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3)$.

11.15. Виконайте ділення та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $(4{,}2 \cdot 10^7) : (2{,}1 \cdot 10^3)$; 2) $(1{,}4 \cdot 10^5) : (2{,}8 \cdot 10^{-2})$.

11.16. Виконайте ділення та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $(7{,}2 \cdot 10^5) : (2{,}4 \cdot 10^2)$; 2) $(1{,}7 \cdot 10^{-3}) : (8{,}5 \cdot 10^{-7})$.

11.17. Порівняйте числа:
1) $1{,}7 \cdot 10^5$ і $2{,}8 \cdot 10^5$; 2) $1{,}3 \cdot 10^{-4}$ і $1{,}29 \cdot 10^{-4}$.

11.18. Порівняйте числа:
1) $2{,}8 \cdot 10^{-3}$ і $3{,}7 \cdot 10^{-3}$; 2) $1{,}42 \cdot 10^5$ і $1{,}5 \cdot 10^5$.

11.19. Виконайте дію та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $2{,}7 \cdot 10^3 + 3{,}2 \cdot 10^3$; 2) $4{,}7 \cdot 10^{-15} - 3{,}2 \cdot 10^{-15}$.

11.20. Виконайте дію та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $4{,}7 \cdot 10^{-8} + 5{,}1 \cdot 10^{-8}$; 2) $2{,}9 \cdot 10^7 - 1{,}8 \cdot 10^7$.

3

11.21. Порівняйте числа:
1) $2{,}9 \cdot 10^8$ і $1{,}8 \cdot 10^9$; 2) $1{,}12 \cdot 10^{-7}$ і $1{,}12 \cdot 10^{-8}$.

11.22. Порівняйте числа:
1) $1{,}7 \cdot 10^5$ і $1{,}7 \cdot 10^4$; 2) $1{,}8 \cdot 10^{-6}$ і $8{,}9 \cdot 10^{-7}$.

11.23. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $2{,}7 \cdot 10^4 + 3{,}2 \cdot 10^5$; 2) $1{,}42 \cdot 10^{-1} - 2{,}8 \cdot 10^{-2}$.

11.24. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $2{,}7 \cdot 10^{-5} + 1{,}7 \cdot 10^{-4}$; 2) $3{,}7 \cdot 10^3 - 2{,}3 \cdot 10^2$.

11.25. Площа Автономної Республіки Крим дорівнює $2{,}61 \cdot 10^4$ км^2, а площа Чернівецької області – $8{,}1 \cdot 10^3$ км^2. Скільки відсотків складає площа Чернівецької області від площі Автономної Республіки Крим? (Відповідь округліть до цілих.)

11.26. Відстань від Землі до найближчої після Сонця зорі α-Центавра дорівнює $4{,}1 \cdot 10^{13}$ км. За який час світло від Землі досягне зорі α-Центавра? (Швидкість світла $3 \cdot 10^5$ км/с.)

11.27. Виразіть:
1) $8{,}3 \cdot 10^6$ т у грамах; 2) $3{,}72 \cdot 10^{-3}$ г у тоннах;
3) $4{,}9 \cdot 10^{-5}$ км у сантиметрах; 4) $4{,}97 \cdot 10^7$ см у метрах.

11.28. Подайте:
1) $3{,}87 \cdot 10^5$ см у кілометрах; 2) $4{,}92 \cdot 10^{-2}$ км у метрах;
3) $3{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг у центнерах; 4) $1{,}8 \cdot 10^9$ т у кілограмах.

11.29. У ставку живуть бактерії, які, перебуваючи в поживному середовищі, діляться навпіл що 3 години. Скільки бактерій утвориться з однієї бактерії через місяць (30 днів)? Відповідь запишіть наближено у стандартному вигляді. Розв'яжіть задачу, використовуючи калькулятор або комп'ютер.

4 **11.30.** Порядок числа a дорівнює –18. Яким є порядок числа:
1) $100a$; 2) $0{,}00001a$; 3) $a \cdot 10^7$; 4) $\frac{a}{10^{-3}}$?

11.31. Порядок числа b дорівнює 15. Яким є порядок числа:
1) $1000b$; 2) $0{,}01b$; 3) $b \cdot 10^{-3}$; 4) $\frac{b}{10^5}$?

Вправи для повторення

11.32. Обчисліть значення виразу:
1) $\frac{2x^4 - 6x^2}{12x^3 - 4x^5}$, якщо $x = -0{,}5$;
2) $\frac{8y^6 - 8y^4}{4y^4 + 4y^3}$, якщо $y = 10$.

11.33. За яких значень a рівняння $\frac{(x + a - 1)(x + 2a - 3)}{x - 5} = 0$ має лише один корінь?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

11.34. Функцію задано формулою $y = \frac{x - 2}{x + 4}$.
1) Знайдіть область визначення функції.
2) Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її, обчисливши відповідні значення функції:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y										

11.35. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = -5x$; 3) $y = -\frac{2}{3}x + 5$;

4) $y = -5$; 5) $y = 4$; 6) $y = 0{,}3x + 2$.

11.36. Чи належить графіку функції $y = x^2 - x$ точка:

1) $A(1;\ 1)$; 2) $B(-1;\ 2)$; 3) $C(0;\ 0)$; 4) $D(5;\ 30)$?

Життєва математика

11.37. 1) У родині Столярчуків пошкодився водопровідний кран. Щосекунди з нього випадає крапля води, а за 24 хв набігає повна склянка. 5 склянок води – це 1 л. Скільки літрів води втрачається із цього крана за добу? За місяць, у якому 30 днів?

2) На скільки діб вистачило б утраченої за місяць води одній людині, якщо на добу потрібно в середньому 100 л води?

3) Що треба зробити, щоб уникнути цих втрат?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

11.38. (*Київська міська олімпіада, 1985 р.*) Знайдіть усі трицифрові числа, які у 12 разів більші за суму своїх цифр.

§ 12. Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік і властивості

1. Поняття про обернену пропорційність

Приклад 1. Пішохід має подолати 16 км. Якщо він ітиме зі швидкістю v км/год, то залежність часу t (у год), за який він подолає цю відстань, від швидкості руху можна подати формулою $t = \frac{16}{v}$. Зі збільшенням значення v у кілька разів значення t у стільки само разів зменшиться. У такому разі кажуть, що змінні t і v ***обернено пропорційні***.

Приклад 2. Площа прямокутника дорівнює 32 см^2, а одна з його сторін a см. Тоді другу сторону b (у см) можна знайти за формулою $b = \frac{32}{a}$. Тут змінні a і b також обернено пропорційні.

У прикладах 1 і 2 змінні t, v, a і b набувають лише додатних значень. Далі розглядатимемо функції, які задають формулою вигляду $y = \frac{k}{x}$, де k – число, $k \neq 0$, де змінні x і y можуть набувати і додатних, і від'ємних значень. Кожну з таких функцій називають ***оберненою пропорційністю***.

Функцію вигляду $y = \frac{k}{x}$, де x – незалежна змінна, k – деяке відмінне від нуля число, називають *оберненою пропорційністю*.

Областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$ є всі числа, окрім нуля, оскільки для $x = 0$ вираз $\frac{k}{x}$ не має змісту.

2. Графік функції $y = \frac{k}{x}$

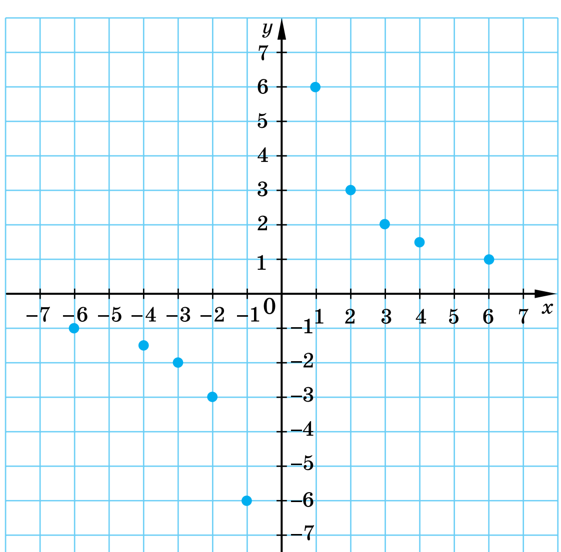
Побудуємо графік функції $y = \frac{k}{x}$ окремо для випадків, якщо $k > 0$ і якщо $k < 0$.

Приклад 3. Побудувати графік функції $y = \frac{6}{x}$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень функції $y = \frac{6}{x}$ для кількох значень аргументу:

x	−6	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	6
y	−1	−1,5	−2	−3	−6	6	3	2	1,5	1

Позначимо на координатній площині точки, координати яких отримали в таблиці (мал. 12.1).

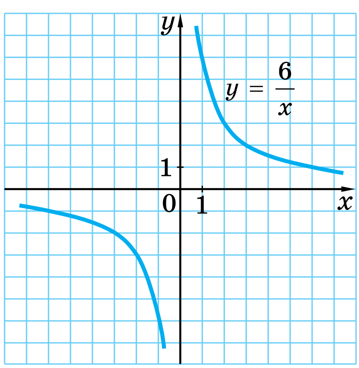


Мал. 12.1

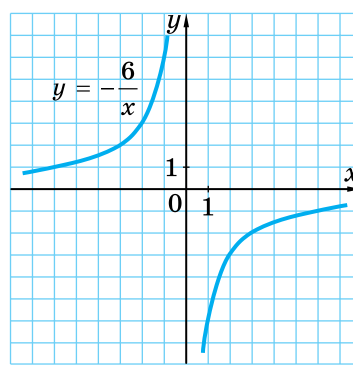
Якби на цій площині позначили більшу кількість точок, координати яких задовольняють формулу $y = \frac{6}{x}$, а потім сполучили їх плавною лінією, то отримали б графік функції $y = \frac{6}{x}$. Графік функції $y = \frac{6}{x}$ зображено на малюнку 12.2.

Графік оберненої пропорційності називають ***гіперболою***. Гіпербола складається з двох *гілок*. У випадку функції $y = \frac{6}{x}$ одна з гілок лежить у першій координатній чверті, а друга – у третій.

Оскільки число 0 не належить області визначення функції $y = \frac{6}{x}$, то на графіку цієї функції не буде точки з абсцисою $x = 0$, а отже гіпербола не буде перетинати вісь ординат, а також немає точки з ординатою $y = 0$, адже рівняння $\frac{6}{x} = 0$ не має коренів.



Мал. 12.2



Мал. 12.3

Що більшим за модулем є значення x, то меншим за модулем є значення y, і навпаки, що меншим за модулем є значення x, то більшим за модулем є значення y. Це означає, що гілки гіперболи необмежено наближаються до осей координат. Такий самий вигляд має графік функції $y = \frac{k}{x}$ для будь-якого $k > 0$.

Приклад 4. Побудувати графік функції $y = -\frac{6}{x}$.

Розв'язання. Міркуючи так само, як у попередньому прикладі, побудуємо графік функції $y = -\frac{6}{x}$. Його зображено на малюнку 12.3.

Це також гіпербола, одна з гілок якої лежить у другій координатній чверті, а друга – у четвертій. Такий самий вигляд має графік функції $y = \frac{k}{x}$ для будь-якого $k < 0$.

Приклад 5. Побудувати графік функції $y = \dfrac{16 - 8x}{x^2 - 2x}$.

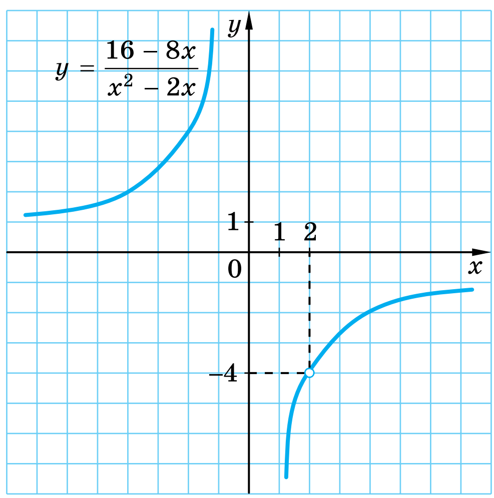
Розв'язання. Областю визначення функції є всі числа, крім 0 і 2, тобто ті, для яких знаменник $x^2 - 2x$ не дорівнює нулю.

Спростимо дріб: $\dfrac{16 - 8x}{x^2 - 2x} = \dfrac{8(2 - x)}{x(x - 2)} = -\dfrac{8(x - 2)}{x(x - 2)} = -\dfrac{8}{x}$.

Тому, за умови $x \neq 0$ і $x \neq 2$, функція має вигляд $y = -\dfrac{8}{x}$.

Отже, графіком функції $y = \dfrac{16 - 8x}{x^2 - 2x}$ є гіпербола $y = -\dfrac{8}{x}$, що не містить точок з абсцисами 0 і 2, тобто з «виколотою» точкою (2; −4), а точок з абсцисою $x = 0$ у гіперболи немає.

Графік функції $y = \dfrac{16 - 8x}{x^2 - 2x}$ зображено на малюнку 12.4.



Мал. 12.4

3. Властивості функції $y = \dfrac{k}{x}$

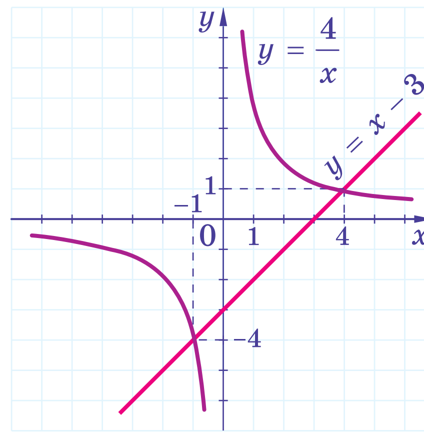
Узагальнимо *властивості оберненої пропорційності* $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x}}$.

1. Область визначення функції складається з усіх чисел, крім числа нуль.
2. Область значень функції складається з усіх чисел, крім числа нуль.
3. Графік функції – гіпербола, гілки якої лежать у першому і третьому координатних кутах, якщо $k > 0$, та в другому і четвертому, якщо $k < 0$.
4. Гілки гіперболи необмежено наближаються до осей координат.

4. Графічний метод розв'язування рівнянь

Приклад 6. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{4}{x}$ і $y = x - 3$. Знайти точки їх перетину та, користуючись побудованими графіками, розв'язати рівняння $\frac{4}{x} = x - 3$.

Розв'язання. Графіком функції $y = \frac{4}{x}$ є гіпербола, гілки якої лежать у першому і третьому координатних кутах, а графіком функції $y = x - 3$ є пряма, що проходить через точки (0; −3) і (3; 0).



Мал. 12.5

Графіки зображено на малюнку 12.5. Вони перетинаються в точках (4; 1) і (−1; −4), абсциси яких 4 і −1 і є розв'язками рівняння $\frac{4}{x} = x - 3$.

Справді, якщо $x = 4$, то вирази $\frac{4}{x}$ і $x - 3$ набувають однакових значень: $\frac{4}{x} = \frac{4}{4} = 1$ і $x - 3 = 4 - 3 = 1$.

Якщо $x = -1$, аналогічно: $\frac{4}{x} = \frac{4}{-1} = -4$ і $x - 3 = -1 - 3 = -4$.

Отже, числа 4 і −1 – корені рівняння $\frac{4}{x} = x - 3$.

Відповідь: (4; 1); (−1; −4) – точки перетину; 4, −1 – корені рівняння.

Запропонований у прикладі 6 метод розв'язування рівнянь називають ***графічним методом розв'язування рівнянь***.

Якщо абсциса точки перетину графіків функцій – ціле число, треба виконати перевірку, оскільки в багатьох випадках корені рівняння цим методом можна знайти лише наближено.

Яку функцію називають оберненою пропорційністю? ○ Що є графіком оберненої пропорційності та як він розташований у координатній площині? ○ Які властивості має обернена пропорційність?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

12.1. (*Усно.*) Які з функцій є оберненою пропорційністю:

1) $y = \frac{8}{x}$; 2) $y = \frac{x}{8}$; 3) $y = -\frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{2}{x}$;

5) $y = \frac{0}{x}$; 6) $y = 7$; 7) $y = \frac{0,0002}{x}$; 8) $y = \frac{0,0002}{x^2}$?

12.2. Випишіть функції, що задають обернену пропорційність:

1) $y = \frac{x}{7}$; 2) $y = \frac{7}{x}$; 3) $y = -\frac{3}{x}$; 4) $y = -\frac{x}{3}$;

5) $y = -9$; 6) $y = -\frac{0,01}{x}$; 7) $y = -\frac{0,01}{x^2}$; 8) $y = 0,01x$.

12.3. У яких координатних кутах лежить графік функції:

1) $y = \frac{15}{x}$; 2) $y = -\frac{9}{x}$?

12.4. Обчисліть значення функції $y = \frac{20}{x}$, якщо значення аргументу дорівнює –2; 5; –10; 1.

12.5. Обчисліть значення функції $y = \frac{12}{x}$, якщо значення аргументу дорівнює –3; 4; –6; 1.

12.6. Обернену пропорційність задано формулою $y = \frac{100}{x}$. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її:

x	–50		–20		5	10		
y		–4		1000			5	0,1

12.7. Обернену пропорційність задано формулою $y = \frac{80}{x}$. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її:

x	–80	–40		1			160	
y			–5		20	16		0,1

12.8. Побудуйте графік функції $y = -\frac{8}{x}$, склавши таблицю значень функції для значень аргументу –8; –4; –2; –1; 1; 2; 4; 8.

12.9. Побудуйте графік функції $y = \frac{12}{x}$, склавши таблицю її значень для x = –12; –6; –4; –3; –2; –1; 1; 2; 3; 4; 6; 12.

12.10. Не виконуючи побудови графіка функції $y = \frac{128}{x}$, з'ясуйте, чи належить йому точка:

1) $A(4; 32)$; 2) $B(-8; 16)$; 3) $C(-2; -64)$; 4) $D(0; -128)$.

12.11. Чи належить графіку функції $y = -\frac{162}{x}$ точка:

1) $A(-6; 27)$; 2) $B(9; 18)$;
3) $C(0; -162)$; 4) $D(81; -2)$?

12.12. (*Усно.*) Графіки яких функцій проходять через точку $A(4; -3)$:

1) $y = \frac{12}{x}$; 2) $y = -\frac{12}{x}$; 3) $y = -\frac{24}{x}$; 4) $y = x - 7$?

12.13. На 145 грн придбали y кг цукерок по x грн за кілограм. Запишіть формулою залежність y від x. Чи є ця залежність оберненою пропорційністю?

3

12.14. Побудуйте графік функції $y = \frac{10}{x}$. За графіком знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -2; $2{,}5$; -1;
2) значення аргументу, для яких значення функції дорівнює 10; -4; 2;
3) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень.

12.15. Побудуйте графік функції $y = -\frac{4}{x}$. За графіком знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює $-0{,}5$; 2; -4;
2) значення аргументу, для яких функція дорівнює 4; -1; 2;
3) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень.

12.16. Графік оберненої пропорційності проходить через точку $M(-4; 12)$. Задайте цю функцію формулою.

12.17. Запишіть формулу оберненої пропорційності, якщо її графік проходить через точку $P\left(12;\ 1\frac{1}{6}\right)$.

12.18. Функцію задано формулою $y = \frac{8}{x}$ для $1 \leqslant x \leqslant 4$. Запишіть область значень цієї функції.

12.19. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{8}{x} = 2$; 2) $2x = \frac{18}{x}$; 3) $-\frac{4}{x} = 3 - x$.

12.20. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{6}{x} = 3$; 2) $\frac{4}{x} = x$; 3) $4 - x = -\frac{5}{x}$.

4

12.21. Побудуйте графік функції: 1) $y = \frac{4}{|x|}$; 2) $y = -\frac{8}{|x|}$.

12.22. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ -1{,}5x, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

12.23. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} \dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ \dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

12.24. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{24}{(x+3)^2 - (x-3)^2}$; 2) $y = \dfrac{6x - 18}{3x - x^2}$.

Вправи для повторення

12.25. Знайдіть значення виразу:

1) 3^{-4}; 2) $(-19)^{-1}$;

3) $\left(1\dfrac{1}{7}\right)^{-2}$; 4) $(-0{,}2)^{-3}$.

12.26. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{2}{3}a^{-1}b\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{9}{10}a^{-3}b^{-2}\right)^{-1}$; 2) $\left(\dfrac{4mn^{-2}}{5a}\right)^{-1} \cdot 8m^{-3}n^{-2}a^5$.

12.27. Обчисліть $((1 - (1 + 2^{-1})^{-1})^{-1})^{-4}$.

Життєва математика

12.28. Квиток на поїзд Київ – Харків для дорослого коштує 520 гривень у вагоні-купе. Вартість квитка для дитини віком від 6 до 14 років становить 25 % від вартості квитка для дорослого. Група у складі 20 дітей віком 13–14 років і 2 дорослих вирушає на екскурсію з Києва до Харкова поїздом (туди і назад). Скільки коштують квитки на всю групу?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

12.29. Вираз $(x^2 - x - 1)^{13}$ перетворили на многочлен. Знайдіть суму коефіцієнтів цього многочлена.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Подайте вираз $a^{-5}a^2$ у вигляді степеня з основою a.

А. a^{-3} **Б.** a^3 **В.** a^{-10} **Г.** a^{10}

2. Укажіть число, яке подано у стандартному вигляді.

А. $12 \cdot 10^{-7}$ **Б.** $1{,}7 \cdot 8^{10}$ **В.** $0{,}05 \cdot 10^{15}$ **Г.** $1{,}7 \cdot 10^{8}$

3. Укажіть функцію, що є оберненою пропорційністю.

А. $y = \frac{x}{2}$ **Б.** $y = \frac{2}{x}$ **В.** $y = 2x$ **Г.** $y = 2$

2

4. Обчисліть $(-5)^{-3}$.

А. 15 **Б.** $\frac{1}{25}$ **В.** $-\frac{1}{125}$ **Г.** $\frac{1}{125}$

5. Спростіть вираз $-4a^{-5}b^7 \cdot 1\frac{1}{4}a^{-3}b^{-2}$.

А. $-a^{-8}b^5$ **Б.** $-5a^{-8}b^5$ **В.** $-5a^{15}b^{-14}$ **Г.** $5a^{-8}b^5$

6. Укажіть стандартний вигляд числа 217,38.

А. $2{,}1738 \cdot 10^2$
Б. $2{,}1738 \cdot 10^{-2}$
В. $2{,}1738 \cdot 10$
Г. $2{,}1738 \cdot 10^4$

3

7. Подайте частку $(3{,}5a^5b^{-3}) : (0{,}5a^{-3}b^{-2})$ у вигляді виразу, який не містить степеня з від'ємним показником.

А. $\frac{5a^8}{b}$ **Б.** $7a^8b$ **В.** $\frac{7a^8}{b}$ **Г.** $\frac{7a^2}{b^5}$

8. Виконайте додавання $4{,}7 \cdot 10^3 + 2{,}1 \cdot 10^4$ та подайте відповідь у стандартному вигляді.

А. $2{,}57 \cdot 10^3$ **Б.** $2{,}57 \cdot 10^4$ **В.** $25{,}7 \cdot 10^3$ **Г.** $6{,}8 \cdot 10^4$

9. Укажіть формулу оберненої пропорційності, графік якої проходить через точку $A(-6;\ 1{,}5)$.

А. $y = -4x$ **Б.** $y = -\frac{6}{x}$

В. $y = -\frac{9}{x}$ **Г.** $y = \frac{9}{x}$

4

10. Обчисліть $(1 + (1 - 2^{-1})^{-2})^{-3}$.

А. $\frac{64}{125}$ **Б.** $\frac{1}{8}$

В. $\frac{1}{25}$ **Г.** $\frac{1}{125}$

11. Скоротіть дріб $\frac{x^{-2} + x^3}{x^2 + x^{-3}}$.

А. Дріб є нескоротним **Б.** 1 **В.** x **Г.** $\frac{1}{x}$

12. Порядок числа a дорівнює −16. Знайдіть порядок числа $0{,}0001a$.

А. −12 **Б.** −20 **В.** −4 **Г.** −16

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г).

Вираз	*Значення виразу*
1. $5\cdot\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1}$	**А.** $\frac{1}{4}$
2. $\frac{2^{-3}\cdot 4^8}{8^5}$	**Б.** $\frac{1}{2}$
3. $\frac{5^{-6}\cdot 2^{11}}{25^{-3}\cdot 4^6}$	**В.** 2
	Г. 4

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 9–12

1 **1.** Подайте у вигляді степеня з основою a:
1) a^2a^{-3}; 2) $a^{-5}a^{-4}$; 3) $a^5 : a^{-7}$; 4) $(a^{-2})^3$.

2. Чи записано у стандартному вигляді число:
1) $0{,}37\cdot 10^5$; 2) $2{,}4\cdot 10^{-12}$; 3) $1{,}5\cdot 10^8$; 4) $3{,}5\cdot 8^{10}$?

3. Які з функцій задають обернену пропорційність:
1) $y=\frac{x}{5}$; 2) $y=\frac{5}{x}$; 3) $y=-\frac{6}{x}$; 4) $y=-\frac{6}{x^2}$?

2 **4.** Обчисліть:
1) 2^{-3}; 2) $(-5)^{-1}$; 3) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 4) $(2{,}7\cdot 10^5)\cdot(3\cdot 10^{-8})$.

5. Спростіть вираз:
1) $-7a^{-3}b^9\cdot 1\frac{1}{7}a^{-5}b^{-3}$; 2) $\left(-\frac{2}{3}x^3y\right)\cdot\left(-\frac{9}{10}x^{-5}y^{-1}\right)$.

6. Подайте число у стандартному вигляді:
1) 27 000; 2) 0,002; 3) 371,5; 4) 0,0109.

3 **7.** Перетворіть на вираз, що не містить степеня з від'ємним показником:
1) $(4{,}2a^7b^{-9}) : (0{,}7a^{-3}b^{-5})$; 2) $\left(\frac{2x^4}{5y^7}\right)^{-2}\cdot 4x^8y^{-18}$.

8. Побудуйте графік функції $y=-\frac{12}{x}$. За графіком знайдіть:
1) значення функції, якщо $x = 4$; -2;
2) значення аргументу, для яких функція дорівнює -6; 1;
3) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень.

4 **9.** Скоротіть дріб: 1) $\dfrac{48}{5^{n+2}-5^n}$; 2) $\dfrac{x^{-3}+x^2}{x+x^6}$.

Додаткові завдання

4 **10.** Обчисліть $((1+(1-2^{-1})^{-1})^{-1})^{-3}$.

11. Побудуйте графік функції $y=\begin{cases}\dfrac{8}{x}, & \text{якщо } x \leqslant -2,\\ -4, & \text{якщо } -2<x<3,\\ -\dfrac{12}{x}, & \text{якщо } x \geqslant 3.\end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1

1 **1.** З раціональних виразів

$$m^3-mp^2;\ \frac{t^2+2}{t-7};\ \frac{p\left(3-\dfrac{2}{x}\right)}{x^2};\ \frac{17}{x-y};\ \frac{x^2+ax-a^2}{19};\ \frac{(x+p):y}{a-b}$$

випишіть:
1) цілі раціональні вирази;
2) дробові раціональні вирази;
3) раціональні дроби.

2 **2.** Знайдіть область допустимих значень змінної у виразі:

1) c^2-3c; 2) $\dfrac{m+2}{m-8}$;

3) $\dfrac{a}{a-9}+\dfrac{a-9}{a}$; 4) $\dfrac{3+c}{c(c-1)}$.

3 **3.** Туристка пройшла 12 км уздовж шосе зі швидкістю a км/год та 8 км степовою дорогою зі швидкістю b км/год. Скільки часу витратила туристка на весь шлях? Складіть вираз і знайдіть його значення, якщо $a=5$; $b=4$.

4. Обчисліть значення дробу $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{0,1x}$, якщо $x=-100$, $y=99$.

4 **5.** Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\dfrac{1}{|x|+7}$; 2) $\dfrac{p}{|m|-m}$; 3) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{|a|}}$; 4) $\dfrac{3}{|2x-7|-3}$.

6. Для яких значень x дорівнює нулю дріб:

1) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$; 2) $\dfrac{x+3}{x^2-9}$; 3) $\dfrac{|x|-2}{(x-2)(x+5)}$; 4) $\dfrac{|x|-x}{x(x-3)}$?

До § 2

1 **7.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{5m}{20n}$; 2) $\frac{4x}{5x}$; 3) $\frac{p}{10p}$; 4) $\frac{-3}{6t}$; 5) $\frac{ax}{xb}$; 6) $\frac{mn}{2m}$.

2 **8.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2b^3}{ab^7}$; 2) $\frac{-63xa^5}{81xa^6}$; 3) $\frac{p(a-2)}{m(a-2)}$; 4) $\frac{7a-14b}{3a-6b}$;

5) $\frac{a-2y}{a^2-2ay}$; 6) $\frac{m^2-1}{7m+7}$; 7) $\frac{x^2-4x+4}{3x-6}$; 8) $\frac{x^2-2xy}{2y-x}$.

9. Зведіть дріб:

1) $\frac{c}{a^2}$ до знаменника a^5;

2) $\frac{p}{3c}$ до знаменника $12c^7$.

3 **10.** Подайте частку у вигляді дробу та скоротіть його:

1) $(x^3+8):(x+2)$;

2) $(a^2-5a+25):(a^3+125)$.

11. Обчисліть значення дробу:

1) $\frac{10xy-5x^2}{8y^2-4xy}$, якщо $x = 0{,}2$; $y = 0{,}25$;

2) $\frac{a^2-4b^2}{3a^2b-6ab^2}$, якщо $a = 20$; $b = -10$.

12. Зведіть дріб $\frac{3}{a-2}$ до знаменника:

1) $7a-14$; 2) a^2-2a; 3) $16-8a$; 4) a^2-4.

4 **13.** Доведіть тотожність $\frac{22{,}5a^2-2{,}5b^2}{7{,}5a^2-2{,}5ab} = \frac{3a+b}{a}$.

14. Знайдіть значення дробу $\frac{2x-8y}{0{,}2x^2-3{,}2y^2}$, якщо $x+4y=5$.

15. Подайте вираз $5a+4b$ у вигляді дробу зі знаменником:

1) 5; 2) $-a$; 3) $2b$; 4) $2a-3b$.

16. Скоротіть дріб $\frac{x^2-y^2-z^2+2yz}{y^2-x^2-z^2-2xz}$.

До § 3

1 **17.** Виконайте дію:

1) $\frac{4m}{7}+\frac{m}{7}$; 2) $\frac{9p}{8a}-\frac{2p}{8a}$; 3) $\frac{m-n}{p}+\frac{n}{p}$; 4) $\frac{12a^2}{5m}-\frac{3a^2}{5m}$.

2 **18.** Спростіть вираз:

1) $\frac{3m-7}{12m}+\frac{13-5m}{12m}-\frac{6m-2}{12m}$; 2) $\frac{m^2+1}{a(m-1)}-\frac{2}{a(m-1)}$;

3) $\frac{x-8}{x^2-25}+\frac{13}{x^2-25}$; 4) $\frac{a-4}{a-2}-\frac{2}{2-a}$.

19. Знайдіть значення виразу $\frac{m+1}{m^2-16}+\frac{3}{m^2-16}$, якщо $m = 14$.

3 **20.** Перетворіть на дріб вираз:

1) $\frac{9b+1}{b^2-4}+\frac{8-b}{4-b^2}-\frac{7b-1}{b^2-4}$; 2) $\frac{5m}{m^3-1}-\frac{1-4m}{1-m^3}+\frac{m^2}{m^3-1}$.

21. За якого значення a вирази $\frac{2x+3}{x-2}$ і $\frac{2x}{x-2}+\frac{a}{2-x}$ є тотожно рівними?

22. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу $\frac{8+3a}{5-4a}+\frac{13a-14}{4a-5}-\frac{2a+7}{5-4a}$ від значення змінної не залежить.

4 **23.** Спростіть вираз:

1) $\frac{16m^2}{(4m-1)(4m+1)}-\frac{8m}{16m^2-1}-\frac{1}{(1-4m)(1+4m)}$;

2) $\frac{8x-9}{(2x+1)^2}-\frac{8x^3+3x-1}{(1+2x)^2}-\frac{5x-7}{1+4x^2+4x}$.

24. Доведіть, що вираз $\frac{x+6}{(2-x)^4}+\frac{x^2-3}{(x-2)^4}-\frac{5x-1}{(2-x)^4}$ набуває додатних значень для всіх значень x, за умови $x \neq 2$.

25. Знайдіть, для яких натуральних значень n натуральним числом є значення дробу:

1) $\frac{n+2}{n}$; 2) $\frac{n^2+6}{n}$; 3) $\frac{n^2-10n+16}{n}$.

26. Побудуйте графік функції $y=\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{1-x}$.

До § 4

1 **27.** Виконайте дію:

1) $\frac{c}{5}-\frac{a}{4}$; 2) $\frac{a}{3}+\frac{b}{12}$; 3) $\frac{p}{x}-\frac{x}{a}$; 4) $\frac{4}{m}+\frac{n}{7}$.

2 **28.** Виконайте дію:

1) $\frac{2}{3p}-\frac{4}{9p}$; 2) $\frac{7x^2}{12m}+\frac{x^2}{m}$; 3) $\frac{3x-2y}{12}+\frac{y+x}{6}$;

4) $\dfrac{3a+b}{6}-\dfrac{4a-b}{8}$; 5) $\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{p-2}{p^3}$; 6) $\dfrac{4a+b}{2a}-\dfrac{6b-a}{3b}$.

29. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{mn}$; 2) $\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{1}{x}$; 3) $\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a-b}{b}-\dfrac{1}{ab}$.

30. Подайте у вигляді дробу:

1) $2x-\dfrac{1}{x}$; 2) $4p-\dfrac{4p^2-1}{p}$; 3) $\dfrac{2}{m}+\dfrac{3}{m-1}$;

4) $\dfrac{m}{1-m}+\dfrac{1+m}{m}$; 5) $\dfrac{c}{3c-1}+\dfrac{c}{3c+1}$; 6) $\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x}{x+y}$.

31. Виконайте дію:

1) $\dfrac{2c-7}{2(c+5)}+\dfrac{4-c}{c+5}$; 2) $\dfrac{a-1}{3a+6}-\dfrac{a}{4a+8}$; 3) $\dfrac{7}{x}-\dfrac{14}{x(x+2)}$;

4) $\dfrac{9}{m^2+4m}-\dfrac{5}{m+4}$; 5) $\dfrac{b}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{a+b}$; 6) $\dfrac{x+3}{x^2+2x+1}-\dfrac{1}{x+1}$.

3 **32.** Доведіть, що для всіх значень змінної значення виразу

$$\frac{(a-3)(a-7)}{12}-\frac{(a-7)(a-1)}{8}+\frac{(a-1)(a-3)}{24}$$

не залежить від a.

33. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{4m+18}{m^2-9}-\dfrac{5}{m-3}+\dfrac{1}{m+3}$; 2) $\dfrac{2x}{2x+3}+\dfrac{5}{3-2x}-\dfrac{4x^2+9}{4x^2-9}$;

3) $\dfrac{9x}{3xy+2y^2}-\dfrac{4y}{3x^2+2xy}$; 4) $\dfrac{4a}{4a^2-1}-\dfrac{2a+1}{6a-3}+\dfrac{2a-1}{4a+2}$;

5) $\dfrac{2x-1}{x^2+x+1}+\dfrac{4x^2+3x-7}{x^3-1}$; 6) $\dfrac{a^2}{3ab-2-a+6b}-\dfrac{a}{3b-1}$.

4 **34.** Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=0$;

2) $\dfrac{yz}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{xz}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{xy}{(z-x)(z-y)}=1$.

35. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу $\dfrac{3x+2}{9x^2-6x+4}-\dfrac{18x}{27x^3+8}-\dfrac{1}{3x+2}$ дорівнює нулю.

36. Знайдіть значення a і b, для яких є тотожністю рівність:

1) $\dfrac{3x}{x+2}-\dfrac{9x+3}{3x-1}=\dfrac{ax+b}{3x^2+5x-2}$;

2) $\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x+3}=\dfrac{18}{x^2-9}$.

37. Човен, власна швидкість якого v км/год, подолав відстань s км завдовжки і повернувся назад за t год. Виразіть t через s і v, якщо швидкість течії 3 км/год. Спростіть отриманий вираз і знайдіть його значення, якщо $v = 12$, $s = 45$.

До § 5

1 **38.** Виконайте множення:

1) $\frac{7}{m} \cdot \frac{m}{9}$; 2) $\frac{p^2}{4} \cdot \frac{5}{p}$; 3) $\frac{4}{b} \cdot \frac{b^3}{3}$; 4) $\frac{c}{5} \cdot \frac{10}{c^2}$.

2 **39.** Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\frac{4}{15m^2} \cdot \frac{5m}{16}$; 2) $\frac{t^3}{15} \cdot \frac{20}{tk}$; 3) $-\frac{24m}{5a^2} \cdot \frac{15a}{8m^3}$;

4) $-12x \cdot \left(-\frac{p}{16x^2}\right)$; 5) $15m^2n \cdot \frac{7}{25m^3n}$; 6) $\frac{7c^3}{12a^8} \cdot \left(-\frac{8a^5}{21c}\right)$.

40. Спростіть вираз:

1) $\frac{x^2 - 3x}{7} \cdot \frac{21}{x^2 - 9}$; 2) $-\frac{3x - y}{6x + 6} \cdot \frac{8x + 8}{y - 3x}$;

3) $\frac{a^2 - 2a + 1}{15m^2} \cdot \frac{5m}{a^2 - 1}$; 4) $\frac{c^2 + 2c}{12ab} \cdot \frac{20a^2b}{c^2 + 4c + 4}$.

41. Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{c}{2m}\right)^3$; 2) $\left(-\frac{p}{a^2}\right)^3$; 3) $\left(-\frac{3a^3}{b^2}\right)^4$; 4) $\left(-\frac{t^2c^3}{p^{10}}\right)^8$.

42. Виконайте дію:

1) $\frac{a^7 + a^5}{a^6 - a^4} \cdot \frac{a^6 - a^8}{a^3 + a^5}$; 2) $-\frac{a^2 - 25}{a^2 - 4b^2} \cdot \left(-\frac{a + 2b}{2a - 10}\right)$;

3) $\frac{5c^5 - 3c^4}{c^3 - 8} \cdot \frac{2c - 4}{3c^2 - 5c^3}$; 4) $(a^2 + 4a + 4) \cdot \left(-\frac{4}{10 + 5a}\right)$.

3 **43.** Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\left(-\frac{25x^2y^3}{9t}\right)^2 \cdot \left(\frac{3t^4}{5xy^2}\right)^3$; 2) $\frac{(a - b)^3}{a + b} \cdot \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$.

4 **44.** Виконайте множення: $\frac{x^2 + (a + b)x + ab}{x^2 - (a - c)x - ac} \cdot \frac{x^2 - c^2}{x^2 - a^2}$.

45. Доведіть, що значення виразу $\frac{0,5x^2 + 2}{0,5x^2 - x + 2} \cdot (2 - x) \cdot \frac{4 + 0,5x^3}{8 - 0,5x^4}$ не залежить від будь-яких допустимих значень змінної.

46. Доведіть, що значення виразу $\frac{a^2 - ab + ac - bc}{a^2 + ab - ac - bc} \cdot \frac{a^2 + bc - ab - ac}{a^2 + bc + ab + ac}$ для всіх допустимих значень змінних є невід'ємним.

До § 6

47. Виконайте ділення:

1) $\frac{c}{3} : \frac{a}{2}$; 2) $\frac{p}{4} : \frac{c}{17}$; 3) $\frac{3}{a} : \frac{7}{a}$; 4) $\frac{5}{m^2} : \frac{3}{m}$.

48. Спростіть вираз:

1) $\frac{12a}{5b^2} : \frac{16a}{15b}$; 2) $-\frac{7m^2}{n^2} : \frac{21m}{n^3}$; 3) $-\frac{5a^3}{4b^2} : (-10a^2)$;

4) $20m^2n : \left(-\frac{4m^3}{p}\right)$; 5) $\frac{5c^2}{9m^3} : \frac{25c^3}{81m}$; 6) $-\frac{22x^2}{39a} : \left(-\frac{33x^3}{26a^4}\right)$.

49. Виконайте дію:

1) $\frac{ax - xy}{a} : \frac{a^2 - ay}{x}$; 2) $\frac{a^2 - b^2}{5a} : \frac{3a + 3b}{10a^2}$;

3) $\frac{x^2 - 36}{a - 2b} : \frac{x^2 + 12x + 36}{2b - a}$; 4) $\frac{3a - a^2}{a^2 - 4a + 4} : \frac{3 - a}{4 - 2a}$.

50. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\frac{27 + x^3}{81 - x^4} : \frac{x^2 - 3x + 9}{x^2 + 9}$; 2) $\frac{(10x - 4y)^2}{100} : (2,5x^2 - 0,4y^2)$.

51. Подайте дріб $\dfrac{\dfrac{a^2 + 5a}{a^2 - 9}}{\dfrac{a^2 - 25}{a^2 - 3a}}$ у вигляді раціонального дробу.

52. Доведіть, що значення виразу $\frac{2x^3 + 2y^3}{xy - x^2} : \frac{x^3 - x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}$ для всіх допустимих значень змінної набуває лише недодатних значень.

53. Обчисліть значення виразу $\frac{27a^3 - 64b^3}{b^2 - 4} : \frac{9a^2 + 12ab + 16b^2}{b^2 + 4b + 4}$, якщо $a = 4$, $b = 3$.

54. Доведіть тотожність: $\frac{a^2 - 16}{a^2 - ab + 5a - 5b} : \frac{a^2 + 5a + 4}{a^2 - ab + a - b} = \frac{a - 4}{a + 5}$.

До § 7

55. Виконайте дії:

1) $\left(\frac{2a}{2a - 1} + 1\right) \cdot \frac{6a - 3}{4a^2 - a}$; 2) $\left(m + \frac{m^2}{3 - m}\right) : \frac{m + 3}{m - 3}$;

3) $\left(\frac{a}{a - b} - \frac{a}{a + b}\right) : \frac{ab}{a + b}$; 4) $\left(p - \frac{p^2 - 3}{p + 1}\right) \cdot \frac{p^2 - 1}{p + 3}$.

56. Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right):(a+b)=\frac{a+b}{ab}$; 2) $\frac{m-n}{mn}:\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)=\frac{mn}{m+n}$.

3 **57.** Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{1}{a+b}-\frac{a}{b^2+ab}\right)\cdot\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2}-\frac{b}{a^2-ab}\right)$;

2) $\left(\frac{6a+1}{a-3}+\frac{6a-1}{a+3}\right):\frac{2a^2+1}{a-3}$.

58. Обчисліть значення виразу $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{b}\right)$, якщо $a=4$, $b=3$.

59. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу від значення змінної не залежить:

1) $\frac{2x}{x+3}+(x-3)^2\left(\frac{2}{x^2-6x+9}+\frac{1}{9-x^2}\right)$;

2) $\left(\frac{3}{4m^2-9}-\frac{2m}{4m^2-12m+9}\right)\cdot\frac{8m^3-18m}{4m^2+9}+\frac{3}{2m-3}$.

60. Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{a}{a-3}+\frac{10}{a-3}+\frac{25}{a^2-3a}\right):\left(\frac{5}{a^2}+\frac{2}{a}+\frac{1}{5}\right)=\frac{5a}{a-3}$;

2) $\left(\frac{a-1}{a^2-a+1}-\frac{4a-5}{a^3+1}\right):\frac{2-a}{4a^2-4a+4}=\frac{4(2-a)}{a+1}$.

4 **61.** Відомо, що $x^2+\frac{1}{x^2}=23$. Знайдіть значення виразу $x+\frac{1}{x}$.

62. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{4}{x^2-6x}-\frac{2}{6-x}+1\right)\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{2}{x^3-6x^2+12x-8}\right).$$

63. Доведіть, що вираз

$$\frac{x^2}{x^2+4x+4}\cdot\frac{8x^2-32}{x^3-2x^2}+\frac{x^5-8x^2}{x}:(x^2-4)$$

для всіх допустимих значень змінної набуває лише додатних значень.

64. Доведіть, що вираз

$$\left(\frac{3m+2}{3m^2+1}-\frac{18m^3-m-9}{9m^4-1}+\frac{3m-2}{3m^2-1}\right):\frac{m^2+10m+25}{9m^4-1}$$

для всіх $m<-5$ набуває лише від'ємних значень.

65. Чи може значення виразу

$$\left(\frac{1}{x^2 - xy} - \frac{3y^2}{x^4 - xy^3} - \frac{y}{x^3 + x^2y + xy^2}\right)\left(y + \frac{x^2}{x + y}\right)$$

для деяких значень змінних x і y дорівнювати нулю?

До § 8

1 **66.** Чи є число 3 коренем рівняння:

1) $\frac{x}{x + 2} = 0$; 2) $\frac{x - 3}{x + 1} = 0$; 3) $\frac{x + 2}{x - 3} = 0$; 4) $\frac{x^2 - 9}{x} = 0$?

2 **67.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x - 9}{2 - x} = 0$; 2) $\frac{2x - 4}{2 - x} = 0$; 3) $\frac{x}{x + 3} - 2 = 0$;

4) $\frac{x}{x - 3} = \frac{2}{5}$; 5) $\frac{x^2 - x}{x + 2} = \frac{x^2 - 8}{x + 2}$; 6) $\frac{4x^2 - 1}{x + 1} = 4x$.

68. Яке одне й те саме число треба додати до чисельника і до знаменника дробу $\frac{5}{12}$, щоб отримати дріб $\frac{1}{2}$?

3 **69.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x - 1}{3x + 1} - \frac{2x + 1}{3x - 5} = 0$; 2) $4 + \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{2 - x}$;

3) $\frac{8}{3x - 3} + \frac{2 + x}{x - 1} = \frac{5}{2 - 2x} - \frac{5}{18}$; 4) $\frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x + 1} + \frac{x}{x - 1}$.

70. Катер долає 80 км за течією річки за той самий час, що й 64 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

4 **71.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5}{(3x - 1)^2} + \frac{1}{(3x + 1)^2} = \frac{6}{9x^2 - 1}$; 2) $\frac{|4x + 3|}{x - 1} = \frac{7}{x - 1}$.

72. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати деяку роботу за 8 днів. Перший робітник може виконати цю роботу самостійно вдвічі швидше, ніж другий. За скільки днів кожний з робітників може виконати цю роботу самостійно?

* **73.** Розв'яжіть рівняння, де x – змінна:

1) $\frac{a}{x} = 5$; 2) $\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = 2$.

До § 9

1 **74.** Замініть дробом степінь із цілим від'ємним показником:

1) 8^{-3}; 2) c^{-1};

3) $(3m)^{-2}$; 4) $(a + 2)^{-5}$.

75. Замініть дріб степенем із цілим від'ємним показником:

1) $\frac{1}{8^2}$; 2) $\frac{1}{c}$; 3) $\frac{1}{(ab)^3}$; 4) $\frac{1}{(1-m)^4}$.

2 **76.** Обчисліть:

1) 9^{-2}; 2) 4^{-1}; 3) $(-5)^{-1}$; 4) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$;

5) $0{,}1^{-3}$; 6) $\left(2\frac{1}{7}\right)^{-1}$; 7) $0{,}25^{-4}$; 8) $(-2{,}5)^{-3}$.

77. Обчисліть значення виразу:

1) $100x^{-2}$, якщо $x = 1; 10; 100$;

2) $a^{-3}b$, якщо $a = 4$; $b = 8$.

78. Знайдіть значення виразів a^n і $-a^n$, якщо:

1) $a = -1$; $n = 8$; 2) $a = 5$; $n = -2$.

3 **79.** Не виконуючи обчислень, порівняйте:

1) 7^{-3} і $(-7)^3$; 2) $(-1{,}2)^0$ і $(-5)^{-5}$; 3) $(-13)^{-4}$ і $(-13)^4$;

4) $(-12)^6$ і 12^{-6}; 5) -14^{-2} і $(-14)^{-2}$; 6) $(-9)^{-5}$ і -9^{-5}.

80. Обчисліть:

1) $-0{,}25^{-2} : (-4^3)$; 2) $0{,}02 \cdot (-0{,}5)^{-3}$;

3) $0{,}4^{-2} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)^{-1}$; 4) $(-1{,}8)^0 - 4^{-1} \cdot 0{,}05^{-2}$.

81. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $(1 + a^{-3})(1 + a)^{-2}$; 2) $\left(\frac{1}{x^{-1}} - \frac{1}{y^{-1}}\right) \cdot (y - x)^{-1}$.

4 **82.** Обчисліть $\dfrac{0{,}6^{-4} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^{-6}}{(0{,}36)^{-5} \cdot \left(2\frac{7}{9}\right)^{-6}}$.

83. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{x-1}{2x}\right)^{-1} = 3$.

84. Спростіть вираз $\left(\frac{1}{b^{-8}} - \frac{1}{a^{-8}}\right) \cdot \left(\frac{a^{-8} + b^{-8}}{a^{-16} - b^{-16}}\right)$.

До § 10

1 **85.** Подайте у вигляді степеня з основою a:

1) a^3a^{-5}; 2) $a^8a^{-7}a^{-2}$; 3) $a^7 : a^{-3}$;

4) $a^{-5} : a^{-4}$; 5) $(a^2)^{-6}$; 6) $(a^{-3})^{-5}$.

2 **86.** Обчисліть:

1) $4^{-5} \cdot 4^{6}$; 2) $2^{-7} \cdot 2^{4}$; 3) $3^{-9} : 3^{-7}$;

4) $5^{17} : 5^{19}$; 5) $((0,3)^{-1})^{-2}$; 6) $\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{-9}\right)^{0}$.

87. Спростіть вираз:

1) $12a^{-2}b \cdot \frac{1}{3}ab^{-3} \cdot \frac{3}{4}a^{-3}b^{2}$; 2) $\left(-\frac{7}{12}x^{-2}\right) \cdot (-6x^{3}) \cdot \frac{1}{7}x^{-8}$.

88. Подайте вираз x^{-12}, де $x \neq 0$, у вигляді степеня з основою:
1) x^{2}; 2) x^{-3}.

3 **89.** Знайдіть значення виразу $\frac{9}{28}x^{-2}y^{7} \cdot \frac{14}{15}x^{7}y^{-2} \cdot (-10x^{-5}y^{-6})$, якщо $x = -1,19$; $y = -0,1$.

90. Спростіть вираз:

1) $(-3p^{-3}ca^{-2})^{-2} \cdot (0,1pc^{-2}a)^{2}$; 2) $\left(\frac{1}{4}a^{-4}b^{-2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{a^{-3}}{4b}\right)^{-3}$.

91. Доведіть тотожність $(a^{-2} - a^{-1} + 1) : (a^{-2} + a) = \frac{1}{a+1}$.

4 **92.** Подайте вираз $x^{3} + 5 + x^{-5}$ у вигляді добутку двох множників, один з яких дорівнює: 1) x; 2) x^{-1}; 3) x^{-3}.

93. Доведіть, що для будь-якого цілого значення k справджується рівність: 1) $3 \cdot 7^{k} + 4 \cdot 7^{k} = 7^{k+1}$; 2) $5 \cdot 4^{k} - 4^{k} = 4^{k+1}$.

До § 11

1 **94.** Які із чисел записано у стандартному вигляді? Для чисел, записаних у стандартному вигляді, назвіть порядок числа:
1) $3,7 \cdot 108$; 2) $0,29 \cdot 10^{11}$; 3) $2,94$; 4) $10,94$;
5) $1,135 \cdot 10^{-11}$; 6) $0,311$; 7) $1,02 \cdot 10^{15}$; 8) $1,02 \cdot 15^{10}$.

2 **95.** Подайте у стандартному вигляді число:
1) 130 000; 2) 783,5; 3) 0,0012; 4) 0,001002003.

96. Виконайте дію із числами, поданими у стандартному вигляді:
1) $(2,7 \cdot 10^{8}) \cdot (5 \cdot 10^{-5})$; 2) $(9,6 \cdot 10^{-8}) : (3,2 \cdot 10^{-12})$;
3) $2,7 \cdot 10^{4} + 3,1 \cdot 10^{4}$; 4) $3,42 \cdot 10^{-5} - 2,11 \cdot 10^{-5}$.

3 **97.** Площа басейну річки Дніпро становить $5,04 \cdot 10^{5}$ км^{2}, а площа басейну річки Південний Буг – 12,6 % від площі басейну Дніпра. Знайдіть площу басейну Південного Бугу та подайте її у стандартному вигляді $a \cdot 10^{n}$, округливши число a до сотих.

4 **98.** Виразіть час у системі СІ та запишіть результат у стандартному вигляді: 1) 1 година; 2) 1 доба; 3) 1 місяць (30 днів); 4) 1 рік (365 днів); 5) 1 сторіччя.

До § 12

1

99. Які з функцій задають обернену пропорційність? У яких координатних кутах лежать їх графіки:

1) $y = \frac{x^2}{4}$; 2) $y = \frac{4}{x^2}$; 3) $y = \frac{x}{4}$; 4) $y = \frac{4}{x}$;

5) $y = -\frac{4}{x}$; 6) $y = -\frac{x}{4}$; 7) $y = 4x$; 8) $y = -4x$?

2

100. Обернену пропорційність задано формулою $y = -\frac{16}{x}$. Не будуючи її графіка, знайдіть значення:
1) функції, якщо значення аргументу дорівнює −8; 2; −5;
2) аргументу, для якого значення функції дорівнює 4; −0,5; 2,5.

101. Побудуйте графік функції:

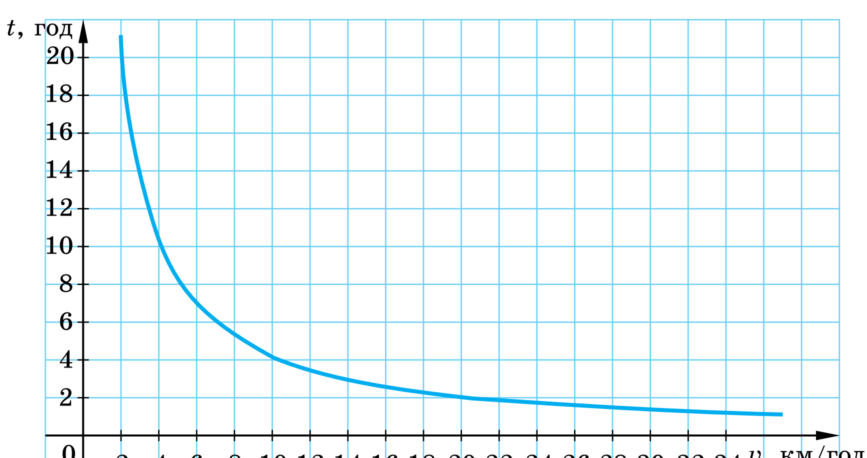
1) $y = -\frac{10}{x}$; 2) $y = \frac{2}{x}$, де $-2 \leqslant x \leqslant 4$, $x \neq 0$.

3

102. Точка $A(-3;\ 4)$ належить графіку оберненої пропорційності. Чи належить цьому графіку точка: 1) $B(1;\ 12)$; 2) $C(2;\ -6)$?

103. Прямокутний паралелепіпед, сторони основи якого дорівнюють x см і y см, має висоту 10 см та об'єм 120 см^3. Виразіть формулою залежність y від x. Чи є ця залежність оберненою пропорційністю? Якою є область визначення функції? Побудуйте її графік.

104. На малюнку 1 зображено залежність часу на подолання відстані між пунктами A і B від швидкості. За графіком з'ясуйте:
1) скільки потрібно часу, щоб подолати відстань від A до B, якщо швидкість руху буде 10 км/год; 20 км/год;
2) з якою швидкістю треба рухатися, щоб дістатися з A до B за 2 год; 8 год;
3) якою є відстань від A до B.



Мал. 1

105. Не будуючи графіка функції $y = \frac{4}{x}$, знайдіть ті його точки, координати яких між собою рівні.

106. Не будуючи графіка функції $y = -\frac{9}{x}$, знайдіть ті його точки, координати яких є протилежними числами.

107. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{30x - 18x^2}{3x^3 - 5x^2}$; 2) $y = \frac{4 + x}{x^2 + x} + \frac{3}{x + 1}$.

Головне в розділі 1

РАЦІОНАЛЬНИЙ ВИРАЗ. РАЦІОНАЛЬНИЙ ДРІБ

Раціональний вираз – математичний вираз, що містить дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня.

Дріб $\frac{P}{Q}$, де P і Q – многочлени, називають ***раціональним дробом***.

Значення змінних, для яких вираз має зміст, називають ***допустимими значеннями змінних*** у виразі.

ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ

Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий відмінний від нуля вираз, то одержимо дріб, що дорівнює даному.

СКОРОЧЕННЯ ДРОБУ

Щоб скоротити дріб, треба:
1) розкласти на множники його чисельник і знаменник (за потреби);
2) виконати ділення чисельника і знаменника на їх спільний множник та записати результат.

ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ З ОДНАКОВИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий.

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$$

Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від’ємника, а знаменник залишити той самий.

ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ З РІЗНИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

Щоб виконати додавання або віднімання дробів з різними знаменниками, треба:

1) розкласти на множники знаменники дробів, якщо це потрібно;
2) знайти спільний знаменник, бажано найпростіший;
3) знайти додаткові множники і звести дроби до спільного знаменника;
4) знайти дріб, що є сумою або різницею даних дробів;
5) спростити цей дріб та записати результат.

МНОЖЕННЯ ДРОБІВ. ПІДНЕСЕННЯ ДРОБУ ДО СТЕПЕНЯ

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Щоб помножити дріб на дріб, треба перемножити окремо чисельники й окремо знаменники та записати перший добуток чисельником, а другий – знаменником дробу.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Щоб піднести дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник і перший результат записати в чисельник, а другий – у знаменник дробу.

ДІЛЕННЯ ДРОБІВ

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Щоб поділити один дріб на інший, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника.

РІВНОСИЛЬНІ РІВНЯННЯ

Два рівняння називають ***рівносильними***, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і ті рівняння, які коренів не мають.

РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Рівняння, ліва і права частини яких є раціональними виразами, називають ***раціональними рівняннями***.

МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1. *Використання умови рівності дробу нулю*

1) За допомогою тотожних перетворень звести рівняння до вигляду $\frac{P}{Q} = 0$;

2) прирівняти чисельник P до нуля і розв'язати одержане ціле рівняння;
3) виключити з його коренів ті, для яких знаменник Q дорівнює нулю, і записати відповідь.

2. *Використання основної властивості пропорції*

1) Знайти область визначення рівняння (ОВР);
2) звести рівняння до вигляду $\frac{P}{Q} = \frac{M}{N}$;
3) записати ціле рівняння $P \cdot N = M \cdot Q$ і розв'язати його;
4) виключити з отриманих коренів ті, що не належать ОВР, і записати відповідь.

3. *Метод множення обох частин рівняння на спільний знаменник дробів*

1) Знайти ОВР;
2) знайти найпростіший спільний знаменник дробів, що входять у рівняння;
3) помножити обидві частини рівняння на цей спільний знаменник;
4) розв'язати одержане ціле рівняння;
5) виключити з його коренів ті, що не належать ОВР, і записати відповідь.

СТЕПІНЬ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

$$a^0 = 1,\ a \neq 0.$$

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}},\ a \neq 0,\ n \text{ — натуральне число},$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}},\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ n \text{ — натуральне число.}$$

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

Для будь-якого $a \neq 0$, $b \neq 0$ і будь-яких цілих m і n:

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

$$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$$

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$$

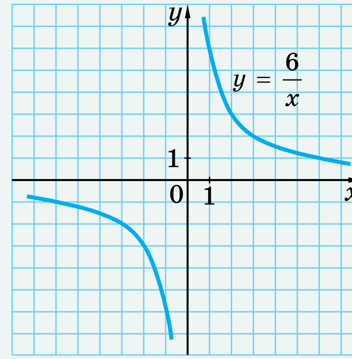
$$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА

Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$ і n — ціле число.

ФУНКЦІЯ $y = \frac{k}{x}$



Функцію вигляду $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}$, де $\boldsymbol{x}$ – незалежна змінна, $\boldsymbol{k} \neq 0$, називають ***оберненою пропорційністю***.

ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ $y = \frac{k}{x}$

1. Область визначення функції складається з усіх чисел, крім числа нуль.
2. Область значень функції складається з усіх чисел, крім числа нуль.
3. Графік функції – гіпербола, гілки якої лежать у першому і третьому координатних кутах, якщо $k > 0$, та в другому і четвертому, якщо $k < 0$.
4. Гілки гіперболи необмежено наближаються до осей координат.

РОЗДІЛ 2

КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **ознайомитеся** з поняттями арифметичного квадратного кореня, множини та підмножини; функціями $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$;
- **навчитеся** застосовувати означення та властивості арифметичного квадратного кореня для спрощення виразів та обчислення їх значень, розв'язування рівнянь тощо; будувати графіки функцій $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

§ 13. Функція $y = x^2$, її графік і властивості

1. Функція $y = x^2$, її графік

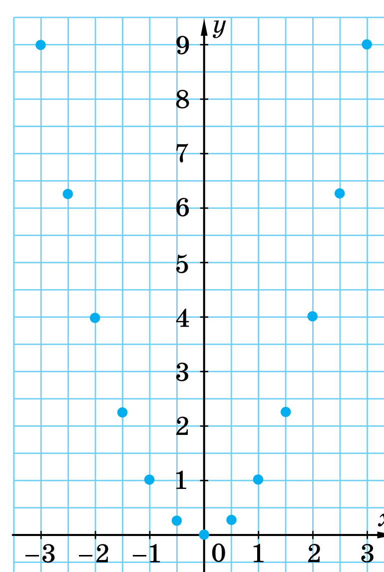
Приклад 1. Нехай сторона квадрата дорівнює a см. Тоді його площу (у см^2) можна знайти за формулою $S = a^2$. У цій формулі кожному додатному значенню змінної a відповідає єдине значення змінної S.

Якщо в цьому прикладі незалежну змінну позначити через x, а залежну – через y, то отримаємо функцію $y = x^2$. У цій формулі змінна x може набувати будь-яких значень (додатних, від'ємних, значення нуль).

Складемо таблицю значень функції $y = x^2$ для кількох значень аргументу:

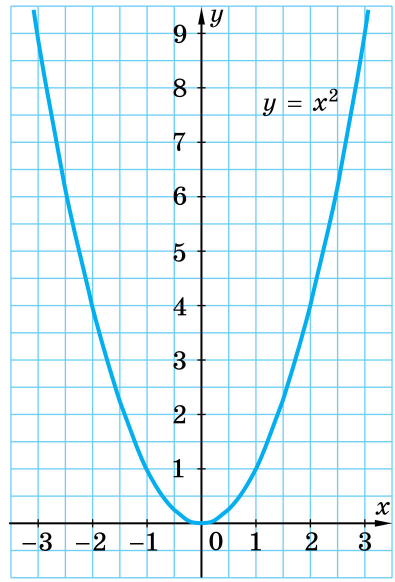
x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0
x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	
y	0,25	1	2,25	4	6,25	9	

Позначимо на координатній площині точки $(x; y)$, координати яких отримали в таблиці (мал. 13.1).



Мал. 13.1

Якби на цій самій площині позначили більшу кількість точок, координати яких задовольняють формулу $y = x^2$, а потім сполучили їх плавною лінією, то одержали б графік функції $y = x^2$ (мал. 13.2). Графік цієї функції називають ***параболою***, точку (0; 0) – ***вершиною параболи***. Вершина ділить параболу на дві частини, кожну з яких називають ***гілкою параболи***.



Мал. 13.2

2. Властивості функції $y = x^2$

Сформулюємо деякі *властивості функції* $y = x^2$.

1. Область визначення функції складається з усіх чисел.
2. Область значень функції складається з усіх невід'ємних чисел, тобто $y \geqslant 0$.

Справді, оскільки $x^2 \geqslant 0$ для всіх значень x, то $y \geqslant 0$.

3. Графіком функції є парабола з вершиною в точці (0; 0), гілки якої напрямлені вгору. Усі точки графіка, крім вершини параболи, лежать вище від осі абсцис.
4. Протилежним значенням аргументу відповідає одне й те саме значення функції.

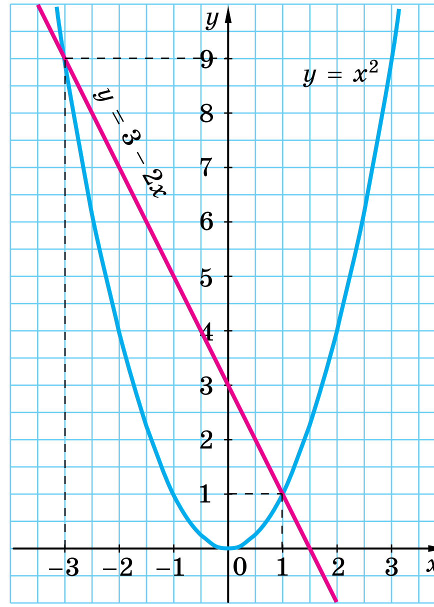
Дійсно, це слідує з того, що $(-x)^2 = x^2$ для будь-якого значення x.

3. Використання графіка функції $y = x^2$ під час розв'язування рівнянь

Приклад 2. Розв'язати графічно рівняння $x^2 = 3 - 2x$.

Розв'язання. Графік функції $y = x^2$ – парабола, а функції $y = 3 - 2x$ – пряма, що проходить через точки (0; 3) і (2; −1). Побудуємо графіки цих функцій в одній системі координат (мал. 13.3). Вони перетинаються у двох точках, абсциси яких $x = -3$ і $x = 1$. Пересвідчимося, що числа −3 і 1 дійсно є коренями рівняння:

1) якщо $x = -3$, то $x^2 = (-3)^2 = 9$ і $3 - 2x = 3 - 2 \cdot (-3) = 9$;
2) якщо $x = 1$, то $x^2 = 1^2 = 1$ і $3 - 2x = 3 - 2 \cdot 1 = 1$.
Отже, -3 і 1 – корені рівняння $x^2 = 3 - 2x$.
Відповідь: -3; 1.

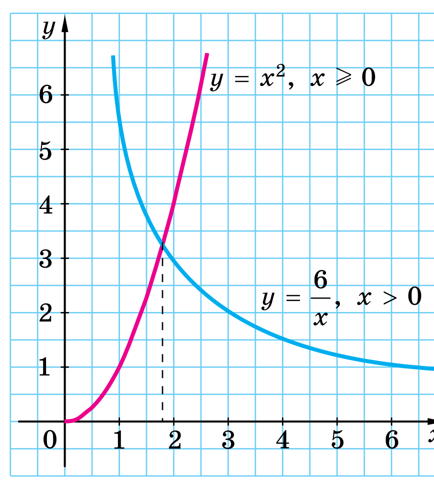


Мал. 13.3

Приклад 3. Між якими послідовними цілими числами міститься корінь рівняння $\frac{6}{x} = x^2$?

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння графічно, побудувавши графіки функцій $y = \frac{6}{x}$ і $y = x^2$ в одній системі координат. Оскільки $x^2 \geqslant 0$ для всіх значень x, то і $\frac{6}{x} \geqslant 0$. Звідки отримаємо, що $x > 0$. Тому графіки цих функцій розглянемо тільки для $x > 0$. Це гілка гіперболи і гілка параболи, що лежать у першій координатній чверті (мал. 13.4).
Графіки перетинаються в одній точці, абсциса якої лежить між числами 1 і 2 та є коренем рівняння.

Отже, корінь рівняння $\frac{6}{x} = x^2$ міститься між числами 1 і 2.
Відповідь: між числами 1 і 2.



Мал. 13.4

Як називають графік функції $y = x^2$?
Сформулюйте властивості функції $y = x^2$.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

13.1. (*Усно.*) Гіперболою, параболою чи прямою є графік функції:

1) $y = \frac{8}{x}$; 2) $y = 8x$; 3) $y = 8$;
4) $y = x^2$; 5) $y = 5x - 4$; 6) $y = -\frac{6}{x}$?

13.2. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y, що відповідає значенням $x = -3$; 0; 5.

13.3. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y, що відповідає значенням $x = -2;\ 1;\ 6$.

2

13.4. За графіком функції $y = x^2$ (мал. 13.2) знайдіть:
1) значення y, що відповідає значенню $x = -2{,}5;\ -1;\ 1{,}5;\ 3$;
2) значення x, якому відповідає значення $y = 1;\ 3{,}5;\ 9$;
3) кілька значень x, для яких значення функції більші за 2; менші від 2.

13.5. Використовуючи графік функції $y = x^2$ (мал. 13.2), знайдіть:
1) значення y, що відповідає значенню $x = -3;\ -0{,}5;\ 2{,}5$;
2) значення x, для якого значення $y = 4;\ 5$;
3) кілька значень x, для яких значення функції менші від 1; більші за 1.

13.6. Побудуйте графік функції $y = x^2$, якщо $-1 \leqslant x \leqslant 4$.

13.7. Побудуйте графік функції $y = x^2$, якщо $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

13.8. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку:
1) $A(-1;\ -1)$; 2) $B(-5;\ 25)$;
3) $C(0;\ 0)$; 4) $D(25;\ 5)$?

13.9. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

1) $A(-4;\ 16)$; 2) $B(16;\ -4)$; 3) $C\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$; 4) $D(0;\ 2)$?

3

13.10. Знайдіть область значень функції $y = x^2$, якщо:
1) $-3 \leqslant x \leqslant 0$;
2) $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

13.11. Порівняйте значення функції $y = x^2$, якщо:
1) $x = 2{,}6$ і $x = -2{,}6$; 2) $x = -1{,}9$ і $x = 1{,}8$;
3) $x = 0$ і $x = -3{,}5$; 4) $x = -1{,}1$ і $x = 1{,}2$.

13.12. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = 3x$; 2) $x^2 = -\frac{8}{x}$.

13.13. Розв'яжіть графічно рівняння:
1) $x^2 = 4$; 2) $x^2 = -2x$.

4

13.14. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x + 1}$; 2) $y = \dfrac{4x^2 - x^4}{4 - x^2}$.

13.15. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{x^3}{x}$; 2) $y = \dfrac{x^2 - x^4}{1 - x^2}$.

Вправи для повторення

13.16. Для яких значень a справджується рівність:

1) $a^2 = (-a)^2$; 2) $a^2 = |a|^2$; 3) $a^2 = -a^2$; 4) $(-a)^2 = -a^2$?

13.17. Знайдіть:

1) найменше значення виразу $x^2 - 19$; $18 + (x - 3)^2$;

2) найбільше значення виразу $17 - x^2$; $-9 - (x + 7)^2$.

Для яких значень x досягається це значення?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

13.18. Обчисліть:

1) $25^2 + (-6)^2$;
2) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(1\frac{3}{5}\right)^2$;
3) $0{,}01^2 : (-0{,}1)^2$;
4) $(-4)^2 \cdot (-0{,}5)^2$.

13.19. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:

1) 9 см^2;

2) 0,25 м^2.

13.20. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 16 = 0$;

2) $x^2 = \frac{4}{9}$.

13.21. 1) Побудуйте графіки функцій $y = x^2$ і $y = 9$ та знайдіть координати точок їх перетину.

2) Скільки точок перетину мають графіки функцій $y = x^2$ і $y = 0$?

3) Скільки точок перетину мають графіки функцій $y = x^2$ і $y = a$, де $a > 0$?

4) Скільки точок перетину мають графіки функцій $y = x^2$ і $y = a$, де $a < 0$?

Життєва математика

13.22. Автомобільний двигун за одну годину роботи спалює 200 л кисню. Добова норма для дихання однієї людини становить 80 л кисню. Скільки добових норм кисню спалюють щоденно 200 автомобілів, якими мешканці деякого населеного пункту їздять на роботу в сусідній населений пункт, за умови, що шлях в один бік займає чверть години?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

13.23. Один годинник зі стрілками поспішає на 1 хв за добу, а другий – відстає на 30 с за добу. Зараз обидва годинники показують однаковий час. Через скільки діб вони знову покажуть однаковий час?

§ 14. Арифметичний квадратний корінь

1. Квадратні корені

Якщо відомо сторону квадрата, то легко можна знайти його площу. Водночас часто доводиться розв'язувати й обернену задачу: за відомою площею квадрата знаходити його сторону.

Приклад 1. Площа квадрата дорівнює 16 см^2. Знайти сторону квадрата.

Розв'язання. Нехай сторона квадрата дорівнює x см, тоді його площа дорівнює x^2 см^2. Маємо рівняння: $x^2 = 16$. У нього два корені: числа 4 і -4. Справді, $4^2 = 16$ і $(-4)^2 = 16$. Оскільки довжина сторони квадрата не може бути від'ємним числом, то умову задачі задовольняє лише один з коренів рівняння – число 4. Отже, довжина сторони квадрата дорівнює 4 см.

Корені рівняння $x^2 = 16$, тобто числа, квадрати яких дорівнюють 16, називають ***квадратними коренями*** із числа 16.

Квадратним коренем із числа a називають число, квадрат якого дорівнює a.

Наприклад, квадратними коренями із числа 100 є числа 10 і -10, бо $10^2 = 100$ і $(-10)^2 = 100$. Квадратним коренем із числа 0 є число 0, бо $0^2 = 0$. Квадратного кореня із числа -16 ми не знайдемо, оскільки серед відомих нам чисел не існує такого числа, квадрат якого дорівнював би -16.

2. Арифметичний квадратний корінь

Число 4, що є невід'ємним коренем рівняння $x^2 = 16$, називають ***арифметичним квадратним коренем*** із числа 16.

Арифметичним квадратним коренем із числа a називають таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.

Арифметичний квадратний корінь із числа a позначають $\sqrt{a}$ ($\sqrt{}$ – знак арифметичного квадратного кореня, або радикал). Вираз, що стоїть під знаком кореня, називають ***підкореневим виразом***. Запис $\sqrt{a}$ читають так: *квадратний корінь із числа a* (слово *арифметичний* під час читання домовилися не вживати, оскільки **в школі розглядають лише арифметичні корені).**

Приклад 2. 1) $\sqrt{81} = 9$, оскільки $9 \geqslant 0$ і $9^2 = 81$;

2) $\sqrt{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$ і $0^2 = 0$;

3) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, оскільки $\frac{2}{3} \geqslant 0$ і $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$;

4) $\sqrt{1\frac{24}{25}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$, оскільки $\frac{7}{5} \geqslant 0$ і $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} = 1\frac{24}{25}$.

Узагалі рівність $\sqrt{a} = x$ є правильною, якщо виконуються дві умови: 1) $x \geqslant 0$; 2) $x^2 = a$.

Оскільки $x^2 \geqslant 0$ для всіх значень змінної x, то $a \geqslant 0$.

Вираз $\sqrt{a}$ не має змісту, якщо $a < 0$.

Наприклад, не мають змісту вирази $\sqrt{-1}$; $\sqrt{-2{,}9}$.

3. Добування квадратного кореня

Дію знаходження арифметичного значення квадратного кореня називають ***добуванням квадратного кореня***. З невеликих чисел квадратний корінь бажано добувати усно. Добувати квадратний корінь з більших чисел допоможе таблиця квадратів двоцифрових натуральних чисел на форзаці підручника або калькулятор.

Приклад 3. Знайти значення кореня $\sqrt{4096}$.

Розв'язання. За таблицею квадратів двоцифрових натуральних чисел маємо $64^2 = 4096$. Тому $\sqrt{4096} = 64$.

Приклад 4. Обчислити $\sqrt{37^2 - 12^2}$.

Розв'язання. Спочатку треба знайти значення виразу $37^2 - 12^2$, а потім добути з нього корінь:

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1369 - 144} = \sqrt{1225} = 35.$$

Відповідь: 35.

4. Рівняння $\sqrt{x} = m$

Розглянемо рівняння $\sqrt{x} = m$, де m – деяке число. Якщо $m \geqslant 0$, то з означення квадратного кореня слідує, що $x = m^2$. Якщо $m < 0$, то рівняння не має розв'язків, оскільки за означенням число $\sqrt{x}$ – невід'ємне.

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння $\sqrt{x} = m$ за допомогою схеми:

$\sqrt{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{m}$, m – число

Якщо $m \geqslant 0$, то $x = m^2$

Якщо $m < 0$, то коренів немає

Приклад 5. Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{x} = 7$; 2) $\sqrt{x} = -3$; 3) $\sqrt{2x-1} = 5$.

Розв'язання.

1) $x = 7^2$,
$x = 49$;

2) розв'язків немає;

3) $2x - 1 = 5^2$,
$2x = 26$,
$x = 13$.

Відповідь: 1) 49; 2) розв'язків немає; 3) 13.

Що називають квадратним коренем із числа a? Що називають арифметичним квадратним коренем із числа a? Для яких значень a вираз $\sqrt{a}$ не має змісту? Чи має розв'язки рівняння $\sqrt{x} = m$, якщо $m \geqslant 0$, $m < 0$, і якщо має, то які?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

14.1. (*Усно.*) Чи існує квадратний корінь із числа:
1) 9; 2) 16; 3) –4; 4) 0?

14.2. Знайдіть значення квадратного кореня із числа:
1) 4; 2) 25.

14.3. Знайдіть значення квадратного кореня із числа:
1) 0; 2) 1; 3) 36.

14.4. (*Усно.*) Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{1}$; 2) $\sqrt{0}$; 3) $\sqrt{-9}$?

14.5. Чи має зміст вираз: 1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{-49}$?

14.6. Доведіть, що число:
1) 2 є арифметичним квадратним коренем із числа 4;
2) –2 не є арифметичним квадратним коренем із числа 4;
3) 0,1 є арифметичним квадратним коренем із числа 0,01;
4) 0,2 не є арифметичним квадратним коренем із числа 0,4.

14.7. Доведіть, що:

1) $\sqrt{169} = 13$; 2) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.

2

14.8. Обчисліть:

1) $\sqrt{16}$; 2) $\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{0,25}$; 4) $\sqrt{6400}$;

5) $\sqrt{0,09}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{121}}$; 7) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 8) $\sqrt{20\frac{1}{4}}$.

14.9. Обчисліть:

1) $\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{36}$; 3) $\sqrt{0,16}$; 4) $\sqrt{4900}$;

5) $\sqrt{0,04}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; 7) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; 8) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

14.10. Чи правильна рівність:

1) $\sqrt{900} = 30$; 2) $\sqrt{4} = -2$;
3) $\sqrt{0,9} = 0,3$; 4) $\sqrt{0,64} = 0,8$?

14.11. За допомогою таблиці квадратів двоцифрових натуральних чисел або калькулятора знайдіть:

1) $\sqrt{1296}$; 2) $\sqrt{9409}$; 3) $\sqrt{2916}$; 4) $\sqrt{30,25}$.

14.12. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{64} + \sqrt{25}$; 2) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{0,36}$; 3) $2\sqrt{100} - \sqrt{144}$;
4) $\sqrt{81} : \sqrt{0,01}$; 5) $-5\sqrt{0,64} + 3,9$; 6) $\sqrt{5^2 - 25}$;
7) $\sqrt{6^2 + 8^2}$; 8) $\sqrt{0,25 - 0,4^2}$; 9) $\sqrt{2(0,2^2 + 0,46)}$.

14.13. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{49} + \sqrt{9}$; 2) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{100}$; 3) $2\sqrt{121} - \sqrt{81}$;
4) $\sqrt{64} : \sqrt{0,25}$; 5) $-5\sqrt{0,36} + 2,8$; 6) $\sqrt{10^2 - 8^2}$;
7) $\sqrt{3^2 + 4^2}$; 8) $\sqrt{0,3^2 - 0,09}$; 9) $\sqrt{5(0,4^2 + 0,64)}$.

14.14. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{12 + a}$, якщо $a = 4; -8; -12$;
2) $\sqrt{m + n}$, якщо $m = 0{,}09$; $n = 0{,}07$;
3) $x + 4\sqrt{x}$, якщо $x = 49; 121$;
4) $3\sqrt{b} - b$, якщо $b = 1{,}96; 0{,}04$.

14.15. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{16 - b}$, якщо $b = -9; 15$;
2) $2\sqrt{m} - m$, якщо $m = 1{,}69; 0{,}49$.

14.16. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = 0$; 3) $\sqrt{x} = -2$;
4) $\sqrt{x} - 3 = 0$; 5) $2\sqrt{x} = 8$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt{x} = 2$.

14.17. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 1$; 2) $\sqrt{x} = -3$; 3) $\sqrt{x} - 5 = 0$; 4) $3\sqrt{x} = 21$.

14.18. Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{12 \cdot 14 - 13^2}$; 2) $\sqrt{2009^2 - 2008^2}$; 3) $\sqrt{1000^2 - 1001^2}$?

14.19. Для яких значень x має зміст вираз:

1) $\frac{5}{\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{x^2}$; 3) $\sqrt{x^5}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{-x}}$?

14.20. Для яких значень y має зміст вираз:

1) $\sqrt{2y}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{y^3}}$; 3) $\sqrt{y^6}$; 4) $\sqrt{-y}$?

14.21. Розв'яжіть рівняння:

1) $3\sqrt{x} + 7 = 0$; 2) $2\sqrt{\dfrac{x}{8}} - 4 = 0$;

3) $\dfrac{16}{\sqrt{x+3}} = 4$; 4) $7\sqrt{2x-5} - 14 = 0$.

14.22. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1}{2}\sqrt{3x} - 3 = 0$; 2) $2\sqrt{\dfrac{x}{3}} + 6 = 0$;

3) $\dfrac{14}{\sqrt{2x}} = 28$; 4) $2\sqrt{2x+7} - 6 = 0$.

4 **14.23.** Для яких значень a має зміст вираз:

1) $\sqrt{-a^2}$; 2) $\sqrt{-(a+3)^2}$; 3) $\sqrt{a^{10}+1}$; 4) $\dfrac{\sqrt{a}}{a-3}$?

14.24. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{|2x-1|} = 3$; 2) $\sqrt{5+\sqrt{x}} = 3$; 3) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}} = 2$.

14.25. Розв'яжіть рівняння: 1) $\sqrt{|2x+3|} = 5$; 2) $\sqrt{9+\sqrt{x}} = 4$.

Вправи для повторення

14.26. Спростіть вираз: $\dfrac{4a}{a+2} - (a-2)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{(a-2)^2} + \dfrac{2}{a^2-4}\right)$.

14.27. Розв'яжіть рівняння з двома змінними:

1) $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 0$; 2) $|x+2| + y^2 + 2y + 1 = 0$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

14.28. Подайте у вигляді звичайного дробу або мішаного числа:
1) 0,3; 2) 0,25; 3) 1,2; 4) 2,5.

14.29. Подайте десятковим дробом:

1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{3}{4}$; 3) $2\dfrac{1}{5}$; 4) $3\dfrac{1}{4}$.

14.30. Запишіть звичайний дріб у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу:

1) $\dfrac{2}{3}$; 2) $\dfrac{3}{11}$; 3) $\dfrac{7}{9}$; 4) $\dfrac{5}{6}$.

Життєва математика

14.31. Пуд – старовинна одиниця маси, яка вживалася в Україні з княжих часів і аж до впровадження метричної системи мір. Її використовували для визначення врожайності або під час заготівлі сільськогосподарських продуктів: для вимірювання збіжжя, борошна, солі, меду тощо. Знайдіть в інтернеті, скільком кілограмам дорівнює 1 пуд. З'ясуйте, скільки тонн картоплі зібрала родина зі своєї земельної ділянки, якщо, за словами найстаршого члена родини, урожай картоплі склав 150 пудів.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

14.32. Чи існують такі прості числа x, y, z і t, для яких має місце рівність $xyzt + 4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$?

§ 15. Множина. Числові множини

1. Множина та її елементи

Поняття множини є одним з основних понять математики. Під поняттям ***множини*** будемо розуміти сукупність об'єктів, що мають спільну природу (або об'єднаних за спільною ознакою), самі об'єкти при цьому будемо називати ***елементами множини***.

Зазвичай множини позначають великими латинськими літерами. Якщо, наприклад, множина A складається із чисел 1, 2, 3, а множина B – зі знаків @ і !, то це записують так: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{@; !\}$. Числа 1, 2, 3 – елементи множини A, а знаки @ і ! – елементи множини B. Той факт, що число 1 належить множині A, записують за допомогою вже відомого нам символа $\in$, а саме: $1 \in A$. Той факт, що число 1 не належить множині B, записують так: $1 \notin B$.

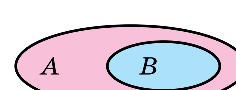
Множини, кількість елементів яких можна виразити натуральним числом, називають ***скінченними***.

Множину, яка не містить жодного елемента, називають ***порожньою множиною***. Її позначають символом $\varnothing$. Так, наприклад, порожньою множиною є множина коренів рівняння $|x| = -1$. Це можна записати так: $x \in \varnothing$.

Множини, кількість елементів яких не можна виразити натуральним числом і які не є порожніми, називають ***нескінченними***.

2. Підмножина

Якщо кожен елемент множини B є елементом множини A, то кажуть, що множина B є підмножиною множини A.



Мал. 15.1

Записують це так: $B \subset A$. Схематичну ілюстрацію цього факту подано на малюнку 15.1.

Приклад 1. Нехай $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2\}$, $C = \{4; 5\}$. Тоді множина B є підмножиною множини A, тобто $B \subset A$. Множина C не є підмножиною множини A, оскільки множина C містить елемент – число 5, що не є елементом множини A.

Вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини, тобто $\varnothing \subset A$.

3. Раціональні числа

Цілі числа і дробові числа утворюють множину ***раціональних чисел***.

Множину натуральних чисел позначають літерою $\boldsymbol{N}$, множину цілих чисел – літерою $\boldsymbol{Z}$, множину раціональних чисел – літерою $\boldsymbol{Q}$.

Можна стверджувати, що $5 \in N$, $\frac{2}{3} \notin Z$, $-7 \in Z$, $@ \notin Q$.

$\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ і $\boldsymbol{Q}$ є нескінченними множинами.

Будь-яке раціональне число можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, n – натуральне число.

Наприклад, $9 = \frac{9}{1}$; $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$; $-5 = \frac{-5}{1}$; $-0,2 = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}$.

Раціональні числа можна також подати у вигляді десяткового дробу. Для цього достатньо чисельник дробу поділити на його знаменник. Наприклад,

$$\frac{3}{8} = 0,375; \qquad \frac{-5}{4} = -1,25; \qquad \frac{8}{33} = 0,242424\ldots = 0,(24).$$

В останньому випадку ми отримали нескінченний десятковий періодичний дріб. Дроби $\frac{3}{8}$ і $\frac{-5}{4}$ також можна подати у вигляді нескінченних десяткових періодичних дробів, дописавши праворуч як десяткові знаки нескінченну кількість нулів:

$$\frac{3}{8} = 0,375 = 0,375000\ldots;$$

$$\frac{-5}{4} = -1,25 = -1,25000\ldots$$

Отже,

кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу.

Справджується й обернене твердження:

кожний нескінченний десятковий періодичний дріб є записом деякого раціонального числа.

Наприклад,

$$1{,}2000\ldots = 1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}; \qquad 0{,}(3) = \frac{1}{3}; \qquad -1{,}(15) = -1\frac{5}{33}.$$

У правильності цих рівностей легко переконатися, виконавши відповідне ділення.

4. Ірраціональні числа

Але в математиці існують числа, які не можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, а n – натуральне.

Числа, які не можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, а n – натуральне, називають ***ірраціональними числами***.

Префікс *ір* означає заперечення, тобто *ірраціональні* – означає *не* раціональні.

Наприклад, ірраціональними є числа π, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{7}$ тощо. Наближені значення таких чисел можна знаходити з певною точністю (тобто округленими до певного розряду) за допомогою калькулятора або комп'ютера:

$$\pi \approx 3{,}1415926; \qquad \sqrt{2} \approx 1{,}4142135; \qquad -\sqrt{7} \approx -2{,}6457513.$$

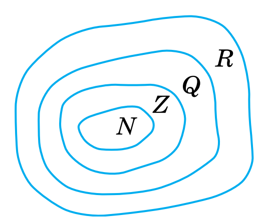
Кожне ірраціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового неперіодичного дробу.

5. Дійсні числа

Раціональні числа разом з ірраціональними числами утворюють множину ***дійсних чисел***.

Множину дійсних чисел позначають літерою $\boldsymbol{R}$.

Оскільки кожне натуральне число є цілим числом, то множина $\boldsymbol{N}$ є підмножиною множини $\boldsymbol{Z}$. Аналогічно множина $\boldsymbol{Z}$ є підмножиною множини $\boldsymbol{Q}$, а множина $\boldsymbol{Q}$ – підмножиною множини $\boldsymbol{R}$ (мал. 15.2).



Мал. 15.2

Ірраціональні числа, які записано у вигляді нескінченних неперіодичних десяткових дробів, порівнюють між собою за тими самими правилами, що й скінченні десяткові дроби. Наприклад,

$$\sqrt{2} > 1{,}4 \text{ (бо } \sqrt{2} \approx 1{,}41); \qquad -\sqrt{7} < -2{,}6 \text{ (бо } -\sqrt{7} \approx -2{,}63).$$

6. Обчислення значень виразів з дійсними числами

У задачах практичного змісту дійсні числа (для виконання арифметичних дій з ними) замінюють на їхні наближені значення, округлені до певного розряду.

Приклад 2. Обчислити $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3} + \sqrt{3}$ з точністю до тисячних.

Розв'язання.

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3} + \sqrt{3} \approx 2{,}3562 + 0{,}3333 + 1{,}7321 = 4{,}4218 \approx 4{,}422.$$

Зауважимо, що для додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня дійсних чисел діють усі властивості та обмеження, що й для дій із раціональними числами.

Вирази, що містять змінну під знаком арифметичного квадратного кореня, називають ***ірраціональними виразами***.

А ще раніше...

Поняття числа з'явилося дуже давно. Воно є одним з найзагальніших понять математики. Потреба у вимірюваннях та підрахунках зумовила появу додатних раціональних чисел. Саме тоді виникли і використовувалися натуральні числа та дробові числа, які розглядали як відношення натуральних чисел.

Наступним етапом розвитку поняття числа є введення у практику від'ємних чисел. У Давньому Китаї ці числа з'явилися у II ст. до н. е. Там уміли додавати і віднімати від'ємні числа. Від'ємні числа тлумачили як борг, а додатні – як майно. В Індії у VII ст. ці числа сприймали так само, але ще й знали, як їх множити і ділити.

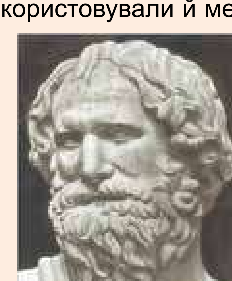
Давні вавилоняни ще близько 4 тис. років тому знали відповідь на запитання: «Якою має бути сторона квадрата, щоб його площа дорівнювала S?». Вони склали таблиці квадратів чисел та квадратних коренів. Вавилоняни використовували й метод добування наближеного значення квадратного кореня із числа S, яке не є квадратом натурального числа. Суть методу полягала в тому, що число S записували у вигляді $a^2 + b$, де число b було досить малим порівняно з a^2, і застосовували формулу

$$\sqrt{S} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

Наприклад, за цим методом:

$$\sqrt{102} = \sqrt{10^2 + 2} \approx 10 + \frac{2}{2 \cdot 10} = 10{,}1.$$

Перевіримо точність результату: $10{,}1^2 = 102{,}01$.



Герон Александрійський (I ст. н. е.)

Такий метод обчислення наближеного значення квадратного кореня використовувався й у Давній Греції. Його детально описав *Герон Александрійський* (I ст. н. е.).

В епоху Відродження (XV – поч. XVII ст.) європейські математики позначали корінь латинським словом *Radix* (корінь), потім – скорочено – літерою *R*. Так з'явився термін «радикал», яким називають знак кореня. Згодом для позначення кореня стали використовувати крапку, а потім ромбик. Через деякий час – уже знак $\vee$ та горизонтальну риску над підкореневим виразом. Згодом знак $\vee$ і риску було об'єднано, і сучасні математики стали використовувати знак квадратного кореня у звичному нам вигляді: $\sqrt{}$.

Які числа утворюють множину раціональних чисел? ○ Які числа утворюють множину дійсних чисел? ○ У вигляді якого дробу можна подати будь-яке раціональне число? ○ Як можна записати кожний нескінченний десятковий періодичний дріб? ○ Які числа називають ірраціональними? ○ У якому вигляді можна подати кожне ірраціональне число?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

15.1. (*Усно.*) Чи правильно, що:

1) 5 – натуральне число;
2) $-2{,}1$ – ціле число;
3) $\sqrt{3}$ – раціональне число;
4) $-\dfrac{5}{7}$ – дійсне число?

15.2. Із чисел $\sqrt{7}$; 0,222...; 52; $-2{,}(4)$; π; 19; $-3{,}7$; 0; $-\sqrt{5}$; $-2\dfrac{1}{9}$ випишіть:

1) натуральні числа;
2) цілі невід'ємні числа;
3) раціональні від'ємні числа;
4) ірраціональні числа.

15.3. Із чисел 8; $-\sqrt{7}$; -5; $\dfrac{2}{3}$; $\sqrt{17}$; $3{,}(7)$; $\sqrt{13}$; $-1\dfrac{1}{3}$; 0; 5,137 випишіть:

1) натуральні числа;
2) цілі недодатні числа;
3) раціональні додатні числа;
4) ірраціональні числа.

2

15.4. Подайте число як відношення цілого числа до натурального:

1) 31; 2) -8; 3) $2\dfrac{1}{7}$; 4) $-5{,}1$.

15.5. Подайте число як відношення цілого числа до натурального:

1) -21; 2) 10; 3) $-3\dfrac{1}{5}$; 4) 2,8.

15.6. З множини $\left\{\dfrac{1}{8};\ \dfrac{7}{9};\ \dfrac{7}{3};\ \dfrac{5}{5};\ \dfrac{2}{3};\ \dfrac{10}{1}\right\}$ виділіть підмножину:

1) правильних дробів;
2) неправильних дробів.

15.7. З множини $\{27;\ 36;\ 48;\ 19;\ 2;\ 11\}$ виділіть підмножину:

1) парних чисел;
2) непарних чисел.

15.8. Подайте число $\frac{2}{33}$ у вигляді нескінченного десяткового дробу й округліть його:
1) до сотих; 2) до тисячних.

15.9. Подайте число $\frac{4}{11}$ у вигляді нескінченного десяткового дробу й округліть його:
1) до сотих; 2) до тисячних.

15.10. (*Усно.*) Чи правильно, що:
1) $7 \notin \boldsymbol{N}$; 2) $10 \in \boldsymbol{Z}$; 3) $5 \notin \boldsymbol{Q}$; 4) $32 \in \boldsymbol{R}$;
5) $-3{,}9 \notin \boldsymbol{N}$; 6) $-9{,}2 \in \boldsymbol{Q}$; 7) $-3{,}17 \notin \boldsymbol{R}$; 8) $\sqrt{3} \in \boldsymbol{Q}$;
9) $\sqrt{64} \in \boldsymbol{N}$; 10) $-\sqrt{27} \notin \boldsymbol{R}$; 11) $\sqrt{\frac{4}{9}} \notin \boldsymbol{Z}$; 12) $\sqrt{1\frac{7}{9}} \in \boldsymbol{Q}$?

15.11. Порівняйте:
1) $1{,}366$ і $1{,}636$; 2) $-2{,}63$ і $-2{,}36$; 3) $-\frac{1}{17}$ і 0;
4) π і $3{,}2$; 5) $-\pi$ і $-3{,}1$; 6) $1{,}7$ і $1{,}(7)$;
7) $-1{,}41$ і $-\sqrt{2}$; 8) $\sqrt{3}$ і $1{,}8$; 9) $2\frac{5}{13}$ і $2{,}(39)$.

15.12. Порівняйте:
1) $-2{,}17$ і $-2{,}71$; 2) 0 і $\frac{1}{16}$; 3) $2{,}(3)$ і $2{,}3$;
4) $\sqrt{2}$ і $1{,}4$; 5) $-\sqrt{3}$ і $-1{,}7$; 6) $\frac{1}{11}$ і $0{,}(08)$.

15.13. Знайдіть наближене значення виразу, округливши значення кореня до сотих:
1) $\sqrt{17} + 2{,}12$; 2) $3{,}18 - \sqrt{5}$.

15.14. Знайдіть наближене значення виразу, округливши значення кореня до сотих:
1) $\sqrt{3} + 4{,}17$; 2) $4{,}82 - \sqrt{11}$.

15.15. Множина A складається з коренів рівняння $0x = 7$. Що це за множина?

3

15.16. Чи правильно, що $A \subset B$, якщо:
1) $A = \{1\}$; $B = \{1;\ 3;\ 5\}$;
2) $A = \{\triangle;\ @\}$; $B = \{\triangle;\ \square;\ !\}$;
3) $A = \varnothing$; $B = \{1;\ 2;\ 3\}$;
4) $A = \{\alpha;\ \beta;\ \gamma\}$; $B = \{\alpha\}$;
5) A – множина простих чисел; B – множина натуральних чисел;
6) A – множина цілих чисел; B – множина натуральних чисел, кратних числу 5?

15.17. Чи правильно, що $C \subset D$, якщо:

1) $C = \{1;\ 7\}$; $D = \{1;\ 5;\ 17\}$;
2) $C = \{а;\ б\}$; $D = \{а;\ б;\ в;\ г\}$;
3) $C = \{m;\ n;\ l\}$; $D = \varnothing$;
4) $C = \{\Delta;\ \mathrm{O}\}$; $D = \{\Delta;\ \mathrm{O}\}$?

15.18. Розмістіть у порядку спадання числа: 0,11; 0,(1); 0,01; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{2}$.

15.19. Розмістіть у порядку зростання числа: 0,(2); 0,22; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; 0,02.

15.20. Чи правильно, що:
1) сума двох цілих чисел – ціле число;
2) частка двох раціональних чисел – число раціональне;
3) будь-яке ціле число є натуральним;
4) множина дійсних чисел складається із додатних і від'ємних чисел?

15.21. Запишіть три раціональних числа, що містяться між числами 1,55 і 1,(5).

15.22. Запишіть два раціональних числа, що містяться між числами 2,333 і 2,(3).

4 **15.23.** Використовуючи формулу $\sqrt{S} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$, знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює: 1) 39 см^2; 2) 83 дм^2. Порівняйте відповідь із числом, знайденим за допомогою калькулятора.

15.24. Доведіть, що число $\sqrt{2}$ є ірраціональним.

15.25. Доведіть, що число $\sqrt{3}$ є ірраціональним.

Вправи для повторення

15.26. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 16 = 0$;
2) $4x^2 - 9 = 0$;
3) $\frac{1}{16} - x^2 = 0$;
4) $\frac{9}{25} - x^2 = 0$.

15.27. З міст M і N одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі. Відстань між містами дорівнює s км, швидкості автомобілів – v_1 і v_2 (у км/год). Через t год автомобілі зустрілися. Виразіть t через s, v_1 і v_2. Обчисліть значення t, якщо $s = 375$ км, $v_1 = 78$ км/год, $v_2 = 72$ км/год.

Життєва математика

15.28. Одна цигарка руйнує 25 мг вітаміну С. Якщо людина не курить, але перебуватиме в приміщенні, де курять інші, упродовж години, то для неї це все одно, що викурити й самій 4 цигарки. Скільки вітаміну С втратить Марина, якщо перебуватиме в такому приміщенні 1,5 год?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

15.29. Два гравці по черзі беруть з купки камінці. За правилами гри дозволяється за один хід брати 1, 2, 4, 8, ... (будь-який степінь двійки) камінців. Виграє той, хто візьме останній камінець. Хто переможе в цій грі за правильної стратегії, якщо початкова кількість камінців у купці дорівнюватиме:
1) 2016; 2) 2017?

§ 16. Тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$, $a \geqslant 0$. Рівняння $x^2 = a$

1. Тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$, $a \geqslant 0$

Нагадаємо, що для всіх значень $a \geqslant 0$ рівність $\sqrt{a} = x$ є правильною, якщо виконуються дві умови: 1) $x \geqslant 0$; 2) $x^2 = a$. Підставивши в останню рівність замість x його запис у вигляді $\sqrt{a}$, одержимо тотожність

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Для будь-якого $a \geqslant 0$ справджується тотожність

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Приклад 1. Обчислити:

1) $(\sqrt{7})^2$; 2) $(-\sqrt{11})^2$; 3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{18}\right)^2$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

Розв'язання. 1) $(\sqrt{7})^2 = 7$;

2) $(-\sqrt{11})^2 = (-1)^2 \cdot (\sqrt{11})^2 = 1 \cdot 11 = 11$;

3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{18}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\sqrt{18})^2 = \frac{1}{4} \cdot 18 = 4{,}5$;

4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2} = \frac{3}{4}$.

Відповідь: 1) 7; 2) 11; 3) 4,5; 4) $\frac{3}{4}$.

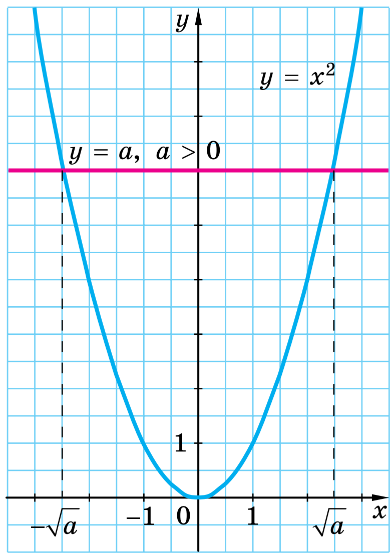
2. Рівняння $x^2 = a$, де a – деяке число

Розглянемо рівняння $x^2 = a$, де a – деяке число.

Оскільки квадрат числа не може дорівнювати від'ємному числу, то, коли $a < 0$, рівняння $x^2 = a$ не має розв'язків, що можна записати так: $x \in \varnothing$.

Якщо $a = 0$, то єдиним коренем рівняння $x^2 = 0$ є число 0.

Якщо $a > 0$, то коренями рівняння $x^2 = a$ є числа $\sqrt{a}$ і $-\sqrt{a}$. Справді, $(\sqrt{a})^2 = a$ і $(-\sqrt{a})^2 = a$. Аби впевнитися, що рівняння $x^2 = a$, де $a > 0$, інших коренів не має, звернімося до графічної інтерпретації його розв'язування. Побудуємо графіки функцій $y = x^2$ та $y = a$, де $a > 0$ (мал. 16.1), графіки перетнулися лише двічі: у точках з абсцисами $\sqrt{a}$ і $-\sqrt{a}$.



Мал. 16.1

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння $x^2 = a$ у вигляді схеми:

$\boldsymbol{x^2 = a}$, $\boldsymbol{a}$ – **число**

Якщо $a > 0$, то $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$	Якщо $a = 0$, то $x = 0$	Якщо $a < 0$, то коренів немає

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = -7$; 3) $x^2 = 7$; 4) $(2x + 1)^2 = 25$.

Розв'язання. 1) $x_1 = \sqrt{9} = 3$, $x_2 = -\sqrt{9} = -3$;

2) рівняння не має коренів, тобто $x \in \varnothing$;

3) $x_1 = \sqrt{7}$, $x_2 = -\sqrt{7}$. Ці корені є ірраціональними числами;

4) маємо: $2x + 1 = \sqrt{25}$, або $2x + 1 = -\sqrt{25}$,

$$\begin{array}{ll} 2x + 1 = 5, & 2x + 1 = -5, \\ 2x = 4, & 2x = -6, \\ x = 2; & x = -3. \end{array}$$

Отже, рівняння має два корені: $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

Відповідь: 1) ± 3; 2) $\varnothing$; 3) $\pm\sqrt{7}$; 4) 2; –3.

Для яких значень a є правильною рівність $(\sqrt{a})^2 = a$? Чи має корені рівняння $x^2 = a$, якщо $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$, і якщо має, то скільки?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

16.1. Обчисліть:

1) $(\sqrt{7})^2$; 2) $(\sqrt{0})^2$; 3) $(\sqrt{2,9})^2$; 4) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$.

16.2. Знайдіть значення виразу:

1) $(\sqrt{6})^2$; 2) $(\sqrt{5,3})^2$.

16.3. (*Усно.*) Чи має корені рівняння:

1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = 47$; 3) $x^2 = 0$; 4) $x^2 = -7$?

16.4. Чи має корені рівняння:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = -10$?

2

16.5. Знайдіть значення виразу:

1) $(-\sqrt{7})^2$; 2) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2$; 4) $(-2\sqrt{5})^2$;

5) $-5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$; 6) $0,3 \cdot (-\sqrt{10})^2$; 7) $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2$; 8) $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$.

16.6. Обчисліть:

1) $(-\sqrt{11})^2$; 2) $\sqrt{19} \cdot \sqrt{19}$; 3) $(2\sqrt{7})^2$; 4) $\left(-\frac{1}{4}\sqrt{8}\right)^2$;

5) $-7 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$; 6) $0,2 \cdot (-\sqrt{5})^2$; 7) $\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2$; 8) $\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2$.

16.7. Обчисліть:

1) $(\sqrt{15})^2 - 3,8$; 2) $5\left(-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2$;

3) $7 : \left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)^2$; 4) $\frac{1}{8}(-\sqrt{24})^2$.

16.8. Знайдіть значення виразу:

1) $2,7 + (-\sqrt{13})^2$; 2) $8\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right)^2$; 3) $12 : \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$; 4) $\frac{1}{19}(\sqrt{19})^2$.

16.9. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = 0,36$; 3) $x^2 = 121$;

4) $x^2 = -9$; 5) $x^2 = 11$; 6) $x^2 = \frac{4}{9}$.

16.10. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 49$;
2) $x^2 = 0{,}16$;
3) $x^2 = 169$;
4) $x^2 = -4$;
5) $x^2 = 5$;
6) $x^2 = \frac{9}{16}$.

16.11. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^2 - 0{,}05 = 0{,}04$;
2) $24 + x^2 = 25$;
3) $x^2 + 12 = 0$;
4) $\frac{1}{3}x^2 = 7$.

16.12. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 0{,}01 = 0{,}26$;
2) $x^2 - 14 = 2$;
3) $17 - x^2 = 0$;
4) $-\frac{1}{4}x^2 = 5$.

16.13. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

1) $M(\sqrt{5}; 5)$;
2) $N(7; \sqrt{7})$;
3) $P(-\sqrt{3}; 3)$;
4) $T(\sqrt{10}; \sqrt{10})$?

16.14. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:

1) 36 см^2;
2) 49 дм^2;
3) 0,09 м^2;
4) $\frac{25}{36}$ дм^2.

3

16.15. Обчисліть:

1) $(-(\sqrt{5})^2)^2$;
2) $(2\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{2})^2$;
3) $36 \cdot \left(-\frac{1}{3}\sqrt{17}\right)^2 - \frac{1}{5}(2\sqrt{15})^2$;
4) $\sqrt{59{,}29} + \left(\frac{1}{2}\sqrt{34}\right)^2$;
5) $(-3\sqrt{5})^2 - 3(\sqrt{5})^2$;
6) $\left(-\frac{4}{5}\sqrt{\frac{25}{32}}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{9}}\right)^2$.

16.16. Обчисліть:

1) $((-\sqrt{7})^2)^2$;
2) $(3\sqrt{7})^2 - (7\sqrt{3})^2$;
3) $16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2 + \frac{1}{3}(4\sqrt{3})^2$;
4) $\sqrt{70{,}56} - \left(\frac{1}{2}\sqrt{42}\right)^2$;
5) $(5\sqrt{2})^2 - 5 \cdot (-\sqrt{2})^2$;
6) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{10}}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\sqrt{\frac{36}{65}}\right)^2$.

16.17. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2)^2 = 36$;
2) $(y + 3)^2 = 4$;
3) $(x - 1)^2 = 0$;
4) $(x + 3)^2 = 7$;
5) $\left(y - \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{4}{81}$;
6) $(x + 5)^2 = -9$.

16.18. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+1)^2 = 16$; 2) $(y-2)^2 = 25$; 3) $(m+2)^2 = 0$;

4) $(x-2)^2 = 3$; 5) $\left(y - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$; 6) $(m-3)^2 = -4$.

16.19. Наведіть приклад рівняння вигляду $x^2 = a$, де x — змінна, a — число, яке:

1) має один цілий корінь;
2) має два цілих корені;
3) не має коренів;
4) має два раціональних корені;
5) має корені, але вони не є раціональними.

16.20. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+1}{6} = \frac{4}{x-1}$; 2) $(2x-3)^2 + (2x+3)^2 = 20$.

16.21. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-2}{5} = \frac{12}{x+2}$; 2) $(3x+1)^2 + (3x-1)^2 = 4$.

4

16.22. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{7 + \sqrt{2 + x^2}} = 3$; 2) $2\left|x^2 - 5\right| + 3 = 5$.

16.23. Знайдіть корені рівняння:

1) $\sqrt{1 + \sqrt{x^2 + 4}} = 2$; 2) $2\left|x^2 - 4\right| + 1 = 11$.

16.24. Для яких значень b справджується рівність:

1) $(\sqrt{b})^2 = -b$; 2) $(\sqrt{b-4})^2 = b - 4$; 3) $b(\sqrt{b})^2 = b^2$?

16.25. Для яких значень m рівняння $mx^2 = 1$:

1) має два корені; 2) має один корінь; 3) не має коренів?

Вправи для повторення

16.26. Спростіть вираз: $\left(x - \frac{4x-9}{x-2}\right) : \left(2x - \frac{2x}{x-2}\right)$.

16.27. Відомо, що $2x - 4y = 1$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{4}{x-2y}$; 2) $\frac{8y-4x}{5}$; 3) $\frac{x^2-4y^2}{2,5x+5y}$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

16.28. Порівняйте значення виразів:

1) $\sqrt{4 \cdot 9}$ і $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$; 2) $\sqrt{\frac{25}{36}}$ і $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$.

16.29. Знайдіть значення виразу:

1) $|-2,5| + |3,7|$; 2) $\left|\frac{4}{9}\right| \cdot \left|-\frac{3}{16}\right|$.

16.30. Спростіть вираз: 1) $|5a|$, якщо $a \geqslant 0$; 2) $|7b|$, якщо $b < 0$.

Життєва математика

16.31. Початковий розмір депозиту вкладниці склав 20 000 грн. Через два роки вкладниця закрила депозит, отримавши за ним кошти в розмірі 25 088 грн. За якою відсотковою ставкою було відкрито депозит, якщо відсотки нараховуються один раз на рік на поточний рахунок (так звані «відсотки на відсотки»)?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

16.32. (*Київська математична олімпіада, 1989 р.*) Двоє гравців по черзі здійснюють хід за такими правилами: у клітинках нескінченного аркуша один гравець ставить хрестики, а другий – нулики. Чи може другий гравець грати так, щоб перший ніколи не зміг заповнити хрестиками якийсь квадрат 2×2?

§ 17. Властивості арифметичного квадратного кореня

1. Корінь з добутку

Порівняємо значення виразів $\sqrt{4 \cdot 9}$ і $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$:

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6, \quad \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Маємо: $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$, тобто корінь з добутку двох чисел дорівнює добутку їх коренів. Така властивість справджується для добутку будь-яких двох невід'ємних чисел.

Т Теорема (про корінь з добутку). **Корінь із добутку двох невід'ємних чисел дорівнює добутку коренів із цих чисел, тобто якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то**

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доведення. Оскільки $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то вирази $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ мають зміст, причому $\sqrt{a} \geqslant 0$, $\sqrt{b} \geqslant 0$. Тому $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$. Крім того,

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Маємо: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$ і $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab$. Тоді, за означенням арифметичного квадратного кореня: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. ■

Доведена теорема поширюється і на випадок, коли множників під знаком кореня три і більше.

Наслідок. **Корінь з добутку невід'ємних множників дорівнює добутку коренів із цих множників.**

Доведення. Доведемо цей наслідок, наприклад, для трьох чисел $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. Маємо:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab}\sqrt{c} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}. \blacksquare$$

Зауваження 1. Очевидно, що вираз $\sqrt{ab}$ має зміст за умови, коли $ab \geqslant 0$, тобто коли a і b відміннні від нуля числа, то це числа одного знака, а значить і тоді, коли обидві змінні a і b від'ємні. У цьому разі тотожність, яку ми розглянули вище, набуває вигляду $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$, де $-a \geqslant 0$ і $-b \geqslant 0$. Враховуючи обидва випадки, можна записати, що

$$\boldsymbol{\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}, \text{ де } ab \geqslant 0.}$$

Приклад 1. 1) $\sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30;$

2) $\sqrt{32 \cdot 72} = \sqrt{(16 \cdot 2) \cdot (36 \cdot 2)} = \sqrt{16 \cdot 36 \cdot 4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{4} =$
$= 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48.$

Якщо в рівності $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ поміняти місцями ліву і праву частини, то одержимо тотожність:

$$\boldsymbol{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \text{ де } a \geqslant 0, b \geqslant 0.}$$

Добуток коренів з невід'ємних чисел дорівнює кореню з добутку цих чисел.

Приклад 2. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6.$

2. Корінь з дробу

Розглянемо квадратний корінь з дробу.

Теорема (про корінь з дробу). **Корінь з дробу, чисельник якого є невід'ємним, а знаменник – додатним, дорівнює кореню із чисельника, поділеному на корінь із знаменника, тобто якщо $a \geqslant 0$ і $b > 0$, то**

$$\boldsymbol{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.}$$

Доведення. Оскільки $a \geqslant 0$ і $b > 0$, то вирази $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ мають зміст і $\sqrt{a} \geqslant 0$, $\sqrt{b} > 0$. Тому $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geqslant 0$. Крім того,

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Маємо: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geqslant 0$ і $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$. Тоді, за означенням арифметичного квадратного кореня: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. ■

Приклад 3. 1) $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$; 2) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$.

Зауваження 2. Як і в зауваженні 1 (с. 136), тотожність, яку ми тільки що розглянули, можна записати й так:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}, \text{ де } ab \geqslant 0,\ b \neq 0.$$

Якщо в рівності $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ поміняти місцями ліву і праву частини, то одержимо тотожність:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ де } a \geqslant 0,\ b > 0.$$

Частка, чисельник якої є коренем з невід'ємного числа, а знаменник – коренем з додатного числа, дорівнює кореню із частки цих чисел.

Приклад 4. 1) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$; 2) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{20}{45}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.

3. Корінь із квадрата та степеня

Розглянемо, як добути квадратний корінь із квадрата.

Т Теорема (про корінь із квадрата). **Для будь-якого значення a справджується рівність**

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Доведення. $|a| \geqslant 0$ і $|a|^2 = a^2$ для будь-якого a, тому, за означенням арифметичного квадратного кореня: $\sqrt{a^2} = |a|$. ■

Приклад 5. 1) $\sqrt{7^2} = |7| = 7$; 2) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

Розглянемо квадратний корінь із степеня.

Теорема (про корінь із степеня). **Для будь-якого значення a і натурального числа k справджується рівність**

$$\sqrt{a^{2k}} = |a^k|.$$

Доведення. $\sqrt{a^{2k}} = \sqrt{(a^k)^2}$. За теоремою про корінь з квадрата, маємо: $\sqrt{(a^k)^2} = |a^k|$. Отже, $\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$. ■

Приклад 6. Обчислити: $\sqrt{1,7^4}$.

Розв'язання. $\sqrt{1,7^4} = \sqrt{(1,7^2)^2} = |1,7^2| = 2,89$.

Приклад 7. Спростити вираз: 1) $\sqrt{a^{12}}$; 2) $\sqrt{p^6}$, де $p < 0$.

Розв'язання. 1) $\sqrt{a^{12}} = \sqrt{(a^6)^2} = |a^6|$. Оскільки $a^6 \geqslant 0$ для будь-якого a, то $|a^6| = a^6$. Отже, $\sqrt{a^{12}} = a^6$.

2) $\sqrt{p^6} = \sqrt{(p^3)^2} = |p^3|$. Оскільки $p < 0$, то $p^3 < 0$, а тому $|p^3| = -p^3$. Отже, якщо $p < 0$, то $\sqrt{p^6} = -p^3$.

Відповідь: 1) a^6; 2) $-p^3$.

Сформулюйте і доведіть теорему про корінь з добутку. ○ Чому дорівнює добуток коренів? ○ Сформулюйте і доведіть теорему про корінь з дробу. ○ Чому дорівнює частка коренів? ○ Сформулюйте і доведіть теореми про корінь із квадрата та корінь із степеня.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

17.1. (*Усно.*) Чи правильно обчислено:

1) $\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$; 2) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{25} = \frac{2}{25}$?

17.2. Чи правильно виконано обчислення:

1) $\sqrt{36 \cdot 4} = \sqrt{36} \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$; 2) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$?

2

17.3. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{25 \cdot 9}$; 2) $\sqrt{16 \cdot 900}$; 3) $\sqrt{0,25 \cdot 1,44}$;

4) $\sqrt{0,04 \cdot 169}$; 5) $\sqrt{2,25 \cdot 0,09 \cdot 100}$; 6) $\sqrt{1,96 \cdot 0,01 \cdot 6,25}$.

17.4. Обчисліть:

1) $\sqrt{36 \cdot 49}$; 2) $\sqrt{100 \cdot 4}$; 3) $\sqrt{0,49 \cdot 1,69}$;
4) $\sqrt{0,09 \cdot 196}$; 5) $\sqrt{1,44 \cdot 0,16 \cdot 400}$; 6) $\sqrt{2,89 \cdot 10\,000 \cdot 0,25}$.

17.5. Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; 2) $\sqrt{\frac{121}{400}}$; 3) $\sqrt{\frac{36}{625}}$;
4) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 5) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 6) $\sqrt{44\frac{4}{9}}$.

17.6. Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; 2) $\sqrt{\frac{289}{900}}$; 3) $\sqrt{\frac{9}{784}}$; 4) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; 5) $\sqrt{1\frac{19}{81}}$; 6) $\sqrt{42\frac{1}{4}}$.

17.7. Обчисліть:

1) $\sqrt{0,2^2}$; 2) $\sqrt{(-0,9)^2}$; 3) $2\sqrt{3^2}$; 4) $-3\sqrt{9^2}$;
5) $0,5\sqrt{(-10)^2}$; 6) $-\frac{1}{5}\sqrt{5^2}$; 7) $-3\sqrt{(-7)^2}$; 8) $\frac{2}{7}\sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2}$.

17.8. Обчисліть:

1) $\sqrt{1,7^2}$; 2) $\sqrt{(-0,3)^2}$; 3) $3\sqrt{4^2}$; 4) $-2\sqrt{7^2}$;
5) $\frac{1}{3}\sqrt{(-9)^2}$; 6) $-0,1\sqrt{20^2}$; 7) $-5\sqrt{(-3)^2}$; 8) $\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2}$.

17.9. Подайте вираз у вигляді добутку коренів:

1) $\sqrt{2 \cdot 7}$; 2) $\sqrt{35}$; 3) $\sqrt{17b}$; 4) $\sqrt{6p}$.

17.10. Подайте вираз у вигляді добутку коренів:

1) $\sqrt{3 \cdot 11}$; 2) $\sqrt{15}$; 3) $\sqrt{19a}$; 4) $\sqrt{10b}$.

17.11. Подайте вираз у вигляді частки коренів:

1) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; 2) $\sqrt{3\frac{2}{7}}$; 3) $\sqrt{\frac{7}{m}}$; 4) $\sqrt{\frac{p}{23}}$.

17.12. Подайте вираз у вигляді частки коренів:

1) $\sqrt{\frac{3}{11}}$; 2) $\sqrt{9\frac{1}{2}}$; 3) $\sqrt{\frac{a}{37}}$; 4) $\sqrt{\frac{5}{b}}$.

17.13. Обчисліть значення добутку:

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; 2) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$; 3) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{0,05}$;
4) $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{2,5}$; 5) $\sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{\frac{7}{13}} \cdot \sqrt{\frac{13}{36}}$; 6) $\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{7}}$.

17.14. Обчисліть значення добутку:

1) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$; 2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}$; 3) $\sqrt{0,02}\cdot\sqrt{50}$;

4) $\sqrt{0,4}\cdot\sqrt{0,9}$; 5) $\sqrt{\frac{5}{7}}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{\frac{7}{9}}$; 6) $\sqrt{\frac{11}{12}}\cdot\sqrt{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{11}$.

17.15. Обчисліть значення частки:

1) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{\sqrt{7,5}}{\sqrt{0,3}}$; 3) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{1,5}}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$; 5) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$; 6) $\frac{\sqrt{0,27}}{\sqrt{0,75}}$.

17.16. Обчисліть значення частки:

1) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{2,7}}{\sqrt{0,3}}$; 3) $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{2,5}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}}$; 5) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$; 6) $\frac{\sqrt{0,18}}{\sqrt{1,28}}$.

17.17. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{9^4}$; 2) $\sqrt{2^6}$; 3) $\sqrt{5^8}$;

4) $\sqrt{(-2)^{10}}$; 5) $\sqrt{(-3)^4}$; 6) $\sqrt{(-1)^{12}}$.

17.18. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{10^4}$; 2) $\sqrt{3^6}$; 3) $\sqrt{2^8}$;

4) $\sqrt{(-5)^4}$; 5) $\sqrt{(-1)^{10}}$; 6) $\sqrt{(-2)^{12}}$.

17.19. Замініть вираз йому тотожно рівним:

1) $\sqrt{m^2}$; 2) $4\sqrt{p^2}$; 3) $-0,1\sqrt{a^2}$; 4) $\frac{17}{\sqrt{c^2}}$.

17.20. Замініть вираз йому тотожно рівним:

1) $\sqrt{t^2}$; 2) $-2\sqrt{b^2}$; 3) $\frac{1}{7}\sqrt{x^2}$; 4) $\frac{7}{\sqrt{a^2}}$.

3

17.21. Обчисліть:

1) $\sqrt{4\frac{33}{64}\cdot 52\frac{9}{16}}$; 2) $\sqrt{1\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{1\frac{3}{13}}$;

3) $\sqrt{20^2-16^2}$; 4) $\sqrt{0,85^2-0,84^2}$.

17.22. Обчисліть:

1) $\sqrt{4\frac{21}{25}\cdot 23\frac{73}{81}}$; 2) $\sqrt{1\frac{1}{36}}\cdot\sqrt{1\frac{12}{37}}$;

3) $\sqrt{37^2-12^2}$; 4) $\sqrt{0,25^2-0,24^2}$.

17.23. Обчисліть:

1) $\sqrt{90\cdot 490}$; 2) $\sqrt{72\cdot 32}$; 3) $\sqrt{4,9\cdot 32,4}$;

4) $\sqrt{4,5}\cdot\sqrt{72}$; 5) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{39}$; 6) $\sqrt{22}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{77}$.

17.24. Обчисліть:

1) $\sqrt{40 \cdot 640}$; 2) $\sqrt{45 \cdot 125}$; 3) $\sqrt{14,4 \cdot 8,1}$;
4) $\sqrt{1,6} \cdot \sqrt{90}$; 5) $\sqrt{17} \cdot \sqrt{34} \cdot \sqrt{2}$; 6) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{14}$.

17.25. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{3^4 \cdot 6^2 \cdot (-2)^6}$; 2) $\sqrt{2^{10} \cdot 5^2} - \sqrt{(-4)^4}$;
3) $\sqrt{25^3}$; 4) $\sqrt{9^5}$.

17.26. Обчисліть:

1) $\sqrt{(-2)^4 \cdot 7^2} - \sqrt{(-3)^6}$; 2) $\sqrt{36^3}$.

17.27. Обчисліть, попередньо розклавши підкореневий вираз на прості множники:

1) $\sqrt{12\,544}$; 2) $\sqrt{186\,624}$.

17.28. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{0,36x^2}$, якщо $x \geqslant 0$; 2) $\sqrt{121y^2}$, якщо $y < 0$;
3) $-3\sqrt{\frac{1}{9}p^2}$, якщо $p < 0$; 4) $5\sqrt{x^4}$;
5) $\sqrt{25a^6}$, якщо $a \geqslant 0$; 6) $\sqrt{\frac{25}{49}c^{10}}$, якщо $c < 0$.

17.29. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{0,49p^2}$, якщо $p \geqslant 0$; 2) $\sqrt{\frac{25}{64}m^2}$, якщо $m < 0$;
3) $7\sqrt{b^8}$; 4) $\sqrt{0,01a^{14}}$, якщо $a < 0$.

17.30. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{25m^2n^{12}}$, якщо $m \leqslant 0$;
2) $\sqrt{\frac{49}{169}m^{14}n^{18}}$, якщо $m \geqslant 0$, $n < 0$;
3) $\frac{1}{8}xy^3\sqrt{64x^4y^2}$, якщо $y > 0$;
4) $\sqrt{\frac{p^6m^{12}}{x^8}}$, якщо $p < 0$;
5) $2m^5\sqrt{\frac{p^{20}}{m^2}}$, якщо $m < 0$;
6) $\frac{\sqrt{x^{14}y^{16}z^{26}}}{x^3y^8z^{12}}$, якщо $x > 0$, $z < 0$.

17.31. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{64a^2b^8}$, якщо $a \geqslant 0$;

2) $\frac{1}{10}bc\sqrt{25b^6c^{10}}$, якщо $b < 0$, $c > 0$;

3) $\sqrt{\frac{x^8y^{12}}{z^2}}$, якщо $z < 0$;

4) $3a^2\sqrt{\frac{b^{14}}{a^4}}$, якщо $b > 0$.

4 **17.32.** Відомо, що $x < 0$, $y < 0$. Подайте вираз:

1) $\sqrt{7xy}$ у вигляді добутку коренів;

2) $\sqrt{\frac{2x}{3y}}$ у вигляді частки коренів.

17.33. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(x-y)^2}$, якщо $x \geqslant y$;

2) $\sqrt{(m-n)^2}$, якщо $m < n$;

3) $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$, якщо $x \geqslant 5$;

4) $\sqrt{36 - 12a + a^2}$, якщо $a < 6$;

5) $(x+2)\sqrt{\frac{25}{x^2 + 4x + 4}}$, якщо $x > -2$;

6) $(a-b)\sqrt{\frac{4}{a^2 - 2ab + b^2}}$, якщо $a < b$.

17.34. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(m-2)^2}$, якщо $m \geqslant 2$;

2) $\sqrt{p^2 + 8p + 16}$, якщо $p < -4$;

3) $(a-5)\sqrt{\frac{1}{a^2 - 10a + 25}}$, якщо $a > 5$;

4) $(x-1)\sqrt{\frac{9}{x^2 - 2x + 1}}$, якщо $x < 1$.

17.35. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\sqrt{3}-5)^2} + \left(\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)^2$;

2) $\sqrt{(3-\sqrt{7})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{21}-5)^2}-\sqrt{(\sqrt{21}-4)^2}$; 4) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

17.36. Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{5-\sqrt{8}}\right)^2-\sqrt{(\sqrt{8}-13)^2}$; 2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Вправи для повторення

17.37. Розкладіть многочлен на множники:

1) $2x^2y^3-8xy^5$; 2) $49a^2-36$;

3) $36m^3n+27m^2n^8$; 4) $\frac{25}{49}m^8-n^4$.

17.38. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m^2-4}{6+3m}$; 2) $\frac{a^2+10a+25}{4a+20}$; 3) $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$; 4) $\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}$.

17.39. Доведіть тотожність:

$$\left(\frac{a}{a-6}-\frac{2a}{a^2-12a+36}\right):\frac{a-8}{36-a^2}+\frac{12a}{a-6}=-a.$$

17.40. Побудуйте графік функції $y=3x+\sqrt{x^2}$, якщо $x\leqslant 0$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

17.41. Розкладіть на прості множники число:

1) 18; 2) 72; 3) 175; 4) 448.

17.42. Спростіть вираз:

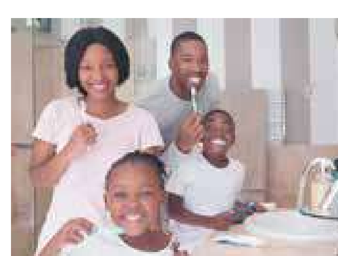
1) $2a+3a$; 2) $7b-b$; 3) $5m+m-7m$.

17.43. Подайте вираз у вигляді многочлена:

1) $a(3a-4)$; 2) $(b-3)(b+2)$.

Життєва математика

17.44. 1) Під час чищення зубів ми часто користуємося постійним потоком води з крана замість того, щоб набрати воду в індивідуальний стакан. Це призводить до марних витрат майже 4 л води щохвилини. Скільки літрів води може заощадити за тиждень родина з 4 осіб, якщо всі вони чистять зуби двічі на день протягом 3 хвилин?



2) *Проєктна діяльність*. Дізнайтеся тариф на 1 м^3 води у вашій місцевості. Обчисліть, скільки коштів може заощадити така родина протягом місяця за умови правильного використання води під час чищення зубів.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

17.45. (*Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.*) Батьки разом із двома дітьми, Ясею (4 роки) та Тарасом (7 років), збираються провести вихідний день у парку атракціонів. Батьки дозволяють кожній дитині відвідати не більше ніж три атракціони і кожний атракціон – лише по одному разу. Відомо, що на атракціони «Електричні машинки» і «Веселі гірки» допускають лише дітей старше 6 років. На «Паровозик» Тарас не піде. Для відвідування будь-якого атракціону потрібно купити квиток для кожної дитини. Скориставшись таблицею, визначте *максимальну* суму коштів (у грн), яку витратять батьки на придбання квитків для дітей.

Назва атракціону	Вартість квитка для однієї дитини, грн
«Веселі гірки»	17
«Паровозик»	16
«Електричні машинки»	20
«Карусель»	12
«Батут»	15
«Дитяча риболовля»	8
«Лебеді»	13

§ 18. Тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені

Розглянемо, які тотожні перетворення можна виконувати з ірраціональними виразами.

1. Винесення множника з-під знака кореня

Скористаємося теоремою про корінь з добутку для перетворення виразу $\sqrt{12}$:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Кажуть, що **множник винесли з-під знака кореня**. У цьому разі з-під знака кореня винесли множник 2.

Приклад 1. Винести множник з-під знака кореня у виразі $\sqrt{x^{11}}$.

Розв'язання. Подамо вираз x^{11} у вигляді добутку $x^{10} \cdot x$, у якому x^{10} є степенем з парним показником. Тоді

$$\sqrt{x^{11}} = \sqrt{x^{10} \cdot x} = \sqrt{x^{10}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{(x^5)^2} \cdot \sqrt{x} = |x^5|\sqrt{x}.$$

Вираз $\sqrt{x^{11}}$ має зміст, якщо $x \geqslant 0$, бо якщо $x < 0$, то й $x^{11} < 0$. Оскільки $x \geqslant 0$, то $x^5 \geqslant 0$. Тому $|x^5| = x^5$.

Отже, $\sqrt{x^{11}} = x^5\sqrt{x}$.

Відповідь: $x^5\sqrt{x}$.

2. Внесення множника під знак кореня

Розглянемо тотожне перетворення, обернене до попереднього. Скористаємося правилом множення коренів:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}.$$

Кажуть, що **множник внесли під знак кореня.** У цьому разі під знак кореня внесли множник 2.

Зауважимо, що під знак кореня можна вносити лише додатний множник.

Приклад 2. Внести множник під знак кореня: 1) $-2\sqrt{3}$; 2) $m\sqrt{5}$.

Розв'язання.

1) $-2\sqrt{3} = -1 \cdot 2\sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{4 \cdot 3} = -\sqrt{12}$.

2) Множник m може набувати будь-яких значень (бути додатним, нулем або від'ємним). Тому слід розглянути два випадки:

якщо $m \geqslant 0$, то $m\sqrt{5} = |m|\sqrt{5} = \sqrt{m^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5m^2}$;

якщо $m < 0$, то $m\sqrt{5} = -|m|\sqrt{5} = -\sqrt{m^2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{5m^2}$.

Відповідь: 1) $-\sqrt{12}$;

2) $\sqrt{5m^2}$, якщо $m \geqslant 0$; $-\sqrt{5m^2}$, якщо $m < 0$.

3. Додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня ірраціональних виразів

Використовуючи властивості множення і ділення коренів, можна виконувати арифметичні дії з виразами, що містять квадратні корені.

Приклад 3. 1) $5\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2} = 35\sqrt{6}$;

2) $7\sqrt{a} \cdot (-3\sqrt{6}) = -21\sqrt{6a}$;

3) $8\sqrt{18} : 4\sqrt{2} = \dfrac{8\sqrt{18}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$;

4) $7\sqrt{x} : (-2\sqrt{x}) = -\dfrac{7\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{7}{2}$.

Використовуючи тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$, де $a \geqslant 0$, ірраціональні вирази можна підносити до степеня.

Приклад 4. 1) $(-5\sqrt{2})^2 = (-5)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50$;

2) $(\sqrt{a})^3 = (\sqrt{a})^2\sqrt{a} = a\sqrt{a}$.

Розглянемо, коли квадратні корені можна додавати.

Приклад 5. Спростити вираз $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$.

Розв'язання. Доданки містять спільний множник $\sqrt{2}$. Винесемо його за дужки та виконаємо дію в дужках: $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(5 + 3) = 8\sqrt{2}$.
Зазвичай розв'язання записують коротше:
$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Зауважимо, що вирази $5\sqrt{2}$ і $3\sqrt{2}$ у цьому прикладі називають *подібними радикалами* (за аналогією до подібних доданків) і додають за правилом зведення подібних доданків.

Приклад 6. Спростити вираз $\sqrt{12a} + \sqrt{48a} - \sqrt{27a}$.

Розв'язання. У кожному з доданків винесемо множник з-під знака кореня, отримаємо суму подібних радикалів:
$\sqrt{12a} + \sqrt{48a} - \sqrt{27a} = \sqrt{4 \cdot 3a} + \sqrt{16 \cdot 3a} - \sqrt{9 \cdot 3a} =$
$= 2\sqrt{3a} + 4\sqrt{3a} - 3\sqrt{3a} = 3\sqrt{3a}$.
Відповідь: $3\sqrt{3a}$.

Приклад 7. Спростити вираз:

1) $(\sqrt{7} + 2\sqrt{3})(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})$; 2) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + \sqrt{15}$.

Розв'язання. Можемо застосувати формули скороченого множення.
1) $(\sqrt{7} + 2\sqrt{3})(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}) = (\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 7 - 4 \cdot 3 = -5$;
2) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + \sqrt{15} = ((2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2) + \sqrt{15} =$
$= 4 \cdot 5 - 4\sqrt{15} + 3 + \sqrt{15} = 23 - 3\sqrt{15}$.
Відповідь: 1) -5; 2) $23 - 3\sqrt{15}$.

4. Скорочення дробів

Приклад 8. Скоротити дріб:

1) $\dfrac{a^2 - 7}{a - \sqrt{7}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}}$.

Розв'язання. 1) Врахувавши, що $7 = (\sqrt{7})^2$, чисельник дробу подамо у вигляді різниці квадратів. Матимемо:

$$\frac{a^2 - 7}{a - \sqrt{7}} = \frac{a^2 - (\sqrt{7})^2}{a - \sqrt{7}} = \frac{(a - \sqrt{7})(a + \sqrt{7})}{a - \sqrt{7}} = a + \sqrt{7}.$$

2) Врахувавши, що $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$, а $3 = (\sqrt{3})^2$, у чисельнику й знаменнику винесемо за дужки спільний множник. Матимемо:

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Відповідь: 1) $a + \sqrt{7}$; 2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

5. Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу

Приклад 9. Перетворити дріб $\frac{a}{\sqrt{5}}$ так, щоб він не містив кореня в знаменнику.

Розв'язання. Враховуючи, що $(\sqrt{5})^2 = 5$, достатньо чисельник і знаменник дробу помножити на $\sqrt{5}$:

$$\frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Відповідь: $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

У такому разі кажуть, що ми *звільнилися від ірраціональності (або позбулися ірраціональності) в знаменнику дробу*.

Приклад 10. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{2}{\sqrt{7}-1}$.

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{7}+1$, щоб у знаменнику отримати формулу скороченого множення різниці двох виразів на їх суму:

$$\frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{7-1} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{7}+1)}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{7}+1}{3}$.

Зауважимо, що вираз $\sqrt{7}+1$ називають *спряженим* до виразу $\sqrt{7}-1$. Узагалі, якщо у формулах скороченого множення результатом множення дужок, що містять радикали, є раціональний вираз, то вирази в дужках називають *взаємно спряженими*. Так, $\sqrt{7}-1$ і $\sqrt{7}+1$ – взаємно спряжені вирази.

Взаємно спряженими також є вирази $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ і $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ і $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ тощо.

? На прикладі виразу $\sqrt{4m}$ покажіть, як можна винести множник з-під знака кореня. ○ На прикладі добутку $3\sqrt{p}$ покажіть, як можна внести множник під знак кореня. ○ Наведіть приклади подібних радикалів. ○ За яким правилом можна додавати (віднімати) подібні радикали? ○ На який множник треба помножити чисельник і знаменник, щоб звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу: $\frac{2}{\sqrt{7}}$; $\frac{5}{\sqrt{a}+1}$? ○ Наведіть приклади взаємно спряжених виразів.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

18.1. (*Усно.*) Виконайте дії:

1) $5\sqrt{2}+4\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{3}-2\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{7}+\sqrt{7}$; 4) $2\sqrt{5}-\sqrt{5}$.

18.2. Виконайте дії:

1) $7\sqrt{11}+2\sqrt{11}$; 2) $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{3}+6\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{7}-\sqrt{7}$.

18.3. Подайте у вигляді кореня:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$; 2) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$; 3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{b}$; 4) $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{a}}$.

18.4. Подайте у вигляді кореня:

1) $\sqrt{3}\sqrt{7}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$; 3) $\sqrt{5}\sqrt{a}$; 4) $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{x}}$.

2

18.5. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{63}$; 3) $\sqrt{250}$; 4) $\sqrt{363}$;

5) $\sqrt{3^2\cdot 19}$; 6) $\sqrt{2^4\cdot 7}$; 7) $\sqrt{5^2\cdot 7^3}$; 8) $\sqrt{5^3\cdot 2^5}$.

18.6. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{20}$; 2) $\sqrt{50}$; 3) $\sqrt{27}$; 4) $\sqrt{192}$;

5) $\sqrt{5^2\cdot 17}$; 6) $\sqrt{3^4\cdot 2}$; 7) $\sqrt{7^2\cdot 2^3}$; 8) $\sqrt{3^5\cdot 5^3}$.

18.7. Винесіть множник з-під знака кореня і спростіть отриманий вираз:

1) $\dfrac{1}{2}\sqrt{28}$; 2) $-\dfrac{3}{5}\sqrt{500}$; 3) $1,2\sqrt{75}$; 4) $-1,25\sqrt{48}$.

18.8. Винесіть множник з-під знака кореня і спростіть отриманий вираз:

1) $0,5\sqrt{44}$; 2) $-\dfrac{2}{5}\sqrt{125}$; 3) $0,7\sqrt{300}$; 4) $-1,5\sqrt{112}$.

18.9. Внесіть множник під знак кореня:

1) $3\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{5}$; 3) $-2\sqrt{3}$; 4) $-5\sqrt{10}$;

5) $10\sqrt{m}$; 6) $\dfrac{1}{2}\sqrt{8x}$; 7) $-0,1\sqrt{10a}$; 8) $7\sqrt{\dfrac{1}{7}c}$.

18.10. Внесіть множник під знак кореня:

1) $4\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{11}$; 3) $-3\sqrt{5}$; 4) $-7\sqrt{2}$;

5) $5\sqrt{p}$; 6) $\dfrac{1}{3}\sqrt{18x}$; 7) $-0,2\sqrt{10t}$; 8) $6\sqrt{\dfrac{1}{6}y}$.

18.11. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{25x}+\sqrt{49x}-\sqrt{36x}$; 2) $\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{50}$;

3) $\sqrt{8a}+\dfrac{1}{2}\sqrt{200a}-\sqrt{50a}$; 4) $\sqrt{3m}-\sqrt{p}+\sqrt{12m}$.

18.12. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{100a} + \sqrt{64a} - \sqrt{121a}$; 2) $\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{75}$;

3) $\sqrt{5b} - \dfrac{1}{2}\sqrt{20b} + \sqrt{500b}$; 4) $\sqrt{7a} + \sqrt{b} + \sqrt{63a}$.

18.13. Виконайте множення:

1) $\sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{72})$; 2) $(2\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{48})\sqrt{3}$;

3) $(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$; 4) $(3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})$.

18.14. Виконайте множення:

1) $\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{20})$; 2) $(5\sqrt{2} - \sqrt{18} + \sqrt{50})\sqrt{2}$;

3) $(1 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$; 4) $(2 + \sqrt{7})(1 - \sqrt{7})$.

18.15. Спростіть вираз, використовуючи формули скороченого множення:

1) $(\sqrt{11} + \sqrt{7})(\sqrt{11} - \sqrt{7})$; 2) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$;

3) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$; 4) $(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 - 9$;

5) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6}$; 6) $(\sqrt{3} - \sqrt{27})^2$.

18.16. Спростіть вираз, використовуючи формули скороченого множення:

1) $(\sqrt{19} + \sqrt{3})(\sqrt{19} - \sqrt{3})$; 2) $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$;

3) $(4\sqrt{3} - \sqrt{19})(4\sqrt{3} + \sqrt{19})$; 4) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 - 8$;

5) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{10}$; 6) $(\sqrt{50} - \sqrt{2})^2$.

18.17. Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів:

1) $x^2 - 3$; 2) $17 - a^2$;

3) $4a^2 - 5$; 4) $1 - 2x^2$;

5) $a - 9$, де $a \geqslant 0$; 6) $b - c$, де $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

18.18. Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів:

1) $5 - x^2$; 2) $9m^2 - 7$; 3) $16 - 3b^2$; 4) $b - 2$, де $b \geqslant 0$.

18.19. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{7 - \sqrt{a}}{49 - a}$; 3) $\dfrac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{2\sqrt{3} + 3}{5\sqrt{3}}$.

18.20. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a^2 - 3}{a - \sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{5 + \sqrt{b}}{25 - b}$; 3) $\dfrac{\sqrt{5} + 5}{\sqrt{5}}$; 4) $\dfrac{7\sqrt{2} - 2}{3\sqrt{2}}$.

18.21. Позбудьтеся ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$; 3) $\dfrac{m}{\sqrt{n}}$; 4) $\dfrac{6}{5\sqrt{3}}$.

18.22. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{5}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{9}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; 4) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$.

3

18.23. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{13m^2}$, якщо $m \geqslant 0$; 2) $\sqrt{b^3}$;

3) $\sqrt{7a^6}$, якщо $a < 0$; 4) $\sqrt{16x^7}$.

18.24. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{11x^2}$, якщо $x \geqslant 0$; 2) $\sqrt{c^5}$;

3) $\sqrt{2p^{10}}$, якщо $p < 0$; 4) $\sqrt{36m^{11}}$.

18.25. Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt{2}$, якщо $a \geqslant 0$; 2) $b^3\sqrt{5}$, якщо $b < 0$;

3) $b\sqrt{\frac{3}{b}}$; 4) $x^3\sqrt{-x}$.

18.26. Внесіть множник під знак кореня:

1) $b\sqrt{3}$, якщо $b \geqslant 0$; 2) $c^5\sqrt{7}$, якщо $c < 0$;

3) $x^2\sqrt{\frac{5}{x}}$; 4) $y\sqrt{-y}$.

18.27. Спростіть вираз:

1) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{5})^2 + \sqrt{360}$;

2) $(3\sqrt{2} + 7\sqrt{3})^2 - \sqrt{150}$;

3) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$.

18.28. Розкладіть на множники:

1) $\sqrt{a} - \sqrt{3a}$; 2) $\sqrt{7p} + \sqrt{4p}$; 3) $\sqrt{21} + \sqrt{7}$;

4) $\sqrt{6} - \sqrt{10}$; 5) $2\sqrt{m} - \sqrt{6m}$; 6) $\sqrt{5x} - \sqrt{10x}$.

18.29. Розкладіть на множники:

1) $\sqrt{p} + \sqrt{2p}$; 2) $\sqrt{42} - \sqrt{6}$; 3) $3\sqrt{a} + \sqrt{6a}$.

18.30. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x + 6\sqrt{x}}{x - 36}$; 2) $\frac{a + 6\sqrt{a}\sqrt{b} + 9b}{a - 9b}$; 3) $\frac{\sqrt{10} - 5}{2 - \sqrt{10}}$.

18.31. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a - 25}{a - 5\sqrt{a}}$; 2) $\frac{x - 4\sqrt{x}\sqrt{y} + 4y}{x - 4y}$; 3) $\frac{11 + \sqrt{22}}{\sqrt{22} + 2}$.

18.32. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{15}{\sqrt{6} - 1}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{11} + \sqrt{7}}$; 3) $\frac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$.

18.33. Позбудьтеся ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{10}{\sqrt{3}+1}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1}{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$.

4 **18.34.** Обчисліть:

1) $(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}})^2$; 2) $\frac{15}{11+2\sqrt{30}}+\frac{15}{11-2\sqrt{30}}$;

3) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; 4) $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)^2$.

18.35. Знайдіть:

1) $(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}})^2$; 2) $\frac{3}{10-3\sqrt{11}}+\frac{3}{10+3\sqrt{11}}$;

3) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$; 4) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^2$.

18.36. Обчисліть значення виразу:

$$\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{9}}+\frac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{13}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{45}+\sqrt{49}},$$

відтак дізнаєтеся, скільки разів футболіст Андрій Шевченко був володарем кубка України у складі команди «Динамо» (Київ).

18.37. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{m}+1}{m\sqrt{m}+m+\sqrt{m}}:\frac{1}{m^2-\sqrt{m}}$; 2) $\frac{a+b}{\sqrt{ab}-b}-\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

3) $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right):\sqrt{\frac{y}{x}}$; 4) $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}+2a}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Вправи для повторення

18.38. Обчисліть:

1) $\frac{216^3}{36^4}$; 2) $\frac{81^6}{27^8}$; 3) $\frac{4^8\cdot 16}{64^3}$; 4) $\frac{2^8\cdot 13^8}{26^7}$.

18.39. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x+1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{2x^2}{x^2-x}$.

18.40. Доведіть, що значення виразу $\sqrt{10n-3}$, де $n\in N$, не може бути натуральним числом.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

18.41. Побудуйте графік функції $y=x^2$, де $x\geqslant 0$. Якою буде область значень цієї функції?

18.42. Використовуючи графік функції $y = 2x$, знайдіть:
1) значення y, що відповідає $x = -3$, $x = 1$;
2) значення x, що відповідає $y = -2$, $y = 6$;
3) два значення x, для яких значення функції більше за 3; менше від 3.

Життєва математика

18.43. Будівельна компанія хоче придбати 75 кубометрів пінобетону в одного з трьох постачальників. Ціни та умови доставки наведено в таблиці. Скільки коштуватиме найбільш дешевий варіант покупки?

Постачальник	Ціна піноблоку (грн за 1 м^3)	Вартість доставки (грн)	Спеціальні умови
А	1325	2200	Немає
Б	1350	3000	Для замовлень понад 75 тис. грн доставка безкоштовна
В	1330	2000	Для замовлень від 80 м^3 доставка безкоштовна

Цікаві задачі – поміркуй одначе

18.44. (*Перша міжнародна математична олімпіада школярів, 1959 р.*) Доведіть, що для будь-якого натурального значення n дріб $\dfrac{21n + 4}{14n + 3}$ є нескоротним.

§ 19. Функція $y = \sqrt{x}$, її графік і властивості

1. Функція $y = \sqrt{x}$, її графік

Приклад 1. Нехай S см^2 – площа квадрата, a см – довжина його сторони. Оскільки $S = a^2$, то залежність довжини сторони a квадрата від його площі S можна задати формулою

$$a = \sqrt{S}.$$

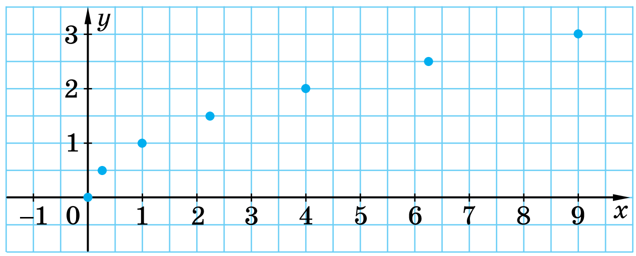
Розглянемо функцію $y = \sqrt{x}$. Очевидно, що змінна x набуває лише невід'ємних значень, тобто $x \geqslant 0$.

Складемо таблицю значень функції $y = \sqrt{x}$ для кількох значень аргументу:

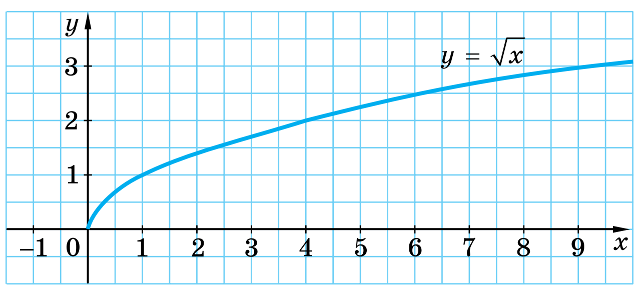
x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Позначимо ці точки на координатній площині (мал. 19.1). Якби на цій самій площині ми позначили б більшу кількість точок, координати яких задовольняють рівняння $y = \sqrt{x}$, а потім сполучили їх плавною лінією, то отримали б графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 19.2).

Графіком цієї функції є гілка параболи.



Мал. 19.1

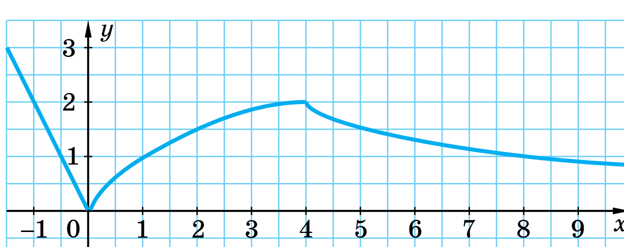


Мал. 19.2

Приклад 2. Побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ \dfrac{8}{x}, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

Відповідь: графік зображено на малюнку 19.3.



Мал. 19.3

2. Властивості функції $y = \sqrt{x}$

Узагальнимо ***властивості функції*** $y = \sqrt{x}$.

1. **Областю визначення функції є множина всіх невід'ємних чисел: $x \geqslant 0$.**
2. **Областю значень функції є множина всіх невід'ємних чисел: $y \geqslant 0$.**
3. **Графік функції – гілка параболи, що виходить з точки (0; 0), усі інші точки графіка лежать у першій координатній чверті.**
4. **Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.**

Остання властивість дає змогу *порівнювати значення виразів, що містять корені*.

Приклад 3. Порівняти числа:

1) $\sqrt{12}$ і $\sqrt{11}$; 2) 7 і $\sqrt{50}$; 3) $5\sqrt{2}$ і $4\sqrt{3}$.

Розв'язання. 1) Оскільки $12 > 11$, то $\sqrt{12} > \sqrt{11}$.

2) $7 = \sqrt{49}$, а $49 < 50$, тому $\sqrt{49} < \sqrt{50}$, отже, $7 < \sqrt{50}$.

3) Внесемо множник в обох виразах під знак кореня:

$$5\sqrt{2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50};\ 4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{48}.$$

Оскільки $50 > 48$, то $\sqrt{50} > \sqrt{48}$, а тому $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$.

3. Використання графіка функції $y = \sqrt{x}$ під час розв'язування рівнянь

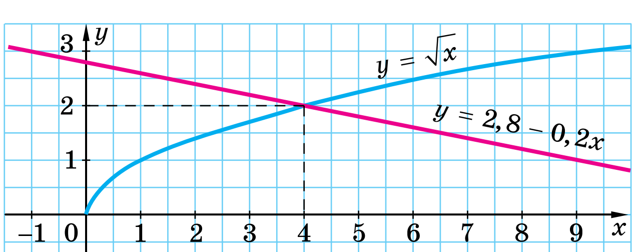
Приклад 4. Розв'язати графічно рівняння $5\sqrt{x} = 14 - x$.

Розв'язання. Оскільки ми поки що не вміємо будувати графік функції $y = 5\sqrt{x}$, то поділимо обидві частини рівняння на число 5. Одержимо рівняння: $\sqrt{x} = 2{,}8 - 0{,}2x$.

Побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = 2{,}8 - 0{,}2x$ в одній системі координат (мал. 19.4). Графіки перетнулися в точці з абсцисою 4.

Перевіркою впевнюємося, що число 4 – корінь рівняння. Дійсно, $5\sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$ і $14 - 4 = 10$.

Відповідь: 4.



Мал. 19.4

Що собою являє графік функції $y = \sqrt{x}$? ○ Сформулюйте властивості функції $y = \sqrt{x}$.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

19.1. Для функції $y = \sqrt{x}$ знайдіть значення y, що відповідає значенню $x = 9$; 0; 81.

19.2. Для функції $y = \sqrt{x}$ знайдіть значення y, що відповідає значенню $x = 1$; 4; 100.

2

19.3. Використовуючи графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 19.2), знайдіть:
1) значення y для $x = 1{,}5$; 3; 4; $6{,}5$;
2) значення x, для яких $y = 1$; $2{,}5$;
3) два значення x, для яких значення функції є більшим за число 2; меншим від числа 2.

19.4. За графіком функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 19.2) знайдіть:
1) значення функції для значень аргументу $0{,}5$; 2; $5{,}5$;
2) значення аргументу, для яких значення функції дорівнює $0{,}5$; 4;
3) два значення x, для яких значення функції є більшим за число 1; меншим від числа 1.

19.5. Не будуючи графіка функції $y = \sqrt{x}$, визначте, через які з даних точок він проходить:
1) A (36; 4); 2) B (4; 16); 3) C (−4; 2);
4) D (0; 0); 5) M (1; −1); 6) P (0,5; 0,25).

19.6. Чи належить графіку функції $y = \sqrt{x}$ точка:
1) F (16; 6); 2) K (−36; 6); 3) L (5; 25); 4) N (0,9; 0,81)?

19.7. Порівняйте числа:
1) $2\sqrt{3}$ і $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{29}$ і $2\sqrt{7}$; 3) $3\sqrt{5}$ і $2\sqrt{10}$; 4) $4\sqrt{3}$ і $3\sqrt{7}$.

19.8. Порівняйте значення виразів:
1) $5\sqrt{2}$ і $\sqrt{51}$; 2) $\sqrt{146}$ і $7\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{5}$ і $3\sqrt{2}$; 4) $2\sqrt{7}$ і $3\sqrt{3}$.

3

19.9. Порівняйте числа:
1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{84}$; 2) $0{,}2\sqrt{1\frac{3}{8}}$ і $0{,}4\sqrt{\frac{11}{32}}$.

19.10. Порівняйте числа:
1) $\frac{3}{4}\sqrt{48}$ і $\frac{3}{5}\sqrt{75}$; 2) $0{,}3\sqrt{1\frac{4}{9}}$ і $0{,}2\sqrt{1\frac{3}{4}}$.

19.11. Знайдіть область значень функції $y = \sqrt{x}$, якщо:
1) $0 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $1 \leqslant x \leqslant 9$.

19.12. Розв’яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$.

19.13. Розв’яжіть графічно рівняння $3 - 2x = \sqrt{x}$.

4 **19.14.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} x - 2, & \text{якщо } x < 4, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geqslant 4; \end{cases}$ 2) $y = \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$.

19.15. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geqslant 1; \end{cases}$ 2) $y = \dfrac{\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}}$.

Вправи для повторення

19.16. Розв’яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = \dfrac{2}{3}$; 2) $\sqrt{x} = -5$; 3) $x^2 = 16$; 4) $x^2 = -1$.

19.17. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{c^5}$; 2) $\sqrt{3b^{10}}$, якщо $b < 0$.

19.18. Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}\right)^2$.

Життєва математика

19.19. Оператор мобільного зв’язку пропонує для використання 4G-інтернету такі тарифні плани (див. таблицю).

Тарифний план	Абонентська плата	Плата за трафік
План «0»	Немає	0,1 грн за 1 Мб
План «500»	40 грн за 500 Мб трафіку на місяць	0,08 грн за 1 Мб понад 500 Мб
План «1000»	70 грн за 1000 Мб трафіку на місяць	0,06 грн за 1 Мб понад 1000 Мб
План «Безліміт»	100 грн	–

Наталя передбачає, що її трафік становитиме 700 Мб на місяць, і з огляду на це вибирає найдешевший тарифний план. Скільки Наталя заплатить за місяць, якщо її трафік дійсно становитиме 700 Мб?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

19.20. Обчисліть:

$$13\frac{1}{1997} \cdot 20\frac{1973}{2000} - 6\frac{1991}{2000} \cdot 4\frac{3}{1997} + \frac{3}{400}.$$

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y, що відповідає значенню $x = -3$.

А. 6 **Б.** –6 **В.** 9 **Г.** –9

2. Укажіть вираз, що не має змісту.

А. $\sqrt{17}$ **Б.** $\sqrt{-4}$ **В.** $\sqrt{0}$ **Г.** $\sqrt{16}$

3. Укажіть число, що є ірраціональним.

А. $\sqrt{25}$ **Б.** $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ **В.** 5 **Г.** $\sqrt{5}$

2

4. Обчисліть $5\sqrt{0{,}16} - 2\sqrt{1\dfrac{9}{16}}$.

А. –0,5 **Б.** 0,5 **В.** 4,5 **Г.** –2,325

5. Розв'яжіть рівняння $x^2 = 36$.

А. 6 **Б.** –6; 6 **В.** 18 **Г.** Розв'язків немає

6. Скоротіть дріб $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{7\sqrt{3}}$.

А. $\dfrac{5}{7}$ **Б.** $\dfrac{2\sqrt{3}+1}{7}$ **В.** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{7}$ **Г.** $\dfrac{2-\sqrt{3}}{7}$

3

7. Укажіть нерівність, що є правильною.

А. $\dfrac{2}{3}\sqrt{27} > \sqrt{13}$ **Б.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{48} < \dfrac{1}{9}\sqrt{108}$

В. $0{,}1\sqrt{120} < \dfrac{1}{5}\sqrt{15}$ **Г.** $\dfrac{2}{5}\sqrt{125} > 0{,}2\sqrt{300}$

8. Розв'яжіть рівняння $3\sqrt{\dfrac{x}{4}} - 6 = 0$.

А. 64 **Б.** 16
В. 1 **Г.** 8

9. Винесіть множник з-під знака кореня у виразі $\sqrt{7a^{10}}$, якщо відомо, що $a < 0$.

А. $-a^5\sqrt{7}$ **Б.** $a^5\sqrt{7}$ **В.** $a^{10}\sqrt{7}$ **Г.** $-a\sqrt{7}$

4

10. Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{13}-12)^2} + \sqrt{(\sqrt{13}-2)^2}$.

А. $2\sqrt{13} - 14$ **Б.** 14 **В.** 10 **Г.** $2\sqrt{13} - 10$

11. Укажіть усі такі значення a, для яких рівняння $ax^2 = -9$ має два різних дійсних корені.

А. $a > 0$ **Б.** $a \geqslant 0$ **В.** $a < 0$ **Г.** $a \leqslant 0$

12. Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^2$.

А. 20 **Б.** 18 **В.** 17 **Г.** 16

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

2 **13.** **Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г).**

Вираз	*Значення виразу*
1. $(\sqrt{17}-\sqrt{2})(\sqrt{17}+\sqrt{2})$	**А.** 12
2. $(\sqrt{27}-\sqrt{3})^2$	**Б.** 13
3. $(\sqrt{3}+\sqrt{10})^2-2\sqrt{30}$	**В.** 14
	Г. 15

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 13–19

1 **1.** Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y, яке відповідає значенню $x = -4$; 7.

2. Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{-4}$; 3) $\sqrt{0}$; 4) $\sqrt{3{,}7}$?

3. Із чисел 2; $1\frac{4}{5}$; -8; $\sqrt{3}$; 5; 0; $-\sqrt{8}$; $-2\frac{1}{3}$ випишіть:

1) натуральні числа; 2) цілі недодатні числа;
3) раціональні додатні числа; 4) ірраціональні числа.

2 **4.** Обчисліть:

1) $\sqrt{2\frac{14}{25}}-10\sqrt{0{,}04}$; 2) $(-3\sqrt{5})^2$;

3) $\sqrt{0{,}1}\cdot\sqrt{1{,}6}$; 4) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1{,}5}}$.

5. Розв’яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=\frac{3}{4}$; 2) $\sqrt{x}=-1$; 3) $x^2=9$; 4) $x^2=-4$.

6. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$; 2) $\frac{4\sqrt{7}+7}{5\sqrt{7}}$.

3 **7.** Порівняйте числа:

1) $\frac{3}{5}\sqrt{50}$ і $\frac{2}{5}\sqrt{75}$; 2) $0{,}2\sqrt{2\frac{3}{8}}$ і $0{,}4\sqrt{\frac{19}{32}}$.

8. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{b^7}$; 2) $\sqrt{5m^6}$, якщо $m < 0$.

4 **9.** Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$.

Додаткові завдання

4 **10.** Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 6 - x, & \text{якщо } x < 4, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geqslant 4. \end{cases}$

11. Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{7}-13)^2} + \sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

До § 13

1 **1.** Укажіть область визначення й область значень функції $y = x^2$.

2 **2.** Побудуйте графік функції $y = x^2$, якщо $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

3 **3.** Побудуйте графік функції, що задає залежність площі квадрата S (у см^2) від довжини його сторони a (у см). Якою є область визначення цієї функції?

4. 1) Як зміниться площа квадрата, якщо кожну його сторону збільшити в 3 рази; зменшити в 9 разів?

2) Як треба змінити кожну сторону квадрата, щоб його площа збільшилася в 4 рази; зменшилась у 25 разів?

5. Точка A $(m; n)$, де $m \neq 0$, $n \neq 0$, належить графіку функції $y = x^2$. Чи належить цьому графіку точка:

1) B $(m; -n)$;

2) C $(-m; n)$;

3) D $(-m; -n)$?

6. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = x + 6$ і знайдіть координати точок їх перетину.

4 **7.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ 2 - x, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 6 + x, & \text{якщо } x < -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{8}{x}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

До § 14

1 **8.** Доведіть, що:

1) $\sqrt{0,49} = 0,7$; 2) $\sqrt{2500} = 50$.

2 **9.** Обчисліть:

1) $\sqrt{49}$; 2) $\sqrt{2601}$; 3) $\sqrt{5,76}$;

4) $\sqrt{\frac{25}{36}}$; 5) $\sqrt{10,89} + \sqrt{0,01} - 3,2$; 6) $\sqrt{6\frac{1}{4}} - 2\sqrt{1,44} + 0,9$.

10. Знайдіть значення виразу $\sqrt{2x - 8y}$, якщо:

1) $x = 1{,}6$; $y = 0{,}4$; 2) $x = 0{,}08$; $y = -0{,}3$.

3 **11.** Обчисліть:

1) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{0,09} + 0,78\sqrt{100}\right)(\sqrt{2,25} + 2\sqrt{30,25})$;

2) $\left(-7\sqrt{\frac{4}{49}} + 3\sqrt{5,29}\right) : (\sqrt{5^2 + 12^2} - \sqrt{65,61})$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{5x} + 3 = 13$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{x - 1} = 1,2$.

4 **13.** Для яких значень x має зміст вираз:

1) $\sqrt{x - 2}$; 2) $\sqrt{(x - 3)^5}$; 3) $\frac{\sqrt{-x}}{x + 1}$; 4) $\sqrt{x} + \sqrt{-x}$?

14. Розв'яжіть рівняння відносно змінної x для всіх можливих значень a:

1) $a\sqrt{x} = 0$; 2) $a\sqrt{x} = 1$; 3) $a\sqrt{x - 1} = 5$; 4) $\sqrt{ax} = 0$.

До § 15

1 **15.** Раціональним чи ірраціональним є дане число? Раціональне число запишіть без знака кореня:

1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{11}$; 3) $-\sqrt{4}$; 4) $\sqrt{13}$.

2 **16.** Подайте у вигляді нескінченного десяткового дробу число:

1) $\frac{1}{3}$; 2) -29; 3) $5{,}17$; 4) $\frac{7}{27}$.

17. Між якими двома послідовними натуральними числами міститься число:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{99}$; 4) $\sqrt{20}$?

3 **18.** Чи правильно, що:

1) різниця двох цілих від'ємних чисел – число ціле від'ємне;
2) добуток двох раціональних чисел – число раціональне;
3) сума кубів двох цілих чисел – число натуральне;
4) сума квадратів двох цілих чисел – число ціле невід'ємне?

19. Укажіть два раціональних числа, що лежать між числами:

1) $\sqrt{5}$ і $\sqrt{7}$; 2) $-\sqrt{13}$ і $-\sqrt{11}$.

4 **20.** Доведіть, що не існує раціонального числа, що є розв’язком рівняння $x^2 = 7$.

21. Доведіть, що:

1) $\frac{1}{2} + 0,1(6) = \frac{2}{3}$; 2) $0,8(3) - \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$.

До § 16

1 **22.** Чи є правильною рівність:

1) $(\sqrt{19})^2 = 19$; 2) $(\sqrt{17})^2 = 17^2$;

3) $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5}$; 4) $(\sqrt{0,1})^2 = 0,1$?

2 **23.** Обчисліть:

1) $\left(-\sqrt{8}\right)^2$; 2) $\sqrt{13} \cdot (-\sqrt{13})$; 3) $\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}\right)^2$; 4) $\left(-0,1\sqrt{10}\right)^2$;

5) $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2$; 6) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$; 7) $\left(-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$; 8) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2$.

24. Розв’яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{2}x^2 = 32$; 2) $x^2 - 5 = 0$; 3) $2x^2 = 18$; 4) $49x^2 = 1$.

3 **25.** Складіть рівняння, коренями якого є числа:

1) 5 і –5; 2) 0,1 і –0,1; 3) $-\frac{1}{4}$ і $\frac{1}{4}$;

4) $-\frac{3}{7}$ і $\frac{3}{7}$; 5) $\sqrt{7}$ і $-\sqrt{7}$; 6) $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

26. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}}{9}$; 2) $\left(\sqrt{\sqrt{7}}\right)^2$; 3) $\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt{\sqrt{5}}\right)^4$.

27. Розв’яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{8}(x-1)^2 = \frac{1}{2}$; 2) $\frac{(x+2)^2}{5} = \frac{16}{5}$.

4 **28.** Відомо, що $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$. Знайдіть $x + y$.

29. Для яких значень m рівняння $x^2 = m - 1$:

1) має два корені;

2) має тільки один корінь;

3) не має коренів?

До § 17

1 **30.** Для яких значень змінних рівність є тотожністю:

1) $\sqrt{m \cdot n} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$; 2) $\sqrt{\dfrac{p}{q}} = \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$?

2 **31.** Обчисліть:

1) $\sqrt{\dfrac{0,36 \cdot 49}{121}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{25 \cdot 100}{81}}$;

3) $\sqrt{\dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{9}{25}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{64}{9} \cdot \dfrac{4}{289}}$.

32. Обчисліть:

1) $\sqrt{a^2}$, якщо $a = 13$; -17; 2) $-2\sqrt{x^2}$, якщо $x = 0{,}5$; $-2{,}1$.

33. Відомо, що $37^2 = 1369$. Знайдіть:

1) $\sqrt{136900}$; 2) $\sqrt{13,69}$; 3) $\sqrt{0,1369}$.

34. У скільки разів сторона квадрата, площа якого дорівнює 12 см^2, більша за сторону квадрата, площа якого дорівнює 3 см^2?

3 **35.** Обчисліть:

1) $\sqrt{4\dfrac{1}{20}} \cdot \sqrt{2\dfrac{2}{9}} - (\sqrt{7})^2$; 2) $\sqrt{1 - \left(\dfrac{8}{17}\right)^2} + \left(-\sqrt{\dfrac{2}{17}}\right)^2$;

3) $\sqrt{1 - \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2} - \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2$; 4) $\sqrt{2\dfrac{1}{5}} \cdot \sqrt{1\dfrac{1}{11}} \cdot \sqrt{2\dfrac{2}{5}} + \left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^2 - (\sqrt{3})^2$.

36. Відношення площ двох кругів дорівнює $\dfrac{4}{9}$, а радіус одного з них дорівнює 10 см. Знайдіть радіус другого.

37. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{3,6 \cdot 10^5}$; 2) $\sqrt{8,1 \cdot 0,1^3}$;

3) $3\sqrt{15} \cdot 2\sqrt{30} \cdot \sqrt{8}$; 4) $\sqrt{3^5 \cdot 12^3}$.

38. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{p^4c^8a^{12}}$; 2) $\sqrt{49(-x)^2y^6}$, якщо $x < 0$, $y > 0$;

3) $\sqrt{\dfrac{m^{20}}{n^{24}}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{a^{10}}{b^{14}}}$, якщо $a < 0$, $b < 0$.

39. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt{0,16^2}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{(-0,09)^2}}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{11} - \sqrt{13})^2}$.

4 **40.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{x^2 - 14x + 49}{(x + 2)^2}\sqrt{\dfrac{x^2 + 4x + 4}{(x - 7)^2}}$, якщо $x > 7$;

2) $\dfrac{p^2 - 4}{(p + 3)^2} \cdot \sqrt{\dfrac{p^2 + 6p + 9}{(p + 2)^2}}$, якщо $p < -3$.

41. Доведіть, що:

1) $\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{23 - 8\sqrt{7}} = 7$;

2) $\sqrt{15 + 4\sqrt{11}} - \sqrt{20 - 6\sqrt{11}} = 5$.

До § 18

1 **42.** Виконайте дії:

1) $3\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$; 2) $5\sqrt{11} - \sqrt{11}$; 3) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{11}$; 4) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$.

2 **43.** Спростіть вираз:

1) $(\sqrt{7} - \sqrt{12})(\sqrt{7} + 3\sqrt{3})$; 2) $(\sqrt{3} - \sqrt{11})(\sqrt{33} + 1)$;

3) $4\sqrt{2}(2 - 7\sqrt{8}) - 7\sqrt{2}$; 4) $(\sqrt{5} + 1)(2 - \sqrt{5}) - \sqrt{5}$;

5) $(\sqrt{3} - 7)(4 - \sqrt{3}) - 11\sqrt{3}$; 6) $(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) + 1$.

3 **44.** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{28x^9}$; 2) $\sqrt{\dfrac{7m^3}{36}}$;

3) $\sqrt{25a^2b^5}$, якщо $a < 0$; 4) $\sqrt{8x^3y^{10}}$, якщо $y > 0$;

5) $\sqrt{-8p^7}$; 6) $\sqrt{x^3y^3}$, якщо $x < 0$, $y < 0$.

45. Зведіть вираз до вигляду $a\sqrt{b}$, де b – ціле число:

1) $\sqrt{\dfrac{1}{7}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; 3) $\sqrt{4\dfrac{1}{3}}$; 4) $\sqrt{5\dfrac{1}{2}}$.

4 **46.** Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}\right)^2$; 2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

47. Доведіть, що рівність є правильною:

1) $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2} + 5 = \sqrt{27 + 10\sqrt{2}}$.

48. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - x\sqrt{x}}$; 2) $\dfrac{x + y + \sqrt{x + y}}{\sqrt{x + y}}$.

49. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\dfrac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

50. Доведіть, що $\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ – число натуральне.

51. Внесіть множник під знак кореня та спростіть отриманий вираз:

1) $(x+2)\sqrt{\dfrac{3}{x^2+4x+4}}$, якщо $x > -2$;

2) $(a-b)\sqrt{\dfrac{1}{a^2-2ab+b^2}}$, якщо $a < b$;

3) $p(p+1)\sqrt{\dfrac{7}{p^2+2p+1}}$, якщо $p < -1$;

4) $(b-3)\sqrt{\dfrac{1}{6-2b}}$.

До § 19

52. Чи можна обчислити значення функції $y=\sqrt{x}$ для значень $x=4$; $x=-1$; $x=100$; $x=-9$?

53. Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x}$, якщо:
1) $0 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $1 \leqslant x \leqslant 9$; 3) $4 \leqslant x \leqslant 16$.

54. Чи перетинається графік функції $y=\sqrt{x}$ з прямою:
1) $y=1$; 2) $y=8$; 3) $y=0$; 4) $y=-1$?
Якщо перетинається, то в якій точці?

55. Розташуйте в порядку зростання числа:

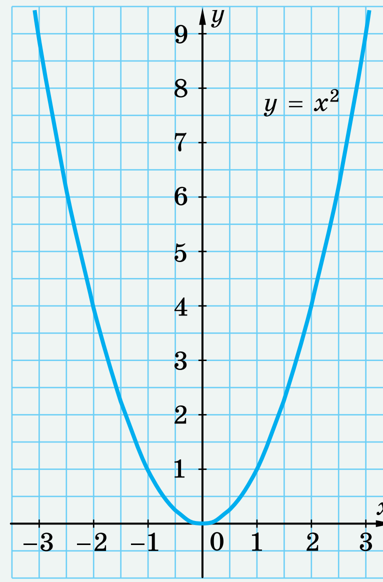
1) $\sqrt{19{,}1}$; 3; $\sqrt{16{,}2}$; 4; $\sqrt{14}$; 2) $\dfrac{1}{4}$; $\sqrt{0{,}1}$; 0,2; $\sqrt{\dfrac{1}{11}}$.

56. Для яких значень x справджується нерівність:
1) $\sqrt{x} \geqslant 1$; 2) $\sqrt{x} < 2$; 3) $1 < \sqrt{x} \leqslant 4$;
4) $9 \leqslant \sqrt{x} < 100$; 5) $\sqrt{x} > -1$; 6) $\sqrt{x} \leqslant -2{,}5$?

Головне в розділі 2

ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ $y = x^2$

1. Область визначення функції складається з усіх чисел.
2. Область значень функції складається з усіх невід'ємних чисел, тобто $y \geqslant 0$.
3. Графіком функції є парабола з вершиною в точці (0; 0), гілки якої напрямлені вгору. Усі точки графіка, крім вершини параболи, лежать вище від осі абсцис.
4. Протилежним значенням аргументу відповідає одне й те саме значення функції.



АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ

Арифметичним квадратним коренем із числа a називають таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює $\boldsymbol{a}$.

Вираз $\sqrt{a}$ не має змісту, якщо $a < 0$.

Для будь-якого $a \geqslant 0$ справджується тотожність

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

РІВНЯННЯ $\sqrt{x} = m$

$\sqrt{x} = m$, m – число

Якщо $m \geqslant 0$, то $x = m^2$

Якщо $m < 0$, то коренів немає

РАЦІОНАЛЬНІ, ІРРАЦІОНАЛЬНІ ТА ДІЙСНІ ЧИСЛА

Цілі числа і дробові числа утворюють множину ***раціональних чисел***.

Будь-яке раціональне число можна подати у вигляді $\dfrac{m}{n}$.

Числа, які не можна записати у вигляді $\dfrac{m}{n}$, де m – ціле число, n – натуральне число, називають ***ірраціональними числами***.

РІВНЯННЯ $x^2 = a$

$x^2 = a$, a – число

Якщо $a > 0$, то $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$	Якщо $a = 0$, то $x = 0$	Якщо $a < 0$, то коренів немає

ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ для } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ для } a \geqslant 0,\ b > 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$$

ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ $y = \sqrt{x}$

1. Областю визначення функції є множина всіх невід'ємних чисел: $x \geqslant 0$.
2. Областю значень функції є множина всіх невід'ємних чисел: $y \geqslant 0$.
3. Графік функції – гілка параболи, що виходить з точки (0; 0), усі інші точки графіка лежать у першій координатній чверті.
4. Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

РОЗДІЛ 3

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **ознайомитеся** з поняттям квадратного рівняння та квадратного тричлена; теоремою Вієта;
- **навчитеся** розв'язувати повні та неповні квадратні рівняння та рівняння, що зводяться до них; застосовувати теорему Вієта; розкладати квадратний тричлен на множники; розв'язувати текстові та прикладні задачі, математичними моделями яких є квадратні рівняння або ті, що зводяться до них.

§ 20. Квадратні рівняння. Неповні квадратні рівняння

1. Квадратне рівняння, його коефіцієнти

У математиці, фізиці, економіці, практичній діяльності людини трапляються задачі, математичними моделями яких є рівняння, що містять змінну в другому степені.

Приклад 1. Довжина земельної ділянки на 15 м більша за ширину, а площа дорівнює 375 м^2. Знайти ширину ділянки.

Розв'язання. Нехай x м – ширина ділянки, тоді її довжина – $(x + 15)$ м. За умовою задачі площа ділянки дорівнює 375 м^2. Тоді $x(x + 15) = 375$. Отже, маємо рівняння $\boldsymbol{x^2 + 15x - 375 = 0}$, яке називають ***квадратним***.

Квадратним рівнянням називають рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a, b і c – деякі числа, і $a \neq 0$.

Наприклад, рівняння $5x^2 - 2x - 7 = 0$ та $-3x^2 + x - 8 = 0$ також є квадратними.

Числа a, b і c називають ***коефіцієнтами квадратного рівняння***. Число a називають ***першим коефіцієнтом***, число b – ***другим коефіцієнтом***, число c – ***вільним членом***.

У рівнянні $x^2 + 15x - 375 = 0$ коефіцієнти такі: $a = 1$; $b = 15$; $c = -375$. У рівнянні $5x^2 - 2x - 7 = 0$ такі: $a = 5$; $b = -2$; $c = -7$, а в рівнянні $-3x^2 + x - 8 = 0$ такі: $a = -3$; $b = 1$ і $c = -8$.

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають ***зведеним***. Рівняння $x^2 + 15x - 375 = 0$ – зведене, а рівняння $5x^2 - 2x - 7 = 0$ – не є зведеним.

2. Неповні квадратні рівняння та їх розв'язування

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають ***неповним квадратним рівнянням***.

Наприклад, неповним квадратним рівнянням, у якого $b = 0$ і $c = 0$, є рівняння $-8x^2 = 0$; у якого $b = 0$, є рівняння $2x^2 - 3 = 0$; у якого $c = 0$, є рівняння $-7x^2 + 4x = 0$.

Отже, неповні квадратні рівняння можуть мати вигляд:

1. $ax^2 = 0$;
2. $ax^2 + c = 0$;
3. $ax^2 + bx = 0$.

Розглянемо розв'язування кожного з них.

1 Рівняння вигляду $ax^2 = 0$

Оскільки $a \neq 0$, маємо рівняння $x^2 = 0$, коренем якого є число 0. Отже, рівняння має єдиний корінь: $x = 0$.

2 Рівняння вигляду $ax^2 + c = 0$, $c \neq 0$

Маємо: $ax^2 = -c$, тобто $x^2 = -\dfrac{c}{a}$. Оскільки $c \neq 0$, то і $-\dfrac{c}{a} \neq 0$.

Якщо $-\dfrac{c}{a} > 0$, то рівняння має два корені:

$x_1 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ і $x_2 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ або скорочено: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

Якщо $-\dfrac{c}{a} < 0$, то рівняння коренів не має.

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

1) $-2x^2 + 50 = 0$; 2) $3x^2 + 9 = 0$.

Розв'язання.

1) $-2x^2 + 50 = 0$;
$-2x^2 = -50$,
$x^2 = 25$,
$x_{1,2} = \pm 5$.

2) $3x^2 + 9 = 0$.
$3x^2 = -9$,
$x^2 = -3$,
$x \in \varnothing$.

Відповідь: 1) ± 5; 2) коренів немає.

3 Рівняння вигляду $ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0$

Розкладемо ліву частину рівняння на множники й розв'яжемо одержане рівняння $x(ax + b) = 0$.

$$x = 0 \text{ або } ax + b = 0,$$

$$x = -\frac{b}{a}, \text{ оскільки } a \neq 0.$$

Отже, рівняння має два корені: $x_1 = 0$ і $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2x^2 + 5x = 0$.

Розв'язання. Маємо: $x(2x + 5) = 0$,

$$x = 0 \quad \text{або} \quad 2x + 5 = 0,$$
$$x = -2{,}5.$$

Отже, $x_1 = 0$, $x_2 = -2{,}5$.

Відповідь: 0; $-2{,}5$.

Систематизуємо дані про розв'язки неповного квадратного рівняння у вигляді схеми:

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

- Якщо $b = 0$, $c = 0$, маємо: $ax^2 = 0$, $x^2 = 0$, $x = 0$
- Якщо $b = 0$, $c \neq 0$, маємо: $ax^2 + c = 0$, $ax^2 = -c$, $x^2 = -\dfrac{c}{a}$
  - Якщо $-\dfrac{c}{a} > 0$, то $x_1 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$
  - Якщо $-\dfrac{c}{a} < 0$, то коренів немає
- Якщо $b \neq 0$, $c = 0$, маємо: $ax^2 + bx = 0$, $x(ax + b) = 0$, $x = 0$ або $ax + b = 0$, отже, $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$

3. Розв'язування рівнянь, що зводяться до неповних квадратних

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(2x + 1)^2 = (x + 3)(x + 1) + 4$.

Розв'язання. Виконаємо тотожні перетворення та застосуємо властивості рівнянь. Маємо:

$4x^2 + 4x + 1 = x^2 + 3x + x + 3 + 4$;

$3x^2 = 6$;

$x^2 = 2$;

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Відповідь: $\pm\sqrt{2}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\frac{|x^3|}{x} - 1 = 0.$

Розв'язання. Областю визначення рівняння є всі числа, крім 0. Розглянемо два випадки: $x > 0$ і $x < 0$.

1) Якщо $x > 0$, то $x^3 > 0$ і $|x^3| = x^3$. Тоді маємо рівняння $\frac{x^3}{x} - 1 = 0$, $x^2 = 1$, $x = 1$ або $x = -1$. Але корінь $x = -1$ не задовольняє умову $x > 0$.

2) Якщо $x < 0$, то $x^3 < 0$ і $|x^3| = -x^3$. Тоді отримаємо $-\frac{x^3}{x} - 1 = 0$, $x^2 + 1 = 0$, $x^2 = -1$. Це рівняння розв'язків не має.

Відповідь: 1.

Яке рівняння називають квадратним? Як у рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ називають числа a, b, c? Наведіть приклад квадратного рівняння. Яке квадратне рівняння називають неповним? Наведіть приклади неповних квадратних рівнянь. Як розв'язати неповне квадратне рівняння кожного виду?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

20.1. (*Усно.*) Які з рівнянь є квадратними:

1) $x^2 - 3x + 4 = 0$; 2) $x^2 - 7x^3 = 0$; 3) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 9$;
4) $8x - x^2 = 0$; 5) $5x - 4 = 3x + 7$; 6) $1 - 5x^2 = 0$?

20.2. (*Усно.*) Серед квадратних рівнянь знайдіть: а) неповні; б) зведені:

1) $3x^2 + 2x = 0$; 2) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 3) $3x^2 - 4x + 7 = 0$;
4) $5x^2 = 0$; 5) $7x^2 - 21 = 0$; 6) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$.

20.3. Випишіть коефіцієнти a, b і c квадратного рівняння:

1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$; 2) $3x^2 + 9 = 0$; 3) $3x - x^2 + 7 = 0$;
4) $3x^2 = 0$; 5) $7x - x^2 = 0$; 6) $2 + 4x - x^2 = 0$.

20.4. Складіть квадратне рівняння за його коефіцієнтами:

1) $a = 3$; $b = 5$; $c = -2$; 2) $a = -1$; $b = 5$; $c = 0$;
3) $a = -4$; $b = 0$; $c = 0$; 4) $a = 13$; $b = 0$; $c = -39$.

20.5. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її:

Квадратне рівняння	Коефіцієнти рівняння		
$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$5x^2 - 3x - 17 = 0$			
	2	−3	4
$-15x^2 + 14x = 0$			
	−3	0	7

Продовження таблиці

Квадратне рівняння	**Коефіцієнти рівняння**		
$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$-x^2 + 5x + 6 = 0$			
	-5	-1	19

2

20.6. Зведіть до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$ рівняння:
1) $(5x - 1)(5x + 1) = x(7x - 13)$; 2) $(2x - 3)^2 = (x + 2)(x - 7)$.

20.7. Замініть рівняння рівносильним йому квадратним рівнянням:
1) $(2x + 3)(2x - 3) = x(9x - 12)$; 2) $(4x + 1)^2 = (x - 3)(x + 2)$.

20.8. Які із чисел -2; -1; 0; 1; 2 є коренями рівняння:
1) $x^2 - 5x = 0$; 2) $3x^2 = 0$;
3) $x^2 - 3x + 2 = 0$; 4) $x^2 - 2x - 3 = 0$?

20.9. Які із чисел -5; -2; 0; 2; 5 є коренями рівняння:
1) $x^2 + 2x = 0$; 2) $-5x^2 = 0$;
3) $x^2 - x - 6 = 0$; 4) $x^2 - 25 = 0$?

20.10. Розв'яжіть рівняння:
1) $3x^2 - 27 = 0$; 2) $3{,}7x^2 = 0$; 3) $2x^2 + 8 = 0$;
4) $-5x^2 + 10 = 0$; 5) $-5{,}7x^2 = 0$; 6) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{7}{9} = 0$.

20.11. Знайдіть корені рівняння:
1) $2x^2 - 2 = 0$; 2) $3x^2 + 9 = 0$; 3) $1{,}4x^2 = 0$;
4) $-7x^2 + 21 = 0$; 5) $-1{,}8x^2 = 0$; 6) $\frac{1}{7}x^2 - \frac{5}{7} = 0$.

20.12. Знайдіть корені рівняння:
1) $x^2 + 6x = 0$; 2) $2x^2 - 8x = 0$; 3) $4x^2 - x = 0$;
4) $0{,}1x^2 + 2x = 0$; 5) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x = 0$; 6) $3x^2 - 7x = 0$.

20.13. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - 5x = 0$; 2) $3x^2 + 9x = 0$; 3) $5x^2 + x = 0$;
4) $0{,}2x^2 - 10x = 0$; 5) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x = 0$; 6) $4x^2 + 9x = 0$.

3

20.14. Складіть квадратне рівняння, у якого:
1) немає коренів; 2) тільки один корінь;
3) два цілих корені; 4) два ірраціональних корені.

20.15. За якого значення коефіцієнта a число 3 є коренем рівняння $ax^2 + 2x - 7 = 0$?

20.16. За якого значення коефіцієнта b число -2 є коренем рівняння $x^2 + bx - 8 = 0$?

20.17. За яких значень коефіцієнтів a і b числа 1 і 2 є коренями рівняння $ax^2 + bx + 4 = 0$?

20.18. За яких значень коефіцієнтів b і c числа 1 і 3 є коренями рівняння $x^2 + bx + c = 0$?

20.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2)(x + 3) = -6$; 2) $\frac{1}{3}x(x + 9) = \frac{1}{8}x(x - 16)$;

3) $(3x - 1)^2 = (x - 3)^2$; 4) $(2x + 1)(3x - 1) = x(x - 2) + 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

20.20. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)(x - 5) = -15$; 2) $\frac{2}{3}x(x - 3) = \frac{1}{2}x(x + 4)$;

3) $(2x - 3)^2 = (3x - 2)^2$; 4) $(5x + 1)(2x - 1) = x(x + 3) - 6\left(x + \frac{1}{6}\right)$.

20.21. Для яких значень x значення виразу $(3x - 1)(x + 4)$ на 4 менше від значення виразу $x(x + 2)$?

20.22. Для яких значень x значення виразу $(2x + 1)(x + 3)$ на 3 більше за значення виразу $x(x - 4)$?

4 **20.23.** Добуток двох чисел дорівнює їх середньому арифметичному. Знайдіть ці числа, якщо їх різниця дорівнює 1.

20.24. Половина добутку двох чисел дорівнює їх середньому арифметичному. Знайдіть ці числа, якщо їх різниця дорівнює 2.

20.25. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5|x| = 0$; 2) $-\frac{x^3}{|x|} + 4 = 0$.

20.26. Розв'яжіть рівняння:

1) $-x^2 + 3|x| = 0$; 2) $\frac{x^3}{|x|} - 9 = 0$.

Вправи для повторення

20.27. Доведіть тотожність:

$$\frac{3x + 3}{x^2 - x} : \left(\frac{x + 3}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + x}\right) = 3.$$

20.28. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & \text{якщо } x < -2; \\ x^2, & \text{якщо } -2 \leqslant x \leqslant 2; \\ 8 - 2x, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

20.29. Знайдіть значення виразу $b^2 - 4ac$, якщо
1) $a = 1$; $b = 5$; $c = -6$; 2) $a = 1$; $b = -6$; $c = 9$;
3) $a = 2$; $b = -3$; $c = -5$; 4) $a = 4$; $b = 5$; $c = -9$.

20.30. Винесіть множник з-під знака кореня:
1) $\sqrt{18}$; 2) $\sqrt{300}$; 3) $\sqrt{108}$; 4) $\sqrt{363}$.

20.31. Скоротіть дріб:
1) $\dfrac{4 + 2\sqrt{7}}{2}$; 2) $\dfrac{6 - \sqrt{12}}{2}$; 3) $\dfrac{8 - 2\sqrt{3}}{6}$; 4) $\dfrac{16 + \sqrt{20}}{8}$.

Життєва математика

20.32. Офіс обладнано приладами освітлення, які споживають 600 Ват щогодини і працюють по 10 годин щодня. Якщо замінити їх на енергоощадні, то витрати електроенергії зменшаться на 80 %.

1) Скільки Ват·год протягом тижня (5 робочих днів) можна заощадити в цьому офісі, якщо обладнати його енергоощадним освітленням?

2) *Проєктна діяльність.* Дізнайтеся тариф на 1 кВт·год (1 кВт = 1000 Вт) та обчисліть, скільки грошей можна заощадити протягом 5 робочих днів у цьому офісі після впровадження згаданих заходів енергозбереження.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

20.33. У ящику лежать лише чорні, білі та зелені кульки. Які б n ($n > 2$) кульок навмання не витягали з ящика, серед них обов'язково будуть біла й чорна. Яка найбільша кількість кульок може лежати в цьому ящику?

§ 21. Формула коренів квадратного рівняння

1. Схема розв'язування квадратного рівняння

Розглянемо повне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ та знайдемо його розв'язки в загальному вигляді.

Помножимо ліву і праву частини рівняння на $4a$ (оскільки $a \neq 0$, то і $4a \neq 0$):

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Далі додамо до обох частин рівняння b^2:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2.$$

Оскільки $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$, матимемо:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Вираз $b^2 - 4ac$ називають ***дискримінантом квадратного рівняння*** $ax^2 + bx + c = 0$.

Слово *дискримінант* походить від латинського *розрізнювальний*. Позначають дискримінант літерою D.

Ураховуючи, що $b^2 - 4ac = D$, запишемо рівняння у вигляді:

$$(2ax + b)^2 = D$$

і продовжимо його розв'язувати.

Розглянемо всі можливі випадки залежно від значення D.

1) $D > 0$. Тоді з рівняння $(2ax + b)^2 = D$ маємо:

$$2ax + b = \sqrt{D}, \quad \text{або} \quad 2ax + b = -\sqrt{D},$$
$$2ax = -b + \sqrt{D}, \qquad 2ax = -b - \sqrt{D},$$
$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \qquad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

(при діленні на $2a$ врахували, що $a \neq 0$).

Отже, якщо $D > 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різних корені:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ і } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Коротко це можна записати так:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.$$

Отримали ***формулу коренів квадратного рівняння***.

2) $D = 0$. Тоді маємо рівняння $(2ax + b)^2 = 0$,

$2ax + b = 0$, звідки $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Отже, якщо $D = 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має один корінь: $x = -\dfrac{b}{2a}$. Цей корінь можна було б знайти і за формулою коренів квадратного рівняння, урахувавши, що $D = 0$: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\dfrac{b}{2a}$. Тому можна вважати, що рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ для $D = 0$ має два однакових корені, кожний з яких дорівнює $-\dfrac{b}{2a}$.

3) $D < 0$. У цьому разі рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має коренів, оскільки не існує такого значення x, для якого значення виразу $(2ax + b)^2$ було б від'ємним.

Систематизуємо дані про розв'язки квадратного рівняння за допомогою схеми.

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Якщо $D > 0$, то $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

Якщо $D = 0$, то $x = -\dfrac{b}{2a}$

Якщо $D < 0$, то коренів немає

2. Приклади розв'язування квадратних рівнянь

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

1) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; 2) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; 3) $x^2 - 2x + 7 = 0$.

Розв'язання. 1) $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$; $D > 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-3 \pm 1}{4}$; отже, $x_1 = -1$; $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

2) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$; $D = 0$; $x = -\dfrac{-6}{2 \cdot 9} = \dfrac{1}{3}$.

3) $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 4 - 28 = -24 < 0$, $x \in \varnothing$.

Відповідь: 1) -1; $-\dfrac{1}{2}$;

2) $\dfrac{1}{3}$;

3) коренів немає.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $-\dfrac{1}{7}x^2 - \dfrac{4}{7}x + 1 = 0$.

Розв'язання. Помножимо ліву і праву частини рівняння на (-7), щоб його коефіцієнти стали цілими числами, матимемо рівняння:

$$x^2 + 4x - 7 = 0.$$

$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 44$, тоді $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{44}}{2}$.

Оскільки $\sqrt{44} = \sqrt{4 \cdot 11} = 2\sqrt{11}$, то

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -2 \pm \sqrt{11}.$$

Відповідь: $-2 \pm \sqrt{11}$.

3. Розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(2-\sqrt{x})(x^2+x-2)=0$.

Розв'язання. Областю визначення рівняння є всі невід'ємні значення x: $x \geqslant 0$. Маємо:

$$2-\sqrt{x}=0, \quad \text{або} \quad x^2+x-2=0,$$

$$\sqrt{x}=2, \qquad D=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9,$$

$$x_1=4; \qquad x_{2,3}=\frac{-1\pm 3}{2},$$

$$x_2=-2; \quad x_3=1.$$

Проте корінь -2 не задовольняє умову $x \geqslant 0$. Тому задане рівняння має корені 1 і 4.

Відповідь: 1; 4.

Приклад 4. Знайти всі значення a, для яких рівняння $ax^2+4x+1=0$ має один корінь.

Розв'язання. 1) Якщо $a=0$, то рівняння набуває вигляду $4x+1=0$. Це рівняння має один корінь.

2) Якщо $a \neq 0$, то маємо квадратне рівняння. Воно має один корінь, якщо дискримінант рівняння дорівнює нулю. $D=4^2-4a\cdot 1=16-4a$. Маємо $16-4a=0$, $a=4$.

Відповідь: $a=0$ або $a=4$.

А ще раніше...

Неповні квадратні рівняння та деякі види повних квадратних рівнянь (наприклад, вигляду $x^2 \pm x = a$) вавилонські математики вміли розв'язувати ще 4 тис. років тому. У більш пізні часи деякі квадратні рівняння у Давній Греції та Індії математики розв'язували геометрично. Прийоми розв'язування деяких квадратних рівнянь без застосування геометрії виклав давньогрецький математик *Діофант* (III ст.).

Франсуа Вієт (1540–1603)

Багато уваги квадратним рівнянням приділяв арабський математик *Мухаммед аль-Хорезмі* (IX ст.). Він знайшов, як розв'язати рівняння вигляду $ax^2=bx$, $ax^2=c$, $ax^2+bx=c$, $ax^2+c=bx$, $bx+c=ax^2$ (для додатних a, b, c) і отримати додатні корені цих рівнянь.

Формули, що пов'язують між собою корені квадратного рівняння і його коефіцієнти, віднайшов французький математик *Франсуа Вієт* у 1591 році. Його висновок (у сучасних позначеннях) виглядає так: «Коренями рівняння $(a+b)x-x^2=ab$ є числа a і b».

Після опублікування праць нідерландського математика *А. Жирара* (1595–1632), а також француза *Р. Декарта* (1596–1650) та англійця *І. Ньютона* (1643–1727) формула коренів квадратного рівняння набула сучасного вигляду.

? Що називають дискримінантом квадратного рівняння? ○ Скільки коренів має квадратне рівняння залежно від значення дискримінанта? ○ Запишіть формулу коренів квадратного рівняння.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

21.1. (*Усно.*) Скільки різних коренів має квадратне рівняння, якщо його дискримінант дорівнює:
1) 4; 2) 0; 3) –9; 4) 17?

21.2. Чи має корені квадратне рівняння, і якщо має, то скільки, якщо його дискримінант дорівнює:
1) –7; 2) 49; 3) 13; 4) 0?

21.3. (*Усно.*) Чи правильно записано дискримінант квадратного рівняння:
1) $2x^2 + 3x - 1 = 0$, $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$;
2) $3x^2 - 4x + 2 = 0$, $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$;
3) $-\frac{1}{2}x^2 - 5x + 3 = 0$, $D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;
4) $\frac{1}{8}x^2 + 2x - 4 = 0$, $D = 2^2 + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot (-4)$?

21.4. Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів квадратного рівняння: 1) $6x^2 - 5x - 1 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 4 = 0$; 3) $x^2 + 2x + 5 = 0$; 4) $7x^2 + 2x - 1 = 0$.

21.5. Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів квадратного рівняння: 1) $2x^2 - 3x - 1 = 0$; 2) $x^2 + x + 7 = 0$; 3) $x^2 + 6x + 9 = 0$; 4) $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

2

21.6. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $2x^2 + 5x - 3 = 0$;
3) $3x^2 + 5x + 2 = 0$; 4) $x^2 + 10x + 25 = 0$;
5) $x^2 + x - 90 = 0$; 6) $x^2 - 10x - 24 = 0$.

21.7. Розв'яжіть рівняння: 1) $x^2 - 4x - 5 = 0$; 2) $2x^2 + 7x - 4 = 0$; 3) $x^2 - 12x + 36 = 0$; 4) $x^2 - x - 56 = 0$.

21.8. Розв'яжіть рівняння:
1) $10x^2 = 5x + 0,6$; 2) $x^2 + 3 = 4x$; 3) $x^2 + 5x = -6$;
4) $1 - 4x = 5x^2$; 5) $81y^2 + 1 = -18y$; 6) $3p = 5p^2 - 2$.

21.9. Розв'яжіть рівняння: 1) $10x^2 = 0,4 - 3x$; 2) $x^2 + 7 = -8x$; 3) $7x = x^2 + 12$; 4) $4y = 4y^2 + 1$.

21.10. Для яких значень x:
1) значення многочлена $x^2 - 2x - 3$ дорівнює нулю;
2) значення многочленів $x^2 + 2x$ і $0,5x + 2,5$ між собою рівні;
3) значення двочлена $10x^2 - 8x$ дорівнює значенню тричлена $9x^2 + 2x - 25$?

21.11. Для яких значень y:
1) значення многочлена $y^2 + 4y - 5$ дорівнює нулю;
2) значення многочленів $y^2 - 3y$ і $0,5y + 4,5$ між собою рівні;
3) значення тричлена $4 + 2y - y^2$ дорівнює значенню двочлена $4y^2 - 6y$?

3

21.12. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-3)^2 = 2x-3$;

2) $3(x+1)^2 = 2x+2$;

3) $(x+3)(x-1) = 2x(x-2)+5$;

4) $x(x-3)-(x-5)(x+5) = (x+1)^2$.

21.13. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+2)^2 = 2x+3$;

2) $5(x-2)^2 = 3x-6$;

3) $(x+2)(x-3) = 2x(x-4)+6$;

4) $x(x-1)-(x-3)(x+3) = (x+2)^2-1$.

21.14. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2+2x}{3} = \dfrac{4x+1}{5}$; 2) $\dfrac{y+2}{3} + \dfrac{y^2-1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

3) Нехай x – найбільший корінь першого рівняння, y – найбільший корінь другого рівняння. Знайдіть значення виразу $21x+6y$, відтак дізнаєтеся, якої довжини (у км) є одна з найбільш мальовничих і найдовших набережних у світі, що знаходиться у місті Дніпро.

21.15. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2-3x}{4} = \dfrac{2x+5}{3}$; 2) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x^2-1}{5} = 1$.

21.16. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1}{2}x^2 - x - 7 = 0$; 2) $-x^2 - 2x + 4 = 0$;

3) $0,1x^2 - 3x - 5 = 0$; 4) $0,5x^2 + 1,5x - 4 = 0$.

21.17. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1}{2}x^2 + x - 3 = 0$; 2) $-x^2 + 2x + 11 = 0$;

3) $0,2x^2 + 2x - 3 = 0$; 4) $0,5x^2 - 2,5x - 4 = 0$.

4

21.18. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sqrt{x}-2)(x^2+x-2) = 0$; 2) $x^2 - \dfrac{3x^2}{|x|} - 4 = 0$;

3) $x|x| + 3x - 4 = 0$; 4) $\dfrac{x^3}{|x|} - x - 2 = 0$.

21.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sqrt{x}-3)(x^2-x-6) = 0$; 2) $x^2 - \dfrac{2x^2}{|x|} - 3 = 0$;

3) $x|x| - 4x - 5 = 0$; 4) $\dfrac{x^3}{|x|} + 4x - 12 = 0$.

21.20. Для яких значень a рівняння має лише один корінь:
1) $2x^2 + x - a = 0$; 2) $x^2 - ax + 4 = 0$?

21.21. Для яких значень b рівняння має лише один корінь:
1) $4x^2 - x + b = 0$; 2) $x^2 + bx + 9 = 0$?

Вправи для повторення

21.22. Скоротіть дріб:
1) $\dfrac{a^2 - 49}{a^2 - 14a + 49}$; 2) $\dfrac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$.

21.23. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = 0{,}2x - 15$ з осями координат.

21.24. Відомо, що $a + b = 5$, $ab = -7$. Знайдіть значення виразу:
1) $ab^2 + a^2b$; 2) $a^2 + b^2$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

21.25. Розв'яжіть рівняння, порівняйте суму його коренів із числом, протилежним другому коефіцієнту рівняння, а добуток коренів – з вільним членом рівняння:
1) $x^2 - x - 6 = 0$; 2) $x^2 + 6x + 8 = 0$.

21.26. 1) Нехай a, b і c – коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, x_1 і x_2 – його корені. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її.

Рівняння	$-\dfrac{b}{a}$	$\dfrac{c}{a}$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	x_1x_2
$x^2 - 2x - 8 = 0$						
$2x^2 + 5x - 7 = 0$						
$3x^2 - 16x + 5 = 0$						

2) Порівняйте $-\dfrac{b}{a}$ і $x_1 + x_2$; $\dfrac{c}{a}$ і x_1x_2.

Життєва математика

21.27. Визначте, скільки відсотків свого щомісячного доходу витрачає на цигарки особа із зарплатнею 12 800 грн, якщо викурює за добу одну пачку цигарок? Вважайте, що в місяці 30 днів, а пачка цигарок коштує 80 грн.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

21.28. (*XV Всеукраїнська олімпіада, 1975 р.*) Для яких натуральних значень n число $2^n + 65$ є квадратом цілого числа?

§ 22. Теорема Вієта та обернена до неї теорема

1. Теорема та формули Вієта для зведеного квадратного рівняння

Розглянемо кілька зведених квадратних рівнянь, що мають два різних корені. У таблицю занесемо такі дані про них: саме рівняння, його корені x_1 і x_2, суму його коренів $x_1 + x_2$, добуток його коренів $x_1 \cdot x_2$.

Рівняння	x_1 і x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 6x + 8 = 0$	2 і 4	6	8
$x^2 + x - 12 = 0$	−4 і 3	−1	−12
$x^2 + 5x + 6 = 0$	−3 і −2	−5	6
$x^2 - 4x - 5 = 0$	−1 і 5	4	−5

Зверніть увагу, що сума коренів кожного з рівнянь таблиці дорівнює другому коефіцієнту рівняння, узятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену. Ця властивість справджується для будь-якого *зведеного квадратного рівняння*, яке має корені.

Зведене квадратне рівняння в загальному вигляді зазвичай записують так: $\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$.

Т Теорема Вієта. **Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів — вільному члену.**

Доведення. Нехай x_1 і x_2 – корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, дискримінант якого $D = p^2 - 4q$. Якщо $D > 0$, то рівняння має два корені:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \text{ і } x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}.$$

Якщо $D = 0$, то рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два однакових корені: $x_1 = x_2 = \frac{-p}{2}$.

Знайдемо суму і добуток коренів:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-p + \sqrt{D} - p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} =$$

$$= \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Отже, $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$. ■

Цю теорему називають *теоремою Вієта* на честь видатного французького математика Франсуа Вієта, котрий і відкрив цю властивість. Її можна сформулювати так:

> Якщо x_1 і x_2 – корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p;\ x_1 \cdot x_2 = q}$.

Останні дві рівності, що пов'язують між собою корені та коефіцієнти зведеного квадратного рівняння, називають ***формулами Вієта***.

Якщо в рівнянні $x^2 + px + q = 0$ коефіцієнт q є цілим числом, то з рівності $x_1x_2 = q$ слідує, що цілими коренями цього рівняння можуть бути лише дільники числа q.

Приклад 1. Знайти підбором корені рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 – корені цього рівняння. Тоді $x_1 + x_2 = -3$ і $x_1x_2 = -4$. Якщо x_1 і x_2 – цілі числа, то вони є дільниками числа -4. Тому серед цих дільників шукаємо ті два, сума яких дорівнює -3. Неважко здогадатися, що це числа 1 і -4. Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = -4$.

Відповідь: 1; -4.

Приклад 2. Один з коренів рівняння $x^2 + px - 18 = 0$ дорівнює 3. Знайти коефіцієнт p та другий корінь рівняння.

Розв'язання. Нехай $x_1 = 3$ – один з коренів рівняння $x^2 + px - 18 = 0$, а x_2 – другий його корінь. За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = -18$. Ураховуючи, що $x_1 = 3$, маємо:

$$\begin{cases} 3 + x_2 = -p, \\ 3 \cdot x_2 = -18; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -6, \\ 3 + (-6) = -p; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -6, \\ p = 3. \end{cases}$$

Відповідь: $p = 3$; $x_2 = -6$.

2. Теорема та формули Вієта для незведеного квадратного рівняння

Використовуючи теорему Вієта, можна записати відповідні формули і для коренів будь-якого незведеного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Оскільки $a \neq 0$, поділимо обидві частини рівняння на a. Одержимо зведене квадратне рівняння:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Тоді, за теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

> Якщо x_1 і x_2 – корені незведеного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$.

Приклад 3. Не розв'язуючи рівняння $3x^2 - 5x - 7 = 0$, знайти суму і добуток його коренів.

Розв'язання. Знайдемо дискримінант рівняння, щоб пересвідчитися, що корені існують: $D = 5^2 + 4 \cdot 3 \cdot 7$. Очевидно, що $D > 0$, отже, рівняння має два корені x_1 і x_2. За теоремою Вієта:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-5}{3} = \frac{5}{3}; \quad x_1x_2 = -\frac{7}{3}.$$

Відповідь: $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$; $x_1x_2 = -\frac{7}{3}$.

Приклад 4. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $2x^2 - 3x - 1 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайти значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$.

Розв'язання. За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$; $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$.

Тоді: 1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$;

2) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$;

3) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3\frac{1}{4}$.

Відповідь: 1) -3; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $3\frac{1}{4}$.

3. Теорема, обернена до теореми Вієта

Справджується і твердження, обернене до теореми Вієта.

Т Теорема (обернена до теореми Вієта). **Якщо числа m і n такі, що $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$, то вони є коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$.**

Доведення. За умовою $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$. Тому рівняння $x^2 + px + q = 0$ можна записати так: $x^2 - (m + n)x + mn = 0$.

Перевіримо, чи є число m коренем цього рівняння, для чого підставимо в ліву частину рівняння замість змінної x число m. Одержимо:

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0.$$

Отже, m – корінь цього рівняння.

Аналогічно підставимо в ліву частину рівняння замість змінної x число n. Одержимо: $n^2 - (m + n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0$, тобто n – також корінь цього рівняння.

Отже, m і n – корені рівняння $x^2 + px + q = 0$. ■

Приклад 5. Скласти зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа −5 і 2.

Розв'язання. Шукане квадратне рівняння має вигляд $x^2 + px + q = 0$. За теоремою, оберненою до теореми Вієта:

$p = -(x_1 + x_2) = -(-5 + 2) = 3$; $q = x_1 \cdot x_2 = -5 \cdot 2 = -10$.

Отже, $x^2 + 3x - 10 = 0$ – шукане рівняння.

Відповідь: $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Сформулюйте і доведіть теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння. ○ Чому дорівнюють сума і добуток коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$? ○ Сформулюйте теорему, обернену до теореми Вієта.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

22.1. (*Усно.*) Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму і добуток його коренів:

1) $x^2 - 15x + 14 = 0$; 2) $x^2 + 12x - 28 = 0$;
3) $x^2 + 17x + 52 = 0$; 4) $x^2 - 6x + 5 = 0$;
5) $x^2 + 2x = 0$; 6) $x^2 - 8 = 0$.

22.2. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння:

1) $2x^2 + 4x - 5 = 0$; 2) $-x^2 + 5x - 6 = 0$;
3) $3x^2 - 6x - 8 = 0$; 4) $4x^2 - 7x = 0$.

22.3. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму і добуток його коренів:

1) $x^2 - 2x - 8 = 0$; 2) $x^2 + x - 6 = 0$;
3) $x^2 + 9x + 5 = 0$; 4) $2x^2 - 6x + 3 = 0$.

2

22.4. Розв'яжіть рівняння, використовуючи формулу коренів, та перевірте істинність теореми Вієта для кожного з рівнянь:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$; 2) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
3) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; 4) $2x^2 + 5x + 2 = 0$.

22.5. Розв'яжіть квадратне рівняння за формулою коренів та перевірте для нього істинність теореми Вієта:

1) $x^2 + 3x - 28 = 0$; 2) $2x^2 - 13x + 15 = 0$.

22.6. Усі дані рівняння мають корені. У яких з них корені є числами одного знака, а в яких – числами різних знаків:

1) $x^2 + 2x - 8 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
3) $3x^2 + 4x + 1 = 0$; 4) $2x^2 - 3x - 5 = 0$?

22.7. Складіть зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 2 і 3; 2) −3 і 4; 3) −7 і 2; 4) 0,3 і −0,5.

22.8. Складіть зведене квадратне рівняння, корені якого дорівнюють:

1) 5 і 1; 2) 2 і −7; 3) −2 і −3; 4) 0,7 і −0,1.

3

22.9. Знайдіть підбором корені рівняння:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $x^2 + 6x + 8 = 0$; 3) $x^2 - 6x - 7 = 0$;
4) $x^2 + 3x - 4 = 0$; 5) $x^2 - 17x + 42 = 0$; 6) $x^2 - 5x - 24 = 0$.

22.10. Знайдіть підбором корені рівняння:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$; 2) $x^2 - x - 6 = 0$; 3) $x^2 + 4x + 3 = 0$;
4) $x^2 - 12x + 27 = 0$; 5) $x^2 + x - 6 = 0$; 6) $x^2 + 9x - 22 = 0$.

22.11. Доведіть, що рівняння $12x^2 + 17x - 389 = 0$ не може мати коренів, що є числами одного знака.

22.12. Не розв'язуючи рівняння, визначте знаки його коренів (якщо корені існують):

1) $x^2 + 8x + 5 = 0$; 2) $x^2 - 12x - 1 = 0$;
3) $3x^2 + 14x - 7 = 0$; 4) $4x^2 - 7x + 2 = 0$.

22.13. Не розв'язуючи рівняння, визначте, чи має воно корені. Якщо так, то знайдіть знаки коренів:

1) $x^2 - 13x - 2 = 0$; 2) $x^2 + 17x + 1 = 0$;
3) $5x^2 - 14x + 1 = 0$; 4) $3x^2 + 7x - 18 = 0$.

22.14. Один з коренів рівняння $x^2 + 6x + q = 0$ дорівнює $-3{,}5$. Знайдіть q і другий корінь.

22.15. Один з коренів рівняння $x^2 + px - 9 = 0$ дорівнює 1,5. Знайдіть p і другий корінь.

22.16. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 + px - 10 = 0$ задовольняють умову $2x_1 + 5x_2 = 0$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт p.

22.17. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 4x + q = 0$ задовольняють умову $2x_1 - 3x_2 = 13$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт q.

22.18. Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

1) $-\frac{1}{3}$ і 5; 2) $-\frac{1}{4}$ і $-\frac{5}{6}$; 3) $\sqrt{5}$ і $-\sqrt{5}$; 4) $2 - \sqrt{3}$ і $2 + \sqrt{3}$.

22.19. Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

1) -2 і $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{8}$ і $\frac{1}{2}$; 3) $-\sqrt{7}$ і $\sqrt{7}$; 4) $3 + \sqrt{7}$ і $3 - \sqrt{7}$.

4

22.20. x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 + 4x - 3 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$;
4) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 5) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; 6) $(x_1 - x_2)^2$.

22.21. x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 - 5x - 2 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$;
4) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 5) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; 6) $(x_1 - x_2)^2$.

22.22. Складіть квадратне рівняння, корені якого відповідно на 2 більші за корені рівняння $x^2 - 3x - 9 = 0$.

22.23. Складіть квадратне рівняння, корені якого на 3 менші від відповідних коренів рівняння $x^2 + 2x - 7 = 0$.

Вправи для повторення

22.24. Маємо два шматки сплаву міді й цинку. Перший містить 20 % міді, а другий – 35 % міді. Скільки кілограмів першого сплаву і скільки другого треба взяти, щоб отримати сплав масою 200 кг, який містив би 29 % міді?

22.25. Спростіть вираз: $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$.

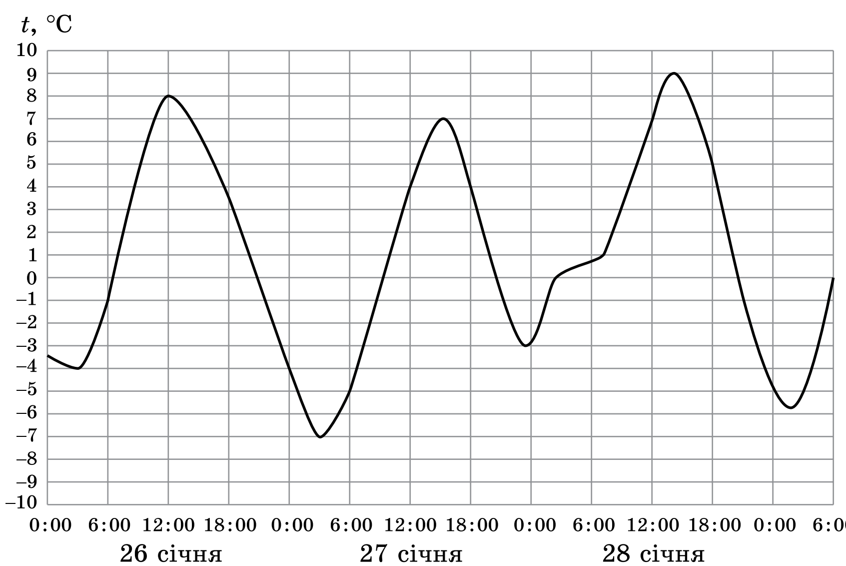
Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

22.26. Сума двох чисел дорівнює 32, а одне з них у 7 разів більше за друге. Знайдіть ці числа.

22.27. Різниця двох чисел дорівнює 3, а різниця між квадратом більшого і квадратом меншого з них становить 81. Знайдіть ці числа.

Життєва математика

22.28. На графіку зображено зміни температури повітря, які реєструвалися метеорологічною станцією протягом трьох діб. По горизонталі вказано дату і час доби, по вертикалі – значення температури в °C. Визначте за графіком найменшу температуру повітря 27 січня.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

22.29. До збірної команди України на Всесвітній шаховій олімпіаді входить 6 шахістів і капітан, який керує командою, але не бере участі в змаганнях. Середній вік усіх членів команди на 2 роки більший за середній вік її шахістів. На скільки років вік капітана більший за середній вік членів його команди?

§ 23. Квадратне рівняння як математична модель текстових і прикладних задач

У 7 класі ми вже розглядали задачі, які можна розв'язати за допомогою лінійних рівнянь або систем лінійних рівнянь. Щоб розв'язати прикладну задачу, спочатку створюють її математичну модель, тобто записують залежність між відомими і невідомими величинами за допомогою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо. Математичною моделлю багатьох задач у математиці, фізиці, техніці, практичній діяльності людини може бути не тільки лінійне рівняння чи система лінійних рівнянь, а й квадратне рівняння.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Різниця кубів двох натуральних чисел дорівнює 279. Знайти ці числа, якщо одне з них на 3 більше за друге.

Розв'язання. Нехай менше із цих чисел дорівнює n, тоді більше дорівнює $n + 3$. За умовою маємо рівняння:

$$(n + 3)^3 - n^3 = 279.$$

Спростимо ліву частину рівняння.
Маємо: $n^2 + 3n - 28 = 0$, звідки $n_1 = 4$; $n_2 = -7$. За змістом задачі $n \in N$. Тому умову задачі задовольняє лише число 4. Отже, перше шукане число 4, а друге: $4 + 3 = 7$.
Відповідь: 4; 7.

Приклад 2. У кінотеатрі кількість місць у ряду на 6 більша за кількість рядів. Скільки рядів у кінотеатрі, якщо місць у ньому 432?

Розв'язання. Нехай у кінотеатрі x рядів, тоді в кожному ряду $(x + 6)$ місць. Усього місць у залі $x(x + 6)$.
Маємо рівняння: $x(x + 6) = 432$.
Перепишемо рівняння у вигляді $x^2 + 6x - 432 = 0$, звідки $x_1 = 18$, $x_2 = -24$.
За змістом задачі значення x може бути лише додатним. Цю умову задовольняє лише x_1. Отже, у кінотеатрі 18 рядів.
Відповідь: 18 рядів.

Приклад 3. Деякий опуклий многокутник має 54 діагоналі. Знайти, скільки в нього вершин.

Розв'язання. Нехай у многокутника n вершин. З кожної його вершини виходить $(n - 3)$ діагоналі. Тоді з усіх n його вершин виходить

$n(n-3)$ діагоналі. Але водночас кожну діагональ пораховано двічі. Отже, усього діагоналей буде $\frac{n(n-3)}{2}$.

Маємо рівняння: $\frac{n(n-3)}{2} = 54$, тобто $n^2 - 3n - 108 = 0$, звідки $n_1 = 12$ і $n_2 = -9$. Від'ємний корінь рівняння не може бути розв'язком задачі.

Відповідь: 12 вершин.

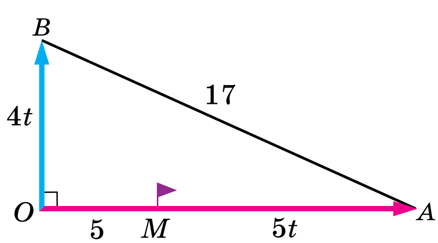
Приклад 4. Тіло підкинули вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с. Висота h (у м), на якій через t с буде тіло, обчислюється за формулою $h = 20t - 5t^2$. У який момент часу тіло опиниться на висоті 15 м?

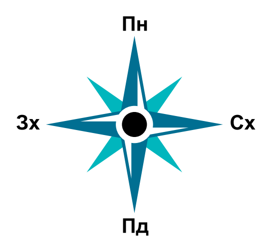
Розв'язання. За умовою: $15 = 20t - 5t^2$. Після спрощення отримаємо рівняння: $t^2 - 4t + 3 = 0$, розв'язавши яке знайдемо корені: $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

Обидва корені є розв'язком задачі, оскільки на висоті 15 м тіло буде двічі: спочатку під час руху вгору (це відбудеться через 1 с), а вдруге – під час падіння (це відбудеться через 3 с).

Відповідь: 1 с, 3 с.

Приклад 5. О 9-й годині ранку з базового табору в східному напрямку вирушила група туристів зі швидкістю 5 км/год. Через годину з того самого табору зі швидкістю 4 км/год вирушила інша група туристів, але в північному напрямку. О котрій годині відстань між групами туристів буде 17 км?





Мал. 23.1

Розв'язання. За першу годину перша група туристів подолає 5 км: $OM = 5$ (мал. 23.1). Далі рухатимуться обидві групи. Нехай відстань 17 км між групами буде через t годин після початку руху другої групи. Тоді за цей час перша група подолає $5t$ км, а друга – $4t$ км, $OB = 4t$. Усього перша група подолає відстань $OA = OM + MA = 5 + 5t$ (км).

Із $\triangle AOB$, за теоремою Піфагора, $AB^2 = OA^2 + OB^2$. Маємо рівняння:
$(5 + 5t)^2 + (4t)^2 = 17^2$,
тобто $41t^2 + 50t - 264 = 0$.
Враховуючи, що $t > 0$, отримаємо $t = 2$ (год).
Отже, відстань 17 км між групами туристів буде о 12-й годині.
Відповідь: о 12-й годині.

А ще раніше...

Прикладні задачі виникли як результат діяльності людини, їх розв'язують уже протягом кількох тисячоліть. Найдавніші відомі нам письмові пам'ятки, що містять правила знаходження площ та об'ємів, було складено в Єгипті та Вавилоні приблизно 4 тис. років тому. Близько 2,5 тис. років тому греки перейняли геометричні знання єгиптян та вавилонян і почали розвивати теоретичну (чисту) математику.

Також у давні часи математики використовували математичні моделі, зокрема і під час геометричних побудов (метод подібності фігур).

Сучасне поняття математичної моделі як опис деякого реального процесу мовою математики стало використовуватися в середині XX ст. у зв'язку з розвитком *кібернетики* – науки про загальні закони добування, зберігання, передавання та обробки інформації. А розділ сучасної математики, що вивчає математичне моделювання реальних процесів, навіть виокремили в науку – *прикладну математику*.

Значний внесок у розвиток прикладної математики зробили наші видатні земляки – математики М. П. Кравчук та М. В. Остроградський.

Розвиток кібернетики в Україні пов'язують з ім'ям академіка Віктора Михайловича Глушкова – видатного українського математика, доктора фізико-математичних наук, професора. У 1953 р. він очолив лабораторію обчислювальної техніки Інституту математики АН УРСР, став її мозковим й енергетичним центром. На базі цієї лабораторії у 1957 р. було створено Обчислювальний центр, а в 1962 р. – Інститут кібернетики АН УРСР, який і очолив В.М. Глушков. Лабораторія відома тим, що в 1951 р. у ній було створено першу в Євразії Малу електронну лічильну машину, а вже в Обчислювальному центрі завершено роботу щодо створення першої в Україні великої електронно-обчислювальної машини «Київ». Сьогодні Інститут кібернетики НАН України має ім'я свого першого очільника – В.М. Глушкова та є, зокрема, розробником прикладних інформаційних технологій для розв'язання нагальних практичних задач, що виникають під час моделювання економічних процесів, проєктування об'єктів теплоенергетики, розв'язання проблем екології та захисту довкілля.

Поясніть, як розв'язано задачі у прикладах 1–5.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2

23.1. Одне з двох натуральних чисел на 5 менше від другого. Знайдіть ці числа, якщо їх добуток дорівнює 204.

23.2. Добуток двох натуральних чисел дорівнює 180. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 3 більше за друге.

23.3. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 108 см^2, а одна зі сторін на 3 см більша за другу.

23.4. Ділянку прямокутної форми, одна зі сторін якої на 10 м більша за другу, треба обнести парканом. Знайдіть довжину паркана, якщо площа ділянки 375 м^2.

23.5. Сума двох сусідніх сторін прямокутника – 17 см, а його площа – 70 см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

3

23.6. Один з катетів прямокутного трикутника на 7 см менший від другого. Знайдіть периметр трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 13 см.

23.7. Знайдіть площу прямокутника, якщо сума двох його непаралельних сторін дорівнює 14 см, а діагональ дорівнює 10 см.

23.8. Добуток двох послідовних натуральних чисел на 181 більший за їх суму. Знайдіть ці числа.

23.9. Шматок скла має форму квадрата. Коли від нього відрізали смужку 30 см завширшки, його площа стала дорівнювати 2800 см^2. Знайдіть початкові розміри шматка скла.

23.10. Площа прямокутного листа фанери дорівнює 300 дм^2. Його розрізали на дві частини, одна з яких – квадрат, а друга – прямокутник. Знайдіть сторону квадрата, якщо сторона одержаного прямокутника, що не є стороною квадрата, дорівнює 5 дм.

23.11. Знайдіть три послідовних цілих числа, якщо потроєний квадрат меншого з них на 242 більший за суму квадратів двох інших.

23.12. Знайдіть три послідовних цілих числа, якщо квадрат більшого з них на 970 менший від подвоєної суми квадратів двох інших.

23.13. Сума кубів двох натуральних чисел дорівнює 468. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 12.

23.14. Дві дороги перетинаються під прямим кутом. Від перехрестя доріг одночасно рушили два велосипедисти, один у східному напрямку, другий – у північному. Швидкість першого була на 4 км/год більшою за швидкість другого. Через 2 год відстань між ними становила 40 км. Якою була швидкість кожного з велосипедистів?

23.15. Периметр прямокутника дорівнює 44 см, а сума площ квадратів, побудованих на сусідніх сторонах, дорівнює 244 см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

4

23.16. Фотокартку розміром 10×15 (у см) помістили в рамку сталої ширини, площа якої 204 см^2. Визначте ширину рамки.

23.17. На земельній ділянці прямокутної форми зі сторонами 8 м і 6 м треба розмістити прямокутну клумбу площею 15 м^2 так, щоб навколо клумби впритул до меж ділянки утворилася доріжка сталої ширини. Визначте, яку ширину матиме ця доріжка.

23.18. На шаховому турнірі серед людей з інвалідністю було зіграно 45 партій. Кожний з учасників зіграв з кожним по одному разу. Скільки шахістів узяло участь у турнірі?

23.19. До Різдва всі члени родини Петренків підготували одне одному подарунки та поклали їх під ялинку. Скільки осіб у родині Петренків, якщо під ялинкою виявилося 20 подарунків?

23.20. Висота h (у м), на якій через t с опиниться м’яч, котрий підкинули вертикально вгору, обчислюється за формулою $h = v_0t - 5t^2$, де v_0 – початкова швидкість (у м/с). Після удару футболіста м’яч полетів вертикально вгору і через 1 с опинився на висоті 10 м. Через який час м’яч буде на висоті 10,8 м?

23.21. Футболістка, зріст якої 1,8 м, підбиває м’яч головою, і через 0,4 с м’яч опиняється на висоті 3,8 м. Через який час м’яч буде на висоті 4,25 м?

23.22. Сигнальна ракета, яку випустили вертикально вгору, через 2 с опинилася на висоті 40 м. Через який час вона буде на висоті 44,2 м?

23.23. Для промивання труб завод придбав 6 літрів кислоти. Частину кислоти використали, а вміст посудини з кислотою доповнили до початкового об'єму водою. Іншим разом із цієї посудини використали таку саму кількість суміші, як кислоти першого разу, а посудину знов долили водою до початкового об'єму. Після цього чистої кислоти в посудині стало втричі менше, ніж води. Скільки літрів кислоти використали першого разу?

Вправи для повторення

23.24. Знайдіть корені рівняння:

1) $3x^2 - 12 = 0$; 2) $5x^2 - 9x = 0$;

3) $3x^2 + 10x + 3 = 0$; 4) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

23.25. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 2)^2 = 5x + 7$; 2) $\frac{1}{4}x^2 - x - 5 = 0$.

23.26. Для яких значень a рівняння $ax^2 + 6x - 4 = 0$ має лише один корінь?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

23.27. Розкладіть на множники многочлен:

1) $4x^2 - 5x$; 2) $7x^2 + 14x$; 3) $x^2 - 36$;

4) $\frac{1}{9}x^2 - 25$; 5) $x^2 - 10x + 25$; 6) $16x^2 + 8x + 1$.

Життєва математика

23.28. За даними Головного управління статистики Київської області, станом на 1 листопада 2019 року в Київській області (без урахування Києва) постійно проживало 1 772 353 особи. А за даними Головного управління статистики в м. Києві, у столиці України на цю саму дату постійно проживало 2 922 794 особи. Скільки відсотків становить населення Києва від загальної кількості населення Київської області, включаючи столицю України? Результат округліть із точністю до сотих відсотка.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

23.29. Доведіть, що з будь-яких ста натуральних чисел можна вибрати кілька (можливо, й одне), сума яких ділитиметься на 100.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Укажіть рівняння, що є квадратним.

А. $x^3 + x^2 - x = 0$ **Б.** $2x^2 - 3x + 7 = 0$

В. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$ **Г.** $6x - 5 = 0$

2. Якщо дискримінант квадратного рівняння дорівнює 15, то квадратне рівняння...

А. Не має коренів **Б.** Має один корінь
В. Має два різних корені **Г.** Має безліч коренів

3. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 + x - 5 = 0$, тоді

А. $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = -5$ **Б.** $x_1 + x_2 = -1$; $x_1x_2 = 5$
В. $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = 5$ **Г.** $x_1 + x_2 = -1$; $x_1x_2 = -5$

2 **4.** Укажіть корені рівняння $5x^2 - 4x = 0$.

А. 0; 1,25 **Б.** 0; 0,8 **В.** 0; –0,8 **Г.** 0,8

5. Розв'яжіть рівняння $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

А. $\frac{1}{3}$; 3 **Б.** $-\frac{1}{3}$; –3 **В.** 1; 9 **Г.** Коренів немає

6. Площа прямокутника дорівнює 168 см^2, а одна з його сторін на 2 см менша від другої. Знайдіть меншу сторону прямокутника.

А. 14 см **Б.** 13 см **В.** 12 см **Г.** 11 см

3 **7.** Для якого значення a число 2 буде коренем рівняння $ax^2 + 4x - 20 = 0$?

А. –3 **Б.** 3 **В.** 7 **Г.** –7

8. Розв'яжіть рівняння $(x + 2)^2 = 4x + 5$.

А. –1; 1 **Б.** 1 **В.** $2 + \sqrt{5}$; $2 - \sqrt{5}$ **Г.** Коренів немає

9. Дано три послідовних натуральних числа. Потроєний квадрат меншого з них на 50 більший за суму квадратів двох інших. Знайдіть менше із даних чисел.

А. 5 **Б.** 11 **В.** 12 **Г.** 13

4

10. Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{x} - 3)(2x^2 + 3x - 5) = 0$.

А. –2,5; 1; 9 **Б.** –2,5; 1; 3 **В.** 1; 3 **Г.** 1; 9

11. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $2x^2 - 3x - 7 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $x_1^2 + x_2^2$.

А. 9,25 **Б.** –4,75 **В.** 23 **Г.** Знайти неможливо

12. Під час ділової зустрічі було здійснено 36 потисків руки, причому всі учасники потисли руку одне одному. Скільки осіб взяло участь у діловій зустрічі?

А. 8 **Б.** 9 **В.** 10 **Г.** 18

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та його коренем (А–Г).

Рівняння	*Корені рівняння*
1. $(x+2)(x-4)=-8$	**А.** –1; 2
2. $(2x-1)(2x+1)=3x^2+x+1$	**Б.** 0; 2
3. $\dfrac{x^2+2x}{4}=\dfrac{4x-2}{3}$	**В.** 1; 2
	Г. $1\frac{1}{3}$; 2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 20–23

1 **1.** Які з рівнянь є квадратними:

1) $x^2-4x+7=0$; 2) $x^2+\dfrac{1}{x}=19$;

3) $x^2-15=0$; 4) $7x-13=2x+3$?

2. Скільки різних коренів має квадратне рівняння, якщо його дискримінант дорівнює:

1) 9; 2) 0; 3) –16; 4) 23?

3. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння $x^2+2x-17=0$.

2 **4.** Розв'яжіть неповне квадратне рівняння:

1) $2x^2-18=0$; 2) $3x^2-4x=0$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2-5x+2=0$; 2) $x^2-6x+9=0$.

6. Одна зі сторін прямокутника на 4 см більша за другу, а площа прямокутника дорівнює 192 см^2. Знайдіть його периметр.

3 **7.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+1)^2=4x-5$; 2) $\dfrac{1}{2}x^2-x-3=0$.

8. Знайдіть три послідовних натуральних числа, якщо квадрат більшого з них на 140 менший від суми квадратів двох інших.

4 **9.** Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{x}-2)(x^2+3x-4)=0$.

Додаткові задачі

4 **10.** Числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2-5x-3=0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2+x_2^2$.

11. На першості школи з баскетболу було зіграно 28 матчів, причому кожна команда зіграла з кожною по одному матчу. Скільки команд брало участь у першості школи з баскетболу?

§ 24. Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

1. Квадратний тричлен

Вирази $5x^2 - 2x + 7$ і $-x^2 + 3x - 9$ є многочленами другого степеня з однією змінною стандартного вигляду. Такі многочлени називають ***квадратними тричленами***.

Квадратним тричленом називають многочлен вигляду $ax^2 + bx + c$, де x – змінна, a, b, c – числа, причому $a \neq 0$.

Наприклад, вираз $x^2 + 2x - 3$ є квадратним тричленом, у якого $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

2. Корені та дискримінант квадратного тричлена

Приклад 1. Розглянемо квадратний тричлен $5x^2 - 3x - 8$. Якщо $x = -1$, то його значення дорівнює нулю. Дійсно, $5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 8 = 0$. У такому разі число -1 називають ***коренем*** цього ***квадратного тричлена***.

Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, для якого значення тричлена дорівнює нулю.

Щоб знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, треба розв'язати рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Приклад 2. Знайти корені квадратного тричлена $3x^2 + 2x - 16$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння $3x^2 + 2x - 16 = 0$. Одержимо $x_1 = 2$; $x_2 = -2\frac{2}{3}$. Отже, коренями квадратного тричлена $3x^2 + 2x - 16$ є числа 2 і $-2\frac{2}{3}$.

Відповідь: 2; $-2\frac{2}{3}$.

Квадратний тричлен, як і квадратне рівняння, може мати два різних корені, один корінь (тобто два однакових корені) або не мати коренів. Це залежить від знака дискримінанта квадратного рівняння $D = b^2 - 4ac$, який також називають і ***дискримінантом квадратного тричлена*** $ax^2 + bx + c$.

Якщо $D > 0$, то квадратний тричлен має два різних корені, якщо $D = 0$, то квадратний тричлен має один корінь (тобто два однакових корені), якщо $D < 0$, то квадратний тричлен не має коренів.

3. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

Якщо корені квадратного тричлена відомі, то його можна розкласти на лінійні множники, тобто на множники, які є многочленами першого степеня.

Т Теорема (про розкладання квадратного тричлена на множники). **Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то справджується рівність**

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Доведення. Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (за теоремою Вієта).

Для доведення теореми розкриємо дужки у правій частині рівності:
$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_1x - xx_2 + x_1x_2) = a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2) =$
$= a\left(x^2 - x \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c.$

Отже, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. ■

Якщо квадратний тричлен не має коренів, то його не можна розкласти на лінійні множники.

Приклад 3. Розкласти на множники квадратний тричлен:

1) $-2x^2 + 3x + 5$; 2) $x^2 - 2x + 5$; 3) $3x^2 - 12x + 12$.

Розв'язання. 1) Коренями тричлена $-2x^2 + 3x + 5$ є числа -1 і $2{,}5$. Тому $-2x^2 + 3x + 5 = -2(x + 1)(x - 2{,}5)$. Знайдений результат можна записати інакше, помноживши перший у розкладі множник -2 на двочлен $x - 2{,}5$. Матимемо:

$$-2x^2 + 3x + 5 = (x + 1)(5 - 2x).$$

2) Квадратне рівняння $x^2 - 2x + 5 = 0$ не має коренів. Тому квадратний тричлен $x^2 - 2x + 5$ на множники розкласти не можна.

3) Квадратне рівняння $3x^2 - 12x + 12 = 0$ має два однакових корені $x_1 = x_2 = 2$. Тому $3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)(x - 2) = 3(x - 2)^2$.

Відповідь: 1) $-2(x + 1)(x - 2{,}5)$; 2) розкласти на множники не можна; 3) $3(x - 2)^2$.

Неважко помітити, що коли квадратний тричлен має два однакових корені, то він є квадратом двочлена або добутком деякого числа на квадрат двочлена.

Приклад 4. Скоротити дріб $\frac{4x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники квадратний тричлен $4x^2 - 2x - 2$. Його коренями є числа 1 і $-0{,}5$. Тому

$$4x^2 - 2x - 2 = 4(x - 1)(x + 0{,}5).$$

Отже, $\dfrac{4x^2-2x-2}{x^2-1}=\dfrac{4(x-1)(x+0{,}5)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{4(x+0{,}5)}{x+1}=\dfrac{4x+2}{x+1}$.

Відповідь: $\dfrac{4x+2}{x+1}$.

4. Виділення квадрата двочлена з квадратного тричлена

Під час розв'язування деяких задач, пов'язаних з квадратним тричленом ax^2+bx+c, буває зручно подати його у вигляді $a(x-m)^2+n$, де m і n – деякі числа. Таке перетворення називають ***виділенням квадрата двочлена*** з квадратного тричлена.

Приклад 5. Виділити із тричлена $2x^2+16x-7$ квадрат двочлена.

Розв'язання. Винесемо за дужки множник 2:

$$2x^2+16x-7=2(x^2+8x-3{,}5).$$

Скориставшись формулою квадрата суми двох чисел $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, перетворимо вираз у дужках, вважаючи, що $x^2=a^2$, а $8x=2ab$. Тоді $8x=2\cdot x\cdot 4$, звідки визначаємо, що число 4 є другим доданком квадрата суми, тобто $b=4$, а тому ще додамо і віднімемо 4^2:

$2(x^2+8x-3{,}5)=2(x^2+2\cdot x\cdot 4+4^2-4^2-3{,}5)=2((x+4)^2-19{,}5)=$
$=2(x+4)^2-39.$

Відповідь: $2(x+4)^2-39$.

Приклад 6. Дано квадратний тричлен $-4x^2+24x-20$. Для якого значення x він набуває найбільшого значення? Знайти це значення.

Розв'язання. Виділимо з тричлена квадрат двочлена:

$-4x^2+24x-20=-4(x^2-6x+5)=-4(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+5)=$
$=-4((x-3)^2-4)=-4(x-3)^2+16.$

Вираз $-4(x-3)^2$ для будь-якого значення x набуває недодатного значення, тобто $-4(x-3)^2\leqslant 0$, причому дорівнює нулю цей вираз лише для $x=3$. Тому для $x=3$ значення даного в умові тричлена дорівнює 16 і є для нього найбільшим. Отже, квадратний тричлен $-4x^2+24x-20$ набуває найбільшого значення, що дорівнює 16, якщо $x=3$.

Відповідь: 16, якщо $x=3$.

Що називають квадратним тричленом? ○ Що називають коренем квадратного тричлена? ○ Скільки коренів може мати квадратний тричлен? ○ Як розкласти квадратний тричлен ax^2+bx+c на множники? ○ Яке перетворення квадратного тричлена ax^2+bx+c називають виділенням квадрата двочлена?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

24.1. (*Усно.*) Чи є квадратним тричленом вираз:

1) x^2+x-5;	2) x^3-x+9;	3) $5x+11$;
4) $x+7$;	5) $\dfrac{1}{x^2+x-4}$;	6) x^2-x+x^3;
7) $2x-7+6x^2$;	8) $-7x^2+10x+\dfrac{1}{x}$;	9) $4+2x-3x^2$?

24.2. З виразів випишіть ті, що є квадратними тричленами:

1) $x^3 - x$; 2) $x^2 - x - 7$; 3) $2x^2 + 17x + \frac{1}{5}$;

4) $4x + 13$; 5) $x^2 - x + x^7$; 6) $\frac{1}{3x^2 + x}$;

7) $-5x^2 + 18 + 4x$; 8) $-7 + 10x + 13x^2$; 9) $9x - x^2 + 7$.

24.3. Які із чисел 1; 2; 3 є коренями квадратного тричлена:
1) $x^2 - 2x + 1$; 2) $x^2 + 8x - 9$;
3) $x^2 - 5x + 6$; 4) $x^2 - 2x - 3$?

24.4. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте кількість його коренів:
1) $x^2 + 2x - 5$; 2) $x^2 + 3x + 7$;
3) $x^2 - 2x + 1$; 4) $x^2 - x - 2$.

24.5. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте кількість його коренів:
1) $x^2 + x - 6$; 2) $x^2 + 6x + 9$;
3) $x^2 - 2x + 5$; 4) $x^2 + 3x - 7$.

2

24.6. Знайдіть корені квадратного тричлена:
1) $x^2 - 6x + 5$; 2) $x^2 - 4x - 12$;
3) $5x^2 - 10x + 5$; 4) $-2x^2 - 3x + 2$.

24.7. Знайдіть корені квадратного тричлена:
1) $x^2 - 7x + 12$; 2) $x^2 - x - 20$;
3) $6x^2 - 7x + 1$; 4) $-3x^2 + 6x - 3$.

24.8. Чи можна розкласти на множники квадратний тричлен:
1) $16x^2 - 5x + 1$; 2) $4x^2 + 4x + 1$; 3) $2x^2 + x - 19$?

24.9. Розкладіть на множники квадратний тричлен:
1) $x^2 - 5x + 4$; 2) $x^2 + 7x - 8$; 3) $2x^2 - 5x + 2$;
4) $-x^2 + 11x - 24$; 5) $-3x^2 + 8x + 3$; 6) $4x^2 + x - 3$.

24.10. Розкладіть на множники квадратний тричлен:
1) $x^2 - 8x + 7$; 2) $x^2 + 8x - 9$; 3) $2x^2 - 7x + 3$;
4) $-x^2 + x + 12$; 5) $-6x^2 - 5x + 1$; 6) $7x^2 + 19x - 6$.

24.11. Покажіть, що квадратні тричлени $x^2 - 2x - 3$, $3x^2 - 6x - 9$, $-4x^2 + 8x + 12$ мають одні й ті самі корені. Розкладіть на множники кожний із цих тричленів.

24.12. Чи правильно розкладено на множники квадратний тричлен:
1) $2x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 3)$; 2) $4x^2 - 8x + 4 = 4(x - 1)^2$?

24.13. Чи правильно розкладено на множники квадратний тричлен:
1) $3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$; 2) $2x^2 - 8x + 8 = (x - 2)^2$?

24.14. Скоротіть дріб: 1) $\frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$; 2) $\frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2}$.

24.15. Скоротіть дріб: 1) $\frac{x + 1}{x^2 + 3x + 2}$; 2) $\frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$.

24.16. Чому не можна подати у вигляді добутку лінійних множників квадратний тричлен: 1) $x^2 + 2x + 7$; 2) $-2x^2 + 4x - 7$?

24.17. Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена:
1) $x^2 + 2x - 5$;
2) $x^2 - 4x + 7$;
3) $2x^2 - 4x + 10$;
4) $3x^2 - 18x + 27$.

24.18. Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена:
1) $x^2 - 2x + 7$;
2) $x^2 + 4x - 13$;
3) $3x^2 - 24x + 3$;
4) $2x^2 + 4x + 2$.

3

24.19. Знайдіть корені квадратного тричлена:
1) $\frac{1}{3}x^2 - 2x - 7$;
2) $0{,}2x^2 + 7x + 40$.

24.20. Знайдіть корені квадратного тричлена:
1) $\frac{1}{4}x^2 + 2x - 15$;
2) $0{,}2x^2 - 3x - 9$.

24.21. Розкладіть тричлен на множники, якщо це можливо:
1) $x^2 - 2x - 11$;
2) $2x^2 - 3x + 7$;
3) $-2x^2 - 3x + 7$;
4) $-x^2 - 5x - 8$.

24.22. Розкладіть тричлен на множники, якщо це можливо:
1) $x^2 + 4x - 7$;
2) $-2x^2 + 3x - 6$.

24.23. Скоротіть дріб:
1) $\frac{4x - 12}{x^2 - 5x + 6}$;
2) $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 3x}$;
3) $\frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9}$;
4) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 5x - 14}$;
5) $\frac{2x^2 + 9x - 5}{3x^2 + 14x - 5}$;
6) $\frac{5x^2 - 37x + 14}{22x - 2x^2 - 56}$.

24.24. Скоротіть дріб:
1) $\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 5x}$;
2) $\frac{x^2 - 16}{3x^2 - 10x - 8}$;
3) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 7x + 10}$;
4) $\frac{2x^2 + 4x + 2}{3x^2 - 6x - 9}$.

24.25. Обчисліть значення дробу:
1) $\frac{2x^2 + 9x - 5}{x^2 + 8x + 15}$, якщо $x = 97$;
2) $\frac{3x^2 - 24x + 48}{7x - 3x^2 + 20}$, якщо $x = -\frac{2}{3}$.

24.26. Виконайте дії:
1) $\frac{1}{x - 2} - \frac{x}{x^2 + 2x - 8}$;
2) $\frac{1}{x + 4} + \frac{2}{x^2 + 6x + 8}$;
3) $\frac{x + 4}{3x + 2} \cdot \frac{3x^2 - 10x - 8}{x^2 - 16}$;
4) $\frac{-2x^2 + 5x - 2}{2x + 10} : \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 25}$.

24.27. Виконайте дії:
1) $\frac{1}{x + 2} + \frac{7}{x^2 - 3x - 10}$;
2) $\frac{1}{x^2 - 4} : \frac{3x - 2}{3x^2 + 4x - 4}$.

24.28. Виділіть з кожного квадратного тричлена квадрат двочлена та доведіть, що для будь-якого значення x квадратний тричлен:
1) $x^2 - 4x + 9$ набуває додатного значення;
2) $2x^2 + 8x + 8$ набуває невід'ємного значення;
3) $-x^2 + 6x - 16$ набуває від'ємного значення;
4) $-x^2 + 10x - 25$ набуває недодатного значення.

24.29. Виділіть з кожного квадратного тричлена квадрат двочлена та доведіть, що для будь-якого значення x квадратний тричлен:
1) $x^2 + 6x + 17$ набуває додатного значення;
2) $-x^2 + 12x - 37$ набуває від'ємного значення.

4

24.30. Розкладіть на множники многочлен:
1) $x^3 + 3x^2 + 2x$;
2) $-2x^3 - 5x^2 + 3x$;
3) $\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{4}x^2$;
4) $-\frac{1}{2}x^5 + 2x^4 + 6x^3$.

24.31. Розкладіть на множники многочлен:
1) $x^3 - 12x^2 + 32x$;
2) $\frac{1}{3}x^4 - 4x^3 + 9x^2$.

24.32. Побудуйте графік функції:
1) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$;
2) $y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 + x}$.

24.33. Спростіть вираз:
1) $\frac{x^3 - 16x}{x + 40} \cdot \left(\frac{x - 4}{3x^2 + 11x - 4} - \frac{16}{16 - x^2}\right)$;
2) $\frac{1}{(2a - 2)^2} : \left(\frac{a}{a^2 - 2a + 1} - \frac{a + 2}{a^2 + a - 2}\right)$.

24.34. Спростіть вираз:
1) $\left(\frac{x - 1}{2x^2 + 3x + 1} - \frac{1}{x^2 - 1}\right) : \frac{x - 4}{x^3 - x}$;
2) $(3b - 9)^2 \cdot \left(\frac{b}{b^2 - 6b + 9} - \frac{b + 2}{b^2 - b - 6}\right)$.

Вправи для повторення

24.35. Спростіть вираз:
1) $\sqrt{0,16a^6x^{14}}$, якщо $a > 0$, $x < 0$;
2) $\sqrt{8m^3p^6}$, якщо $p > 0$.

24.36. Числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 - 2x - 10 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:
1) $x_1^2 + x_2^2$;
2) $x_1^3 + x_2^3$;
3) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$;
4) $x_1^4 + x_2^4$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

24.37. Розкладіть на множники:

1) $x^3 - 4x$;
2) $x^4 - 4x^3 + 4x^2$;
3) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$;
4) $x^3 + x^2 - x - 1$.

24.38. Розв'яжіть рівняння, використавши умову рівності дробу нулю:

1) $\dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4} = 0$;
2) $\dfrac{2x^2 + x - 28}{2x + 8} = 0$.

24.39. Розв'яжіть рівняння, використавши основну властивість пропорції.

1) $\dfrac{2x + 1}{x - 3} = \dfrac{2x - 2}{x + 5}$;
2) $\dfrac{x - 3}{x + 1} = \dfrac{x - 9}{2x + 3}$.

24.40. Розв'яжіть рівняння множенням обох його частин на спільний знаменник:

1) $\dfrac{1}{2x - 10} + \dfrac{2}{3x - 15} = \dfrac{1}{6}$;
2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2 - x} = \dfrac{1}{x - 1}$.

Життєва математика

24.41. У меблевому салоні меблі продають у розібраному вигляді. Придбавши меблі в цьому салоні, покупець може самостійно зібрати меблі або замовити послугу збирання меблів, вартість якої становить 12 % від вартості придбаних меблів. Покупець придбав шафу за 9700 грн. Скільки коштів він заощадить, якщо збере цю шафу самостійно?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

24.42. Вкладниця поклала кошти на депозити в різні банки, перший з яких нараховує 10 % річних, а другий – 15 % річних. За рік її загальний прибуток становив 12 % від початкового розміру внесених коштів. Знайдіть відношення розміру вкладу в першому банку до розміру вкладу в другому банку.

§ 25. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних

1. Дробові раціональні рівняння

Розв'язування дробових раціональних рівнянь часто зводиться до розв'язування квадратних рівнянь. Нагадаємо, як можна розв'язувати дробово-раціональні рівняння.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\dfrac{x^2+2x}{x-1}=\dfrac{x-4}{1-x}$.

Розв'язання. Домножимо чисельник і знаменник дробу, що стоїть у правій частині рівняння, на -1. Маємо $\dfrac{x^2+2x}{x-1}=\dfrac{4-x}{x-1}$. Отримане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^2+2x=4-x, \\ x-1\neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+3x-4=0, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

Рівняння $x^2+3x-4=0$ має корені $x_1=1$, $x_2=-3$. Проте лише другий корінь задовольняє умову $x\neq 1$. Запис розв'язування рівняння можна було закінчити так:

$$\begin{cases} x=1 \text{ або } x=-3, \\ x\neq 1; \end{cases} \quad x=-3.$$

Відповідь: -3.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x^2-2x}=\dfrac{8}{x^3-4x}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники знаменники дробів у рівнянні, щоб знайти область визначення рівняння і спільний знаменник:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x(x-2)}=\frac{8}{x(x-2)(x+2)}.$$

Домножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник дробів – вираз $x(x-2)(x+2)$, враховуючи область визначення рівняння (ОВР): $x\neq 0$, $x\neq 2$, $x\neq -2$. Матимемо:

$$\begin{cases} x(x-2)+x+2=8, \\ x\neq 0, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-x-6=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \text{ або } x=-2, \\ x\neq 0, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2; \end{cases}$$

звідки $x=3$.
Відповідь: 3.

2. Метод розкладання многочлена на множники

Деякі рівняння, права частина яких дорівнює нулю, можна розв'язати за допомогою розкладання многочлена на множники.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^3+2x^2-15x=0$.

Розв'язання. Винесемо в лівій частині рівняння спільний множник x за дужки. Матимемо: $x(x^2+2x-15)=0$,

$$x=0 \text{ або } x^2+2x-15=0,$$
$$x=3 \text{ або } x=-5.$$

Отже, рівняння $x^3+2x^2-15x=0$ має три корені: $x_1=0$; $x_2=3$; $x_3=-5$.
Відповідь: 0; 3; -5.

3. Біквадратні рівняння

Рівняння вигляду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де $a \neq 0$, називають ***біквадратним рівнянням***. Його можна розв'язати, увівши нову змінну, тобто позначивши $x^2 = t$. Тоді $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, а початкове рівняння набуде вигляду

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Такий метод розв'язування називають ***методом введення нової змінної***, або ***методом заміни змінної***.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x^2 = t$, одержимо рівняння $t^2 + 5t - 36 = 0$, коренями якого є числа $t_1 = 4$; $t_2 = -9$.

Повернемося до змінної x.

1) $t_1 = 4$, тоді $x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$;

2) $t_2 = -9$, тоді $x^2 = -9$, коренів немає.

Отже, коренями початкового рівняння є числа 2 і -2.

Відповідь: 2; -2.

4. Метод заміни змінної

Не лише біквадратні, а й деякі інші види рівнянь можна розв'язувати за допомогою заміни змінної.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x + 4) = 12$.

Розв'язання. Якщо ми розкриємо дужки в лівій частині рівняння, одержимо рівняння четвертого степеня, яке не завжди можна розв'язати методами шкільної математики. Тому дужки розкривати не будемо. Помітимо, що вирази, які містять x, в обох дужках є однаковими, тому можна скористатися заміною $x^2 + 4x = t$. Одержимо рівняння $t(t + 4) = 12$, що є квадратним відносно змінної t. Перепишемо його у вигляді $t^2 + 4t - 12 = 0$, звідки $t_1 = 2$; $t_2 = -6$.

Повертаємося до змінної x.

1) $t_1 = 2$, тоді $x^2 + 4x = 2$, тобто $x^2 + 4x - 2 = 0$, звідки $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$;

2) $t_2 = -6$, тоді $x^2 + 4x = -6$, тобто $x^2 + 4x + 6 = 0$, але $D < 0$, тому коренів немає.

Отже, $-2 + \sqrt{6}$ і $-2 - \sqrt{6}$ – корені початкового рівняння.

Відповідь: $-2 \pm \sqrt{6}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $x(x - 2) = \dfrac{4}{(x + 1)(x - 3)}$.

Розв'язання. Розкриємо дужки в кожній частині рівняння, одержимо: $x^2 - 2x = \dfrac{4}{x^2 - 2x - 3}$.

Помітимо, що вирази, які містять змінну x, в обох частинах рівняння є однаковими, тому виконаємо заміну $x^2 - 2x = t$. Одержимо рівняння зі змінною t: $t = \dfrac{4}{t - 3}$.

Розв'язавши його, матимемо корені $t_1 = -1$, $t_2 = 4$.
Повернемося до змінної x.
1) $t_1 = -1$, тоді $x^2 - 2x = -1$, тобто $x^2 - 2x + 1 = 0$, звідки $x = 1$;
2) $t_2 = 4$, тоді $x^2 - 2x = 4$, тобто $x^2 - 2x - 4 = 0$, звідки $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$.
Отже, початкове рівняння має три корені: 1; $1 \pm \sqrt{5}$.
Відповідь: 1; $1 \pm \sqrt{5}$.

Якими методами можна розв'язувати рівняння? ○ Яке рівняння називають біквадратним? ○ Як розв'язують біквадратне рівняння?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

25.1. (*Усно.*) Які з рівнянь – біквадратні:
1) $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$; 2) $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$;
3) $x^2 + 7x - 1 = 0$; 4) $-5x^4 - 8x^2 - 11 = 0$;
5) $\frac{1}{x^4} + \frac{4}{x^2} - 9 = 0$; 6) $10x^2 - 9x^4 - 5 = 0$?

25.2. Випишіть біквадратні рівняння:
1) $x^2 + x - 11 = 0$; 2) $5x^4 - 4x^3 - 5 = 0$;
3) $x^4 - 7x^2 - 6 = 0$; 4) $x^5 - 9x^2 + 4 = 0$;
5) $7x^4 + 12x^2 - 9 = 0$; 6) $5 - 7x^4 - 6x^2 = 0$.

2

25.3. Розв'яжіть біквадратне рівняння:
1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; 2) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$;
3) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$; 4) $2x^4 - x^2 - 6 = 0$;
5) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$; 6) $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$.

25.4. Знайдіть корені біквадратного рівняння:
1) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$; 2) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$;
3) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$; 4) $3x^4 - 2x^2 - 8 = 0$;
5) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$; 6) $25x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

25.5. Розв'яжіть рівняння:
1) $\frac{x^2 - x - 2}{x + 3} = 0$; 2) $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 0$.

25.6. Розв'яжіть рівняння:
1) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 4} = 0$; 2) $\frac{x^2 - x - 12}{x + 3} = 0$.

25.7. Розв'яжіть рівняння:
1) $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{x+1}$; 2) $\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}$;
3) $\frac{2x^2}{x-1} = \frac{3x-14}{1-x}$; 4) $\frac{x^2-5}{x-3} = \frac{2x-10}{3-x}$.

25.8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2}{x-2}=\frac{3x}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x+3}=\frac{9}{x+3}$;

3) $\frac{3x^2}{1-x}=\frac{x-14}{x-1}$; 4) $\frac{x^2-3}{x-2}=\frac{2x-5}{2-x}$.

25.9. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{x-3}{x}=\frac{8}{x+3}$; 2) $\frac{2x-3}{x+2}=\frac{x}{x+6}$;

3) $\frac{10}{x-3}=x$; 4) $\frac{8}{x}=3x+2$.

25.10. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{x-2}{x}=\frac{3}{x+2}$; 2) $\frac{3x-1}{x+3}=\frac{x}{x+1}$;

3) $\frac{3}{4-x}=x$; 4) $\frac{6}{x}=2x-1$.

25.11. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^3-4x=0$; 2) $x^3+9x=0$;

3) $4x^4-x^2=0$; 4) $x^3+x^2-6x=0$.

25.12. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^3-9x=0$;

2) $x^3+4x=0$;

3) $16x^4-x^2=0$;

4) $x^3+x^2-12x=0$.

25.13. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{20}{x}-\frac{20}{x+1}=1$; 2) $\frac{2}{x}+\frac{1}{x-2}=1$.

25.14. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{12}{x}-\frac{12}{x+1}=1$; 2) $\frac{3}{x}+\frac{1}{x-4}=1$.

3

25.15. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^4-10x^2+9}{x+3}=0$; 2) $\frac{6x^2+19x-7}{1-3x}=5$;

3) $\frac{2x^2-5x+2}{x^2-4}=3$; 4) $\frac{4x+2}{1+2x}=6x+5$.

25.16. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^4+x^2-2}{x+1}=0$; 2) $\frac{6x^2+7x-5}{1-2x}=4$;

3) $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-9}=2$; 4) $\frac{8x+2}{1+4x}=12x+5$.

25.17. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x+7}{x+2}+\dfrac{x-4}{x-2}=1;$ 2) $\dfrac{3x+3}{3x+2}+\dfrac{2x-6}{3x-2}=2;$

3) $\dfrac{4}{x-5}-\dfrac{2}{x+5}=\dfrac{x^2+15}{x^2-25};$ 4) $\dfrac{2x+2}{x-3}-\dfrac{18}{x^2-9}=\dfrac{x+6}{x+3}.$

25.18. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{3x+9}{x+1}+\dfrac{x-6}{x-1}=3;$ 2) $\dfrac{2x+8}{x+5}+\dfrac{10}{x^2-25}=\dfrac{x-4}{x-5}.$

25.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2x-3}{x^2+4x+4}-\dfrac{x+1}{x^2+2x}=\dfrac{5}{x};$ 2) $\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{4}{x^2+6x+9}=\dfrac{1}{x-3};$

3) $\dfrac{6}{x^2-36}-\dfrac{3}{x^2+6x}=\dfrac{x+12}{x^2-6x};$ 4) $\dfrac{3x+2}{x+1}+\dfrac{x+4}{x-3}=\dfrac{3x^2+1}{x^2-2x-3}.$

25.20. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{21}{x^2-2x}-\dfrac{14}{x^2+2x}=\dfrac{5}{x};$

2) $\dfrac{3}{x^2-4x+4}+\dfrac{4}{x^2-4}+\dfrac{1}{x+2}=0;$

3) $\dfrac{5}{x^2+10x}+\dfrac{x+20}{x^2-10x}=\dfrac{10}{x^2-100};$

4) $\dfrac{2x+7}{x+4}-\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{5}{x^2+3x-4}.$

25.21. Для якого значення x:

1) сума дробів $\dfrac{6}{1-x}$ і $\dfrac{x}{x+2}$ дорівнює їх добутку;

2) сума дробів $\dfrac{2}{x-3}$ і $\dfrac{6}{x+3}$ дорівнює їх частці?

25.22. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^3-2x^2-9x+18=0;$ 2) $3x^3+3x^2-4x-4=0.$

25.23. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^3-x^2-4x+4=0;$ 2) $4x^3+8x^2-3x-6=0.$

25.24. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2+3)^2-3(x^2+3)-4=0;$ 2) $(x^2-x)^2+2(x^2-x)-8=0.$

25.25. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2+2)^2-2(x^2+2)-3=0;$ 2) $(x^2+x)^2-5(x^2+x)-6=0.$

4 **25.26.** Знайдіть корені рівняння:

1) $\dfrac{1}{2(x^2+3)}-\dfrac{1}{3(x+4)}=\dfrac{1}{x^3+4x^2+3x+12};$

2) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{32}{x^3+2x^2-x-2}.$

25.27. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{1}{x-3} - \frac{14}{x^3 - x^2 - 9x + 9} = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}.$$

25.28. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 5x + 5 = 0$; 2) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$.

25.29. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3 = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.

25.30. Розв'яжіть рівняння:

1) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$; 2) $(x^2 + 2x - 2)(x^2 + 2x - 4) = 8$;

3) $(x-2)^4 - 2(x-2)^2 - 3 = 0$; 4) $(x^2 + x + 1)^2 - 8x^2 - 8x - 1 = 0$.

25.31. Розв'яжіть рівняння:

1) $x + 2\sqrt{x} - 8 = 0$; 2) $(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x - 3) = 3$;

3) $(x+1)^4 - 5(x+1)^2 - 6 = 0$; 4) $(x^2 - x - 1)^2 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$.

Вправи для повторення

25.32. Корені квадратного тричлена $3x^2 + bx + c$ дорівнюють -7 і $\frac{2}{3}$. Розкладіть цей квадратний тричлен на множники.

25.33. Сума двох чисел дорівнює 27, а сума їх квадратів дорівнює 369. Знайдіть ці числа.

25.34. Спростіть вираз $\frac{x-2}{3x+2} \cdot \frac{9x^2 - 4}{2x^2 - 5x + 2} - \frac{x}{1-2x}$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

25.35. З двох райцентрів, відстань між якими 84 км, одночасно назустріч одна одній виїхали дві велосипедистки. Знайдіть швидкість кожної з них, якщо вони зустрілися через 3 год і швидкість однієї була на 4 км/год більшою за швидкість іншої.

Життєва математика

25.36. Заробітна плата менеджера супермаркету електроніки в 2024 році становила 18 000 грн щомісяця, з якої утримували 18 % податку на доходи фізичних осіб та 1,5 % військового збору. На початку року менеджер вирішив щомісяця відкладати 10 % від отриманих після утримання податків коштів на придбання ноутбука, роздрібна ціна якого в супермаркеті, де він працює, становить 13 500 грн. Через який час він придбає ноутбук, якщо супермаркет своїм співробітникам надає знижку 15 % від роздрібної ціни?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

25.37. (*Зовнішнє незалежне оцінювання з математики, 2014 р.*) Відомо, що $\frac{y - x}{2x} = \frac{3}{4}$, де $0 < x < y$. У скільки разів число y більше за число x?

§ 26. Розв'язування задач за допомогою дробових раціональних рівнянь

Дробові раціональні рівняння також можуть бути математичними моделями текстових задач.

Приклад 1. З одного міста до іншого, відстань між якими 560 км, виїхали одночасно легковик і вантажівка. Швидкість легковика на 10 км/год більша за швидкість вантажівки, тому він прибув до пункту призначення на 1 год раніше за вантажівку. Знайти швидкість вантажівки і швидкість легковика.

Розв'язання. Нехай швидкість вантажівки x км/год. Систематизуємо умову задачі у вигляді таблиці:

	s, км	v, км/год	t, год
Вантажівка	560	x	$\frac{560}{x}$
Легковик	560	$x + 10$	$\frac{560}{x+10}$

Оскільки значення величини $\frac{560}{x+10}$ на 1 год менше від значення величини $\frac{560}{x}$, то можемо скласти рівняння:

$$\frac{560}{x+10} + 1 = \frac{560}{x}.$$

Воно має два корені: $x_1 = 70$, $x_2 = -80$. Другий корінь не відповідає змісту задачі, тому швидкість вантажівки 70 км/год. Тоді швидкість легковика: $70 + 10 = 80$ (км/год).

Відповідь: 70 км/год; 80 км/год.

Приклад 2. Майстер і його учень, працюючи разом, можуть виконати завдання за 8 год. За скільки годин може виконати це завдання самостійно кожен з них, якщо майстру на це потрібно на 12 год менше, ніж його учню?

Розв'язання. Нехай майстру, щоб виконати завдання самостійно, потрібно x год, тоді учневі – $(x + 12)$ год. Коли вид і обсяг роботи в задачах на роботу не конкретизовано (як тут), його прийнято позначати одиницею. Нагадаємо, що *продуктивність праці* – це обсяг роботи, що виконується за одиницю часу. Тоді за 1 год майстер виконає $\frac{1}{x}$ частину завдання, а учень – $\frac{1}{x+12}$ частину, це і є продуктивність праці кожного з них. За умовою задачі майстер і учень пропрацювали 8 год, тому майстер виконав $8 \cdot \frac{1}{x} = \frac{8}{x}$ частину завдання, а учень $8 \cdot \frac{1}{x+12} = \frac{8}{x+12}$. Враховуючи, що вони виконали весь обсяг завдання, маємо рівняння:

$$\frac{8}{x} + \frac{8}{x+12} = 1,$$

звідки: $x_1 = 12$, $x_2 = -8$.
Другий корінь не відповідає змісту задачі, оскільки є від'ємним.
Отже, майстер, працюючи окремо, може виконати завдання за 12 год, а його учень – за 12 + 12 = 24 (год).
Умову цієї задачі, як і попередньої, можна також систематизувати в таблицю:

	Час для самостійного виконання, год	**Продуктивність праці**	**Фактично витрачений час, год**	**Обсяг виконаної роботи**
Майстер	x	$\frac{1}{x}$	8	$\frac{8}{x}$
Учень	$x + 12$	$\frac{1}{x+12}$	8	$\frac{8}{x+12}$

Відповідь: 12 год і 24 год.

Зверніть увагу, що умови більшості задач на рух або на роботу можна систематизувати в таблицю, що допоможе уникнути громіздких текстових записів.

Поясніть, як розв'язано задачі в прикладах 1 і 2.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2

26.1. Одне з натуральних чисел на 2 більше за друге. Знайдіть ці числа, якщо сума обернених їм чисел дорівнює $\frac{5}{12}$.

26.2. Сума двох натуральних чисел дорівнює 20, а сума чисел, їм обернених, становить $\frac{5}{24}$. Знайдіть ці числа.

3 **26.3.** Чисельник звичайного нескоротного дробу на 1 менший від знаменника. Якщо від чисельника відняти 7, а від знаменника відняти 5, то дріб зменшиться на $\frac{1}{2}$. Знайдіть цей дріб.

26.4. Знаменник звичайного нескоротного дробу на 5 більший за чисельник. Якщо знаменник збільшити на 6, а чисельник збільшити на 4, то дріб збільшиться на $\frac{1}{4}$. Знайдіть цей дріб.

26.5. З міста в село, відстань між якими 48 км, виїхали одночасно два велосипедисти. Швидкість одного з них була на 4 км/год більшою за швидкість другого, і тому він прибув у село на 1 год раніше від другого. Знайдіть швидкість кожного з велосипедистів.

26.6. З міста A в місто B, відстань між якими 420 км, одночасно виїхали два легковики. Швидкість одного з них на 10 км/год більша за швидкість другого, і тому він прибув у місто B на 1 год раніше, ніж другий. Знайдіть швидкість кожного з легковиків.

26.7. Щоб ліквідувати запізнення на 40 хв, поїзд на перегоні 300 км завдовжки збільшив швидкість на 5 км/год порівняно зі швидкістю за розкладом. Якою є швидкість поїзда за розкладом?

26.8. Автомобіль мав проїхати 810 км. Подолавши $\frac{5}{9}$ шляху, він зробив зупинку на 30 хв. Але потім, збільшивши швидкість на 10 км/год, прибув до пункту призначення вчасно. Якою була швидкість автомобіля до зупинки?

26.9. Поїзд мав проїхати 320 км. Проїхавши $\frac{3}{8}$ шляху, він зупинився на 1 год, а потім продовжив рух зі швидкістю, на 10 км/год меншою за початкову. Знайдіть швидкість поїзда, з якою він рухався до зупинки, якщо до пункту призначення він прибув через 7 год після виїзду.

26.10. Човен, власна швидкість якого 18 км/год, проплив 40 км за течією і 16 км проти течії, витративши на весь шлях 3 год. Знайдіть швидкість течії, якщо вона менша від 4 км/год.

26.11. Відстань між двома пристанями 48 км. На човні шлях туди і назад можна подолати за 7 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

26.12. Моторний човен проплив 18 км за течією річки і 28 км проти течії за такий самий час, що й 48 км у стоячій воді. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 3 км/год.

26.13. Катер пропливає 30 км за течією річки і 8 км проти течії річки за такий самий час, який потрібний плоту, щоб проплисти по цій річці 4 км. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість катера дорівнює 18 км/год.

26.14. Моторний човен проплив 40 км по озеру, а потім 18 км по річці, що впадає в це озеро, витративши на цей шлях 3 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

26.15. Дві бригади працівників дорожньої служби мали заасфальтувати по 200 м^2 дорожнього полотна, причому перша бригада за день асфальтувала на 10 м^2 більше, ніж друга, і тому виконала завдання на 1 день раніше за другу. Скільки м^2 дорожнього полотна щодня асфальтувала кожна з бригад?

26.16. Для перевезення 60 т вантажу замовили деяку кількість вантажівок. Оскільки на кожну вантажили на 1 т більше, ніж передбачалося, то 3 вантажівки виявилися зайвими. Скільки вантажівок було використано для перевезення вантажу?

26.17. Майстер і учень, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 16 год. За скільки годин виконає це саме замовлення кожен з них самостійно, якщо майстру на це потрібно на 24 год менше, ніж учню?

26.18. Два маляри, працюючи разом, можуть пофарбувати певну будівлю за 20 год. За скільки годин може виконати цю роботу кожний з малярів самостійно, якщо одному з них для цього потрібно на 9 год більше, ніж іншому?

26.19. Через один кран басейн наповнювали 9 хв, після чого відкрили другий кран. Через 6 хв їх спільної роботи виявилося, що наповнено тільки половину басейну. За скільки хвилин можна наповнити басейн через кожний із цих кранів окремо, якщо першому на це треба на 9 хв більше, ніж другому?

26.20. Одна з операторок-набірниць може набрати текст на 12 днів швидше, ніж інша. Через 6 днів роботи другої набірниці до неї приєдналася перша. Через 10 днів їхньої спільної роботи виявилося, що набрано $\frac{5}{7}$ тексту. За скільки днів може набрати текст кожна з набірниць окремо?

4

26.21. Пішохід рухався із села A в село B 4 год. На зворотному шляху перші 10 км він пройшов із тією самою швидкістю, а потім зменшив її на 1 км/год і тому на зворотний шлях витратив на 30 хв більше. Знайдіть відстань між селами.

26.22. Відстань від пристані M до пристані N за течією річки човен долає за 3 год. Одного разу, не дійшовши 30 км до пристані N, човен повернув назад і прибув до пристані M через 4,5 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

Вправи для повторення

26.23. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0$;

2) $\frac{x^2}{x-6} = \frac{36}{x-6}$.

26.24. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 2x}$;

2) $\frac{x^2 - 9}{2x^2 - 4x - 6}$.

26.25. Розв’яжіть рівняння:

1) $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$; 2) $(x + 7)^4 - 5(x + 7)^2 - 6 = 0$.

Життєва математика

26.26. Керамічну плитку однієї і тієї самої торгової марки виробляють трьох різних розмірів. Магазин продає плитку тільки пачками. Подружжя вирішило укласти цією плиткою підлогу на кухні. Користуючись даними таблиці, з’ясуйте, як подружжю придбати плитку найдешевше, якщо кухня має форму квадрата зі стороною 3 м?

Розмір плитки (см × см)	Кількість плиток у пачці	Ціна пачки
20 × 20	25	300 грн
20 × 30	16	290 грн
30 × 30	11	280 грн

Цікаві задачі – поміркуй одначе

26.27. Побудуйте графік функції $y = \dfrac{x^2 + 2x}{|x|} - 2$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 6

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Укажіть вираз, який є квадратним тричленом.

А. $2x^2 + x - 3x^3$ **Б.** $2x^2 + x - 3$ **В.** $\dfrac{1}{2x^2 + x - 3}$ **Г.** $\dfrac{2}{x^2} + x - 3$

2. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена $2x^2 - 3x - 7$.

А. 47 **Б.** –47 **В.** 64 **Г.** 65

3. Укажіть біквадратне рівняння.

А. $4x^2 + x - 3 = 0$ **Б.** $4x^4 + x^2 - 3 = 0$
В. $4x^3 + x^2 - 3 = 0$ **Г.** $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 5 = 0$

2

4. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен $-2x^2 + 3x + 5$.

А. $-2(x + 1)(x - 2,5)$ **Б.** $2(x + 1)(x - 2,5)$
В. $-2(x - 1)(x + 2,5)$ **Г.** $-2(x + 1)(x + 2,5)$

5. Розв’яжіть рівняння $\dfrac{x^2}{x - 7} = \dfrac{49}{x - 7}$.

А. Коренів немає **Б.** 7 **В.** –7 **Г.** –7; 7

6. Розв’яжіть рівняння $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$, розклавши його ліву частину на множники.

А. –3; 1 **Б.** –1; 3 **В.** –1; 0; 3 **Г.** –3; 0; 1

3

7. Скоротіть дріб $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$.

А. $\dfrac{x+2}{x+3}$ **Б.** $\dfrac{x-2}{x+3}$ **В.** $\dfrac{x-2}{x-3}$ **Г.** $\dfrac{x+2}{x-3}$

8. Для яких значень x сума дробів $\dfrac{6}{1+x}$ і $\dfrac{x}{3-x}$ дорівнює їх добутку?

А. Таких значень x не існує **Б.** 2
В. 2; 9 **Г.** −9; −2

9. З міста A в місто B, відстань між якими 360 км, одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість одного з них була на 10 км/год більшою за швидкість іншого, і тому він прибув до пункту призначення на 30 хв раніше. Знайдіть швидкість автомобіля, який рухався повільніше.

А. 70 км/год **Б.** 80 км/год
В. 90 км/год **Г.** 100 км/год

4

10. Розкладіть на множники многочлен $-\dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + 3x^2$.

А. $-\dfrac{1}{4}x^2(x-2)(x+6)$ **Б.** $-\dfrac{1}{4}(x-2)(x+6)$

В. $-\dfrac{1}{4}x^2(x+2)(x-6)$ **Г.** $-\dfrac{1}{4}x(x-2)(x+6)$

11. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$.

А. Розв'язків немає **Б.** −4; −1; 2
В. 1; 2; 4 **Г.** −2; 1; 4

12. Відстань від пристані A до пристані B проти течії річки човен долає за 3 год. Одного разу, не допливши 24 км до пристані B, човен повернув назад і прибув до пристані A через 3 год 18 хв. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнювала 2 км/год.

А. 20 км/год **Б.** 22 км/год
В. 24 км/год **Г.** 26 км/год

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3

13. Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та його коренем (А–Г).

Рівняння	*Корінь рівняння*
1. $\dfrac{x-7}{x-2} + \dfrac{x+4}{x+2} = 1$	**А.** −3; 3
2. $x^3 + 6x^2 - 9x - 54 = 0$	**Б.** −3; 6
3. $(x^2-2)^2 - 4(x^2-2) - 21 = 0$	**В.** 3; 6
	Г. −6; −3; 3

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 24–26

1

1. З даних виразів випишіть ті, що є квадратними тричленами:

1) $2x^2 - 3x + 7$; 2) $\dfrac{1}{2x^2 - 3x + 7}$;

3) $2x^2 - 3x + 7x^3$; 4) $-8 + 2x^2 - 3x$.

2. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте кількість його коренів:

1) $x^2 + 3x - 7$; 2) $x^2 + x + 9$.

3. Чи є біквадратним рівняння:

1) $x^2 + 8x - 9 = 0$; 2) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$;

3) $x^3 + 8x^2 - 9 = 0$; 4) $7x^2 - x^4 - 5 = 0$?

2

4. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 4x - 5$;

2) $-2x^2 + 5x - 2$.

5. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;

2) $\dfrac{x^2}{x + 4} = \dfrac{16}{x + 4}$.

6. Розв'яжіть рівняння $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, розклавши його ліву частину на множники.

3

7. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$; 2) $\dfrac{x^2 - 4}{2x^2 + 7x - 22}$.

8. З одного міста в інше одночасно виїхали дві велосипедистки. Швидкість першої була на 3 км/год більшою, ніж швидкість другої, тому до пункту призначення вона прибула на 1 год раніше, ніж друга. Знайдіть швидкість кожної з велосипедисток, якщо відстань між містами 60 км.

4

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$; 2) $(x - 3)^4 - 7(x - 3)^2 - 8 = 0$.

Додаткові завдання

4

10. Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^3 - 4x^2 - 5x$; 2) $-\dfrac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 4x^2$.

11. Побудуйте графік функції $y = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 2x}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 3

До § 20

1

1. Перепишіть рівняння в зошит та підкресліть однією рискою його перший коефіцієнт, двома – другий і «хвилькою» вільний член (за потреби допишіть коефіцієнтом число 1) за зразком: $\underline{a}x^2\ \underline{\underline{+\ b}}x\ \underset{\sim}{+\ c} = 0$, $\underline{2}x^2\ \underline{\underline{-\ 1}}x\ \underset{\sim}{+\ 5} = 0$:

1) $7x^2 - 3x + 5 = 0$; 2) $-2x^2 + x - 4 = 0$; 3) $3x + x^2 - 7 = 0$;
4) $3x^2 = 0$; 5) $2x^2 - 7 = 0$; 6) $2x + 5x^2 = 0$.

2

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $1,8x^2 = 0$; 2) $2x^2 - 32 = 0$; 3) $5x^2 - 7x = 0$;
4) $-x^2 - 9 = 0$; 5) $\frac{1}{2}x^2 + 8x = 0$; 6) $3x^2 - 15 = 0$.

3

3. Чи є число $1 - \sqrt{2}$ коренем рівняння $x^2 - 2x - 1 = 0$?

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 + x}{2} + \frac{x - 1}{3} = \frac{5x + 4}{6}$; 2) $\frac{2x^2 - 3x}{4} + \frac{x + 4}{2} = \frac{x + 16}{8}$.

5. Довжина прямокутника у 1,5 раза більша за ширину. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа 54 см^2.

4

6. Для яких значень a число 3 є коренем рівняння:

1) $ax^2 - 7x + (a^2 + 21) = 0$; 2) $x^2 + (a^2 - 4)x - 9 = 0$?

7. Для яких значень a рівняння:

1) $x^2 - (4a - 5)x = 0$ має тільки один корінь;
2) $a^2x^2 - a = 0$ має два корені?

До § 21

1

8. Знайдіть дискримінант квадратного рівняння та визначте кількість його коренів:

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$; 2) $3x^2 - 2x + 3 = 0$;
3) $x^2 - 2x + 1 = 0$; 4) $7x^2 + x - 1 = 0$.

2

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 7x - 8 = 0$; 2) $16x^2 - 8x + 1 = 0$;
3) $2x^2 - x - 3 = 0$; 4) $x^2 + 3x - 10 = 0$;
5) $x^2 + 4x + 7 = 0$; 6) $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 6x - 7$; 2) $x^2 + 7x = -12$;
3) $10x = 25x^2 + 1$; 4) $2 - 9x = 5x^2$.

3

11. Розв'яжіть рівняння графічно, а потім перевірте розв'язок аналітично:

1) $x^2 = 3 - 2x$;
2) $x^2 = 0,5x + 3$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $5(x-2) = (3x+2)(x-2)$; 2) $\frac{1}{5}x^2 - 2x - 7 = 0$;

3) $x^2 + \sqrt{2}x - 12 = 0$; 4) $\sqrt{3}x^2 - 2x - \sqrt{3} = 0$.

4 **13.** Для якого значення m має лише один корінь рівняння:

1) $x^2 + 2mx + m = 0$; 2) $mx^2 - 4x + 2 = 0$?

14. Доведіть, що для будь-якого a рівняння $2x^2 + ax - 3 = 0$ має два різних корені.

15. Розв'яжіть рівняння відносно x:

1) $x^2 - x(3-2a) - 6a = 0$; 2) $a^2x^2 - 3ax + 2 = 0$.

16. Знайдіть корені рівняння:

1) $\left|x^2 + 5x - 3\right| = 3$; 2) $\left|\left|x^2 - 5x + 1\right| - 4\right| = 3$;

3) $x^2 + x + \frac{4}{x-2} = \frac{4}{x-2} + 6$; 4) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\right)(x^2 + 2x) = 0$.

До § 22

1 **17.** Знайдіть суму і добуток коренів рівняння:

1) $x^2 + 17x + 60 = 0$; 2) $x^2 - 12 = 0$;

3) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; 4) $-x^2 - 4x + 5 = 0$.

2 **18.** Не використовуючи формулу коренів квадратного рівняння, знайдіть другий корінь, якщо відомо перший:

1) $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 5$; 2) $x^2 + 3x - 18 = 0$, $x_1 = -6$.

3 **19.** Різниця коренів квадратного рівняння $x^2 + 2x + q = 0$ дорівнює 6. Знайдіть ці корені та коефіцієнт q.

20. Доведіть, що рівняння $3x^2 + bx - 7 = 0$ для будь-якого значення b має один додатний і один від'ємний корінь.

21. Відношення коренів рівняння $x^2 - (p^2 - 1)x + 54 = 0$ дорівнює $2 : 3$. Знайдіть p та корені рівняння.

22. Один з коренів рівняння $5x^2 - 6x + c = 0$ удвічі більший за другий. Знайдіть c.

4 **23.** Сума квадратів коренів рівняння $3x^2 + bx - 12 = 0$ дорівнює 33. Знайдіть b.

24. Для яких значень a сума коренів рівняння $x^2 - 2ax + (2a - 1) = 0$ дорівнює сумі квадратів його коренів?

25. Складіть квадратне рівняння, корені якого вдвічі менші від відповідних коренів рівняння $5x^2 - 16x + 4 = 0$.

До § 23

2 **26.** Периметр прямокутника дорівнює 30 см, а його площа – 54 см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

27. Знайдіть три послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 302.

28. Знайдіть п'ять послідовних цілих чисел, якщо відомо, що сума квадратів трьох перших чисел дорівнює сумі квадратів двох останніх.

29. Один з катетів прямокутного трикутника на 2 см менший від другого, а периметр трикутника дорівнює 24 см. Знайдіть площу трикутника.

30. У чемпіонаті України з футболу було зіграно 240 матчів. Скільки команд узяло участь у чемпіонаті, якщо всі команди зіграли одна з одною по два матчі?

31. Дно ящика – прямокутник, ширина якого в 1,5 раза менша від довжини. Висота ящика 0,4 м. Знайдіть об'єм ящика, якщо відомо, що площа його дна на 0,66 м^2 менша від суми площ усіх бічних стінок.

32. Відкриту коробку об'ємом 10 500 см^3 виготовили з аркуша картону прямокутної форми, довжина якого вдвічі більша за ширину, вирізавши з кутів аркуша квадрати зі стороною 5 см. Знайдіть початкові розміри аркуша.

До § 24

33. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте, чи можна розкласти цей тричлен на лінійні множники:

1) $x^2 + x - 5$; 2) $x^2 + 2x + 7$; 3) $9x^2 + 6x + 1$.

34. Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $x^2 + 5x + 4$; 2) $x^2 - 4x - 12$;
3) $2x^2 - 12x + 18$; 4) $-4x^2 + 7x + 2$.

35. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 3x - 4$; 2) $2x^2 - 7x - 4$;
3) $-x^2 + 3x + 18$; 4) $-4x^2 + 9x - 2$.

36. Виділіть квадрат двочлена із квадратного тричлена:

1) $x^2 + 6x - 7$; 2) $x^2 - 8x - 9$.

37. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{4x^2 - 81}{2x^2 - 5x - 18}$; 2) $\dfrac{2x^2 + 6x - 20}{x^3 - 8}$;

3) $\dfrac{2x^2 - 12x + 18}{2x^2 - x - 15}$; 4) $\dfrac{4x^2 - 11x - 3}{-3x^2 + 10x - 3}$.

38. Виконайте дії:

1) $\dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} + \dfrac{x + 1}{x^2 + 4x + 3}$; 2) $\dfrac{2x^2 - 7}{x^2 - 3x - 4} - \dfrac{x + 1}{x - 4}$;

3) $\dfrac{x^2 - x - 20}{2 - x} \cdot \dfrac{2x - x^2}{x + 4}$; 4) $\dfrac{x + 5}{2x - 6} : \dfrac{x^2 + 11x + 30}{x - 3}$.

39. Один з коренів квадратного тричлена $x^2 + px + 6$ дорівнює -3. Знайдіть p та другий корінь.

40. Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена:

1) $x^2 + x - 1$; 2) $2x^2 - 3x + 7$;
3) $3x^2 - 5x + 7$; 4) $-4x^2 + 9x - 2$.

4 **41.** Укажіть таке значення невідомого коефіцієнта, щоб тричлен мав один корінь:

1) $x^2 + bx + 4$; 2) $ax^2 + 8x + 64$; 3) $x^2 - 18x + c$.

42. Розкладіть на множники квадратний тричлен відносно змінної x:

1) $x^2 - 5ax - 6a^2$; 2) $x^2 + 3bx - 10b^2$.

43. Якого найменшого значення може набувати квадратний тричлен $x^2 - 8x + 19$? Для якого значення x воно досягається?

44. Для якого a квадратний тричлен $-a^2 - 4a - 17$ набуває найбільшого значення? Знайдіть це значення.

До § 25

2 **45.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^4 + x^2 - 3 = 0$; 2) $3x^4 - 2x^2 - 40 = 0$;
3) $x^4 + x^2 + 9 = 0$; 4) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$.

46. Знайдіть корені рівняння:

1) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 0$; 2) $\dfrac{3x^2}{x + 2} = \dfrac{5x}{x + 2}$;

3) $\dfrac{x^2 + 1}{x - 2} = \dfrac{1 - 3x}{2 - x}$; 4) $\dfrac{21}{x} = 2x + 1$.

47. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 16x^2 = 0$; 2) $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

3 **48.** Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = x^4 - 3x^2 - 4$ з віссю абсцис.

49. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{4}{x + 3} = \dfrac{1}{x}$; 2) $\dfrac{1}{2(1 - x)} + \dfrac{1}{2 - x} = \dfrac{3}{3 - x}$;

3) $\dfrac{18}{x^2 + 6x + 9} + \dfrac{7}{x + 3} = 1$; 4) $\dfrac{13x + 4}{4x^2 + 4x + 1} - \dfrac{1}{2x + 1} = 4$;

5) $\dfrac{1}{(x + 2)^2} + \dfrac{9}{(x - 2)^2} = \dfrac{6}{x^2 - 4}$; 6) $\dfrac{3}{3x^2 - x} - \dfrac{4}{9x^2 - 1} = \dfrac{4}{9x^2 - 6x + 1}$.

50. Знайдіть корені рівняння:

1) $\dfrac{1}{2x + x^2} - \dfrac{1}{x - 2} = \dfrac{8}{4x - x^3}$; 2) $\dfrac{1}{1 - x} + \dfrac{1}{x + x^2} = \dfrac{10}{x - x^3}$;

3) $\dfrac{7x + 6}{x^3 - 27} = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 9} + \dfrac{1}{x - 3}$.

51. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - x^2 = x - 1$; 2) $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = 0$.

52. Знайдіть координати точок перетину графіків $y = 4x$ і $y = \dfrac{7}{x+1} - 1$.

53. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{8x + 29}{16x^4 - 1} + \dfrac{18x + 5}{8x^3 + 4x^2 + 2x + 1} = \dfrac{25}{4x^2 + 1}$;

2) $\dfrac{3x}{27x^3 + 18x^2 - 12x - 8} - \dfrac{1}{9x^2 + 12x + 4} = \dfrac{x - 1}{4x - 9x^3}$.

54. Знайдіть корені рівняння:

1) $(x^2 - 4x)(x - 2)^2 + 3 = 0$;

2) $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 24$;

3) $x^2 - 3x = \dfrac{8}{x^2 - 3x - 2}$;

4) $(x + 2)(x - 7) = \dfrac{19}{(x - 1)(x - 4)}$;

5) $\dfrac{5}{x^2 - x - 1} + \dfrac{1}{x^2 - x - 5} = 2$;

6) $\dfrac{2}{x^2 - 11x + 4} + \dfrac{3}{x^2 - 11x + 1} = \dfrac{8}{x^2 - 11x - 2}$.

55. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2 - 13}{x + 1} + \dfrac{x + 1}{x^2 - 13} = 2,5$;

2) $\dfrac{x^2 + 3x}{1 - x} + \dfrac{5x - 5}{3x + x^2} = 4$.

До § 26

56. З міста в село, відстань між якими 16 км, вийшов пішохід. Через 2 год 40 хв у тому самому напрямку виїхала велосипедистка і прибула в село одночасно з пішоходом. Знайдіть швидкість велосипедистки, якщо вона на 8 км/год більша за швидкість пішохода.

57. Поїзд, який було затримано на 2 год, компенсував запізнення на перегоні 400 км завдовжки, збільшивши швидкість на 10 км/год. Знайдіть, за який час поїзд мав подолати цей перегін за розкладом.

58. Катер проплив 45 км за течією і 7 км проти течії, витративши на весь шлях 3 год. Яка власна швидкість катера, якщо швидкість течії 2 км/год?

59. О 8-й годині ранку від пристані за течією річки відійшов пліт, а о 17-й годині в тому самому напрямку відійшов човен, який наздогнав пліт на відстані 20 км від пристані. О котрій годині човен наздогнав пліт, якщо власна швидкість човна дорівнює 18 км/год?

60. Рибалка відплив на човні з пункту A проти течії річки. Подолавши 5 км, він кинув весла, і через 3 год після відплиття з пункту A його знову віднесло до цього пункту. Швидкість човна у стоячій воді дорівнює 12 км/год. Знайдіть швидкість течії, якщо вона менша, ніж 5 км/год.

61. Перша операторка-набірниця набрала 120 сторінок тексту, а друга – 144 сторінки. Перша щодня набирала на 4 сторінки більше, ніж друга, і працювала на 3 дні менше, ніж друга. Скільки сторінок щодня набирала перша набірниця і скільки – друга?

62. Робочий день становить 8 год. Щоб виготовити 15 деталей, Богдану треба на 1 год менше, ніж Михайлу. Скільки деталей за день виготовляє кожен з майстрів, якщо Богдан за робочий день виготовляє на 20 деталей більше, ніж Михайло?

63. Через перший кран водоочищувач на фермі наповнюється на 4 год швидше, ніж через другий спорожнюється. Якщо одночасно відкрити обидва крани, то водоочищувач наповниться за 3 год. За скільки годин водоочищувач може через перший кран наповнитися і за скільки годин через другий кран спорожнитися?

64. Майстер може виконати завдання на 3 год швидше, ніж учень. Якщо майстер пропрацює 4 год, а потім його замінить учень і пропрацює 3 год, то завдання буде виконано. За скільки годин самостійно може виконати завдання майстер і за скільки – учень?

65. Зливок міді й цинку, що містить 1 кг міді, сплавили з 2 кг міді. Отримали зливок, у якому міді на 25 % більше, ніж було в попередньому зливку. Якою була маса початкового зливка?

4 **66.** З міст A і B одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти і зустрілися через 5 год. Швидкість велосипедиста, який виїхав з міста A, на 5 км/год менша від швидкості другого велосипедиста. Якби другий велосипедист виїхав на 4,5 год пізніше, ніж перший, то вони зустрілися б на відстані 75 км від міста B. Знайдіть відстань між містами A і B.

67. Бригада робітників мала виготовити у певний термін 800 однакових віконних блоків. У перші 5 днів бригада щоденно виготовляла заплановану кількість блоків, а потім кожного дня – на 5 блоків більше, ніж планувала, тому вже за день до визначеного терміну було виготовлено 830 віконних блоків. Скільки віконних блоків мала щодня виготовляти бригада за планом?

Головне в розділі 3

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Квадратним рівнянням називають рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a, b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$.

Числа a, b і c називають ***коефіцієнтами квадратного рівняння***. Число a називають ***першим коефіцієнтом***, число b – другим коефіцієнтом, число c – ***вільним членом***.

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то рівняння називають ***неповним квадратним рівнянням***.

НЕПОВНЕ КВАДРАТНЕ РІВНЯННЯ

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

Якщо $b = 0,\ c = 0$, маємо: $ax^2 = 0$, $x^2 = 0$, $x = 0$

Якщо $b = 0,\ c \neq 0$, маємо: $ax^2 + c = 0$, $ax^2 = -c$, $x^2 = -\dfrac{c}{a}$

- Якщо $-\dfrac{c}{a} > 0$, то $x_1 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$
- Якщо $-\dfrac{c}{a} < 0$, то коренів немає

Якщо $b \neq 0,\ c = 0$, маємо: $ax^2 + bx = 0$, $x(ax + b) = 0$, $x = 0$ або $ax + b = 0$, отже, $x = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$

ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

Вираз $b^2 - 4ac$ називають ***дискримінантом квадратного рівняння*** $ax^2 + bx + c = 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

$$\downarrow$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Якщо $D > 0$, то $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$	Якщо $D = 0$, то $x = -\dfrac{b}{2a}$	Якщо $D < 0$, то коренів немає

ТЕОРЕМА ВІЄТА

Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p;\ x_1 \cdot x_2 = q.}$$

Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.}$$

КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН ТА РОЗКЛАДАННЯ ЙОГО НА ЛІНІЙНІ МНОЖНИКИ

Квадратним тричленом називають многочлен вигляду

$ax^2 + bx + c$, де x – змінна, a, b, c – числа, причому $a \neq 0$.

Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, для якого значення тричлена дорівнює нулю.

Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного тричлена $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, то

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).}$$

Бажаємо тобі стати відомішим за Остроградського

Михайло Васильович Остроградський народився 12 вересня 1801 року в с. Пашенна Полтавської губернії (нині с. Пашенівка). Діди та прадіди Михайла Васильовича служили в козацькому війську, брали участь у багатьох боях, не раз виявляли військову доблесть і героїзм. Мабуть, саме тому в дитинстві Михайло Васильович так мріяв стати військовим. Але йому судилося стати всесвітньо відомим ученим.

У дитинстві Михайло виявляв виняткову спостережливість і захоплювався вимірюваннями. Навчався він у пансіоні при Полтавській гімназії, потім у самій гімназії. Закінчивши гімназію, став вільним слухачем Харківського університету, а згодом і його студентом. Після закінчення університету з відзнакою в серпні 1820 року менш ніж за рік потому (у квітні 1821 року) отримує ступінь кандидата наук за дослідження в галузі прикладної математики. У 1822 році Остроградський вирушає до Парижа з метою удосконалення своєї математичної освіти, ставши слухачем університету в Сорбонні. Саме там він публікує свої перші наукові праці, стає відомим науковцем та здобуває авторитет у французьких математиків. Але через постійний брак коштів Михайло Васильович був вимушений залишити Париж, майже пішки подолавши взимку 1828 року шлях від Парижа до Петербурга.

М. В. Остроградський (1801–1862)

Наукові кола Петербурга зустріли молодого вченого з радістю і надією. Його авторитет серед петербурзьких діячів науки був високим і незаперечним. У тому ж 1828 році Остроградський починає викладацьку діяльність у Морському кадетському корпусі Петербурга та стає ад'юнктом Петербурзької академії наук. А з 1830 року викладає ще в чотирьох вищих навчальних закладах Петербурга. У 1834 році Остроградського було обрано членом Американської академії наук, у 1841 році – членом Туринської академії, у 1853 – членом Римської академії Лінчів і в 1856 році – членом-кореспондентом Паризької академії наук.

Лекції Остроградського відвідували не лише студенти, а й викладачі, професори, відомі математики. Усіх приваблювала його система викладання предмета – широка загальність теми, виразність і стислість викладу, а також веселий характер та гострий розум. На лекціях він обов'язково вживав українські слова, прислів'я та приказки. Тому студенти завжди згадували його лекції із захватом.

Улюбленим письменником Остроградського був Т. Г. Шевченко, з яким він був особисто знайомий та значну частину творів якого знав напам'ять і охоче декламував. У 1858 році, коли Тарас Григорович повертався із заслання через Петербург на батьківщину, Михайло Васильович запропонував Кобзареві для проживання свою петербурзьку квартиру.

Повернувшись із заслання, Шевченко писав у «Щоденнику»: «Великий математик прийняв мене з розпростертими обіймами, як земляка і як свого сім'янина, що надовго кудись виїжджав».

Михайло Васильович був визначною, оригінальною, усебічно обдарованою людиною. Його високо цінували не тільки за розум, а й за незалежність, демократизм, скромність, щирість і простоту, за повагу до людей праці, за його гідність. Перебуваючи на вершині слави, вшанований за свої наукові праці в усій Європі, Остроградський поводив себе надзвичайно просто і не любив говорити про свої заслуги.

І хоч які б проблеми розв'язував учений (він займався алгеброю, прикладною математикою, теорією чисел, теорією ймовірностей, механікою тощо), усі його наукові праці позначені глибиною думки й оригінальністю, у них незмінно присутня широта його поглядів, уміння глибоко зануритися в суть проблеми і знайти численні узагальнення.

На все життя Михайло Васильович зберіг любов до рідної землі та рідної мови. Майже щороку влітку він виїжджав в Україну, щоб поринути в повний спокій та помилуватися чудовими краєвидами. Улітку 1861 року Остроградський, відвідуючи своє рідне село, захворів і 1 січня 1862 року помер.

За свою майже 40-річну наукову діяльність Михайло Васильович написав понад 50 наукових праць з різних галузей математики: математичного аналізу, аналітичної і небесної механіки, математичної фізики, теорії ймовірностей. Свої педагогічні погляди М. В. Остроградський виклав у підручниках з елементарної і вищої математики.

Ім'я М. В. Остроградського носить Кременчуцький національний університет.

Попри те, що майже все своє життя Михайло Остроградський займався наукою поза межами України, він став широко відомим серед своїх співвітчизників. Авторитет і популярність М. В. Остроградського були настільки значними, що саме його ім'я стало синонімом ученого. Батьки, віддаючи дитину на навчання, бажали їй «стати другим Остроградським».

А автор цього підручника бажає своїм учням і вам «стати відомішими за Остроградського».

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 8 КЛАСУ

1

1. Виконайте дії:

1) $\dfrac{3m-4}{a}+\dfrac{4}{a}$;   2) $\dfrac{2}{b}:\dfrac{6}{b^2}$.

2. Подайте у вигляді степеня з основою a:

1) $a^{-7}:a^3$;   2) $(a^{-2})^5$.

3. Для функції $y=\sqrt{x}$ знайдіть значення y, яке відповідає значенню $x=9$; 36.

2

4. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{2\dfrac{7}{9}}+10\sqrt{0,16}$;   2) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{0,5}+(-\sqrt{7})^2$.

5. Спростіть вираз $-\dfrac{5}{7}a^{-2}b^7\cdot 2\dfrac{1}{10}a^{-3}b^{-5}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2+13x+6=0$;

2) $\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{3x-2}{x-1}$.

3

7. Спростіть вираз $\dfrac{2x}{x-4}-\dfrac{x+3}{3x-12}\cdot\dfrac{96}{x^2+3x}$.

8. Моторний човен подолав 36 км проти течії і повернувся назад, витративши на весь шлях 5 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

4

9. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{8x-32}{4x-x^2}$.

Додаткові завдання

4

10. Розв'яжіть рівняння $(x^2+4x)(x^2+4x+3)=10$.

11. Доведіть, що значення виразу $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}+\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$ є натуральним числом.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Раціональні вирази

1. Доведіть, що для додатних значень a і b ($a \neq b$) значення дробу $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ більше за відповідне значення дробу $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$.

2. Скоротіть дріб $\frac{m^4 + m^2n^2 + n^4}{m^3 + n^3}$.

3. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+z}} \cdot \left(1 + \dfrac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}\right) : \dfrac{x - y - z}{xyz}$;

2) $\dfrac{\dfrac{m-n}{2m-n} - \dfrac{m^2 + n^2 + m}{2m^2 + mn - n^2}}{(4n^4 + 4mn^2 + m^2) : (2n^2 + m)} \cdot (n^2 + n + mn + m)$;

3) $\dfrac{4}{x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}}} : \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{y}} - \dfrac{4}{y(xyz + x + z)}$;

4) $\left(\left(\dfrac{a}{b-a}\right)^{-2} - \dfrac{(a+b)^2 - 4ab}{a^2 - ab}\right)^2 \cdot \dfrac{a^4}{a^2b^2 - b^4}$;

5) $\dfrac{p^{-6} - 64}{4 + 2p^{-1} + p^{-2}} \cdot \dfrac{p^2}{4 - 4p^{-1} + p^{-2}} - \dfrac{4p^2(2p+1)}{1 - 2p}$;

6) $\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-3} + y^{-3}} : \dfrac{x^2y^2}{(x+y)^2 - 3xy} \cdot \left(\dfrac{x^2 - y^2}{xy}\right)^{-1}$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\left(x^2 - \dfrac{1}{y^2}\right)^x \cdot \left(y + \dfrac{1}{x}\right)^{y-x}}{\left(y^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)^y \cdot \left(x - \dfrac{1}{y}\right)^{x-y}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{x+y}$;

2) $\left(1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) : \left(\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b+c}\right) : \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b+c}\right)\right) = \dfrac{(b+c-a)^2}{2bc}$;

3) $\dfrac{(x-y)^2 + xy}{(x+y)^2 - xy} : \dfrac{x^5 + y^5 + x^2y^3 + x^3y^2}{(x^3 + y^3 + x^2y + xy^2)(x^3 - y^3)} = x - y$;

4) $\left(\frac{2-y}{y-1}+\frac{2(x-1)}{x-2}\right):\left(\frac{y(x-1)}{y-1}+\frac{x(2-y)}{x-2}\right)=\frac{1}{x-y}$.

5. Доведіть одну з тотожностей видатного математика Л. Ейлера (1707–1783):

$$\left(\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}\right)^3-\left(\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}\right)^3=a^3+b^3.$$

6. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}$$

є від'ємним для будь-якого значення $a>1$.

7. Доведіть, що коли $x+y=1$, то

$$\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}=\frac{2(y-x)}{x^2y^2+3}.$$

8. Доведіть, що коли для чисел x, y, z, m, n, p справджуються рівності $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$ і $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}+\frac{p}{z}=0$, то для них справджується і рівність $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1$.

9. Доведіть, що коли $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$, то $a^2b^2c^2=1$ або $a=b=c$.

10. Розв'яжіть відносно змінної x рівняння:

1) $\frac{x-2}{x-a}=0$;
2) $\frac{x-a}{x^2-1}=0$;
3) $(a-2)x=a^2-4$;
4) $(a^2-1)x=a^2-2a+1$.

11. Розв'яжіть відносно змінної x рівняння:

1) $\frac{x}{a}-\frac{a}{2x}=\frac{2x+a}{2a}-\frac{a}{x}$;
2) $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}$;
3) $\frac{x-a}{a}-\frac{x}{x-a}=\frac{x+a}{a}$;
4) $\frac{3}{x-a}+\frac{2}{x+a}=\frac{4x+7a}{x^2-a^2}$.

12. Порядок числа a дорівнює -3, а порядок числа b дорівнює 5. Яким може бути порядок числа:

1) ab;
2) $\frac{a}{b}$;
3) $\frac{b}{a}$;
4) $a+b$?

Квадратні корені. Дійсні числа

13. Розв'яжіть відносно змінної x рівняння:

1) $\sqrt{x}=a+3$;
2) $a\sqrt{x}=a$;
3) $(a+3)\sqrt{x+2}=a^2-9$.

14. Укажіть ціле число, що є найближчим до кореня рівняння:

1) $(5\sqrt{2} - 3\sqrt{3})x + 4 = 0$;
2) $(5\sqrt{2} + 7\sqrt{5})x = 13 + 2\sqrt{3}$.

15. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{3 - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}$;
2) $\sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{6 - \sqrt{25 - 4\sqrt{6}}}}$;
3) $\sqrt{\left|30\sqrt{3} - 52\right|} - \sqrt{52 + 30\sqrt{3}}$.

16. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$, якщо $1 \leqslant x \leqslant 2$;
2) $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$.

17. Обчисліть:

1) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5}}}{\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5}}}$;
2) $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$.

18. Побудуйте графік функції:

1) $y = 4x - \sqrt{x^2}$;
2) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - x$.

19. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}}$;
2) $\dfrac{(1 + \sqrt{3})^2 - 7}{\sqrt{7} + \sqrt{3} + 1}$;
3) $\dfrac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}}$;
4) $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}$.

20. Чи є взаємно оберненими числа $\sqrt{\dfrac{7 - 2\sqrt{10}}{3}}$ і $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}}$?

21. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4y}{(x - y) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)} : \dfrac{x + 9y + 6\sqrt{xy}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}}$;

2) $\dfrac{2\sqrt{1 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)^2}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)^2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)}$.

22. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\left(\sqrt{x^2 + x\sqrt{x^2 - y^2}} - \sqrt{x^2 - x\sqrt{x^2 - y^2}}\right)^2}{2\sqrt{x^3 y}} : \left(\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} - 2\right)$,

якщо $x > y > 0$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{b - a}}{\sqrt{b + a} + \sqrt{b - a}} + \dfrac{b - a}{\sqrt{b^2 - a^2} + a - b}\right) : \sqrt{\dfrac{b^2}{a^2} - 1}$, якщо $b > a > 0$.

23. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sqrt{(a + 2)^2 - 8a}}{\sqrt{a} - \dfrac{2}{\sqrt{a}}}$; 2) $\dfrac{x^2 + 4}{x\sqrt{\left(\dfrac{x^2 - 4}{2x}\right)^2 + 4}}$.

24. Доведіть тотожність:

1) $\left(1 + \sqrt{1 - x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\right) : \left(\dfrac{1}{1 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = \sqrt{1 - x^2}$;

2) $\dfrac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} + \dfrac{a^2 - \dfrac{ab}{\sqrt{b}}}{a - \sqrt{b}} - \dfrac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} + \dfrac{4a\sqrt{b}}{a^2 - b} = a$.

25. Відомо, що $\sqrt{3 - x} + \sqrt{5 + x} = 3$. Не знаходячи значення x, знайдіть значення виразу $\sqrt{(3 - x)(5 + x)}$.

26. Відомо, що $\sqrt{24 - x^2} - \sqrt{12 - x^2} = 2$. Не знаходячи значення x, знайдіть значення виразу $\sqrt{24 - x^2} + \sqrt{12 - x^2}$.

27. Відомо, що $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$, $xy = 9$. Не знаходячи значень x і y, знайдіть:

1) $x + y$; 2) $x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$; 3) $x^2 + y^2$.

Квадратні рівняння

28. Для якого значення a має лише один корінь рівняння:

1) $(a + 4)x^2 - (a + 5)x + 1 = 0$; 2) $(a - 4)x^2 + (2a - 8)x + 15 = 0$?

29. Розв'яжіть рівняння:

1) $2(a - 1)x^2 + (a + 1)x + 1 = 0$; 2) $(a + 1)x^2 - (a - 1)x - 2a = 0$.

30. Знайдіть корені рівняння:

1) $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0$;

2) $x^2 - 4x + 4 + \left|x^2 + 2x - 8\right| = 0$;

3) $\left|x - \sqrt{x} - 6\right| + \sqrt{x^2 - 4x} = 0$.

31. Доведіть, що число 3 не може бути дискримінантом квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, якими б не були цілі числа a, b, c.

32. Для якого значення a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - (a + 2)x + a - 3 = 0$ буде найменшою?

33. Для якого значення b сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (b + 1)x + b^2 - 1,5 = 0$ буде найбільшою?

34. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 + \sqrt{a - 4} \cdot x - 5 = 0$ задовольняють умову $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{18}{25}$. Знайдіть a.

35. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $2x^2 + 7x - 1 = 0$. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) $\frac{1}{x_1}$ і $\frac{1}{x_2}$; 2) $\frac{x_1}{x_2} - 3$ і $\frac{x_2}{x_1} - 3$; 3) $x_1 x_2^3$ і $x_2 x_1^3$.

36. Доведіть, що коли a, b і c – сторони трикутника, то рівняння $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ не має коренів.

37. Доведіть, що модуль різниці коренів рівняння $5x^2 - 2(5a + 3)x + 5a^2 + 6a + 1 = 0$ не залежить від значення a.

38. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - 7x + 6 = 0$; 2) $x^3 - 6x^2 + 5 = 0$;
3) $x^3 - 5x^2 + 6 = 0$; 4) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$.

39. Розв'яжіть відносно x рівняння:

1) $(a^2 + a - 2)x = a - 1$; 2) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - a} = 0$;
3) $\frac{x - a}{x^2 - 4x + 3} = 0$; 4) $\frac{x^2 - (3a + 4)x + 12a}{x - 3} = 0$;
5) $\frac{a(x - a)}{x + 7} = 0$; 6) $\frac{a^2 - 1}{ax - 1} = \frac{x}{a}$, де $a \neq 0$.

40. Для яких значень a рівняння $\frac{x^2 + ax + 9}{x + 1} = 0$ має лише один корінь?

41. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{38}{x^4 - x^2 + 20x - 100} + \frac{x + 10}{x^2 - x + 10} = \frac{x + 10}{x^2 + x - 10}.$$

42. Для яких значень a і b тричлен $4x^2 + 36x + (a + b)$ є повним квадратом, якщо відомо, що $a - b = 3$?

43. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{2x}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6}\right)^2 \cdot \frac{(x - 3)^2 + 12x}{2}$;

2) $\frac{3a^2 + 2ab - b^2}{a^2 + 4ab + 3b^2} - 2 + \frac{10(ab - 3b^2)}{a^2 - 9b^2}$.

44. Розв’яжіть відносно x рівняння:

1) $\dfrac{x^2+1}{a^2x-2a}-\dfrac{1}{2-ax}=\dfrac{x}{a}$;

2) $\dfrac{x+2}{3x-a}+\dfrac{3-x}{3x^2+2xa-a^2}=\dfrac{3x+2}{x+a}$, де $a \neq 0$.

45. Розв’яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x+6}{x+2}+\dfrac{x-6}{x-2}$;

2) $\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{28}{15}=\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x+4}{x+3}$.

46. Розв’яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-5}=x-11$;

2) $\sqrt{x^2+20}=22-x^2$.

47. Розв’яжіть рівняння:

1) $|2x^2+4x-5|=|x^2+x|$;

2) $3x^2-4=5|x-1|$.

48. Побудуйте графік рівняння $x^2-5xy+6y^2=0$.

49. Розв’яжіть рівняння:

1) $\left(\dfrac{2x+1}{3x-4}\right)^2+\left(\dfrac{3x-4}{2x+1}\right)^2=2$;

2) $\left(\dfrac{5x-6}{2-7x}\right)^2+\left(\dfrac{7x-2}{5x-6}\right)^2=4{,}25$;

3) $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9$;

4) $3\left(\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{x^2}{9}\right)+4\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{2}{x}\right)-8=0$.

50. У супермаркет привезли яблука першого сорту на суму 2280 грн і другого сорту на суму 1800 грн. Якщо продати всі яблука оптом по одній ціні – на 9 грн нижчій від ціни кілограма першого сорту, то виручка складе заплановану суму. Скільки кілограмів яблук привезли в маркет, якщо яблук другого сорту було на 5 кг більше, ніж яблук першого сорту?

51. Загадали ціле додатне число. До нього праворуч дописали цифру 7 і від отриманого числа відняли квадрат числа, що загадали. Різницю зменшили на 75 % і одержали загадане число. Яке число загадали?

52. З міста A в місто B, відстань між якими 164 км, зі швидкістю 20 км/год виїхав велосипедист. Через 2 год у тому самому напрямку виїхав мотоцикліст, який, обігнавши велосипедиста, прибув у місто B і одразу повернув назад. Знайдіть швидкість мотоцикліста, якщо він зустрів велосипедиста через 2 год 45 хв після того, як його обігнав.

53. З міста M у місто N зі швидкістю 12 км/год виїхав велосипедист. Через 1 год у тому самому напрямку зі швидкістю 15 км/год виїхала велосипедистка. Ще через 1 год з міста M у тому самому напрямку виїхав ще й мотоцикліст, який обігнав одного з велосипедистів через 10 хв після того, як обігнав іншого. Знайдіть швидкість мотоцикліста, якщо вона більша за 50 км/год.

54. З містечка A до містечка B і з B до A одночасно вийшли два пішоходи. Перший прибув до B через 0,8 год після їхньої зустрічі, а другий прибув до A через 1,25 год після їхньої зустрічі. Скільки годин був у дорозі кожний з пішоходів?

55. По двох взаємно перпендикулярних дорогах рухаються в напрямку перехрестя пішохід і велосипедист. У деякий момент часу пішохід знаходиться на відстані 2 км, а велосипедист – на відстані 3,75 км від перехрестя доріг. Через який час відстань між ними дорівнюватиме 1,25 км, якщо швидкість пішохода 5 км/год, а велосипедиста – 15 км/год?

56. Іра та Олег мали разом набрати текст до певного терміну. Після того як було набрано половину тексту, Олег захворів, і тому Іра закінчила роботу на 2 дні пізніше, ніж передбачалося. За скільки днів міг би набрати текст кожний з них самостійно, якщо Ірі на це знадобилося б на 5 днів менше, ніж Олегу?

57. Через перший кран можна наповнити резервуар водою на 24 хв швидше, ніж через другий. Якщо спочатку $\frac{2}{3}$ резервуара заповнять через перший кран, а потім частину, що залишилася, – через другий, то витрачений на це час буде на 33 хв більшим, ніж час наповнення резервуара одночасно через обидва крани. За який час можна наповнити резервуар через кожний кран окремо?

Жінки в науці

Українка Катерина Пожарська, випускниця Волинського національного університету імені Лесі Українки, отримала престижну міжнародну премію з математики «Joseph F. Traub Information-Based Complexity Young Researcher Award 2023». Така премія щороку присуджується одному молодому (до 35 років) вченому-математику за значний внесок у теорію інформаційної складності.

У 2015 році Катерина Пожарська вступила до аспірантури відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, де захистила кандидатську дисертацію на тему «Кращі наближення та ентропійні числа класів періодичних функцій багатьох змінних». Продовжила свої наукові дослідження на посаді наукового співробітника відділу теорії функцій Інституту математики. У 2020–2021 роках Катерина Пожарська отримувала стипендію НАН України для молодих науковців, а у 2021 році, у складі колективу співробітників відділу теорії функцій (Катерина Пожарська, Тетяна Степанюк та Сергій Янченко), була нагороджена премією президента України для молодих учених.

Катерина Пожарська

Нині вона є також постдокторською дослідницею у місті Хемніц (Німеччина), як стипендіатка від фонду Гумбольдта. Команда, в якій вона працює, займається дослідженням сучасних задач теорії наближень та розробкою алгоритмів для зменшення інформаційної складності, що знаходять застосування у машинному навчанні.

ВІДОМОСТІ З КУРСУ МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАСІВ ТА АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

Десяткові дроби

Додавання і віднімання десяткових дробів виконують порозрядно, записуючи їх один під одним так, щоб кома розміщувалася під комою.

1) $\begin{array}{r} +\,7{,}813 \\ 9{,}4 \\ \hline 17{,}213 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} -\,12{,}47 \\ 5{,}893 \\ \hline 6{,}577 \end{array}$

Щоб *перемножити два десяткових дроби*, треба виконати множення, не звертаючи уваги на коми, а потім у добутку відокремити комою справа наліво стільки цифр, скільки їх стоїть після коми в обох множниках разом.

1) $\begin{array}{r} \times\,4{,}07 \\ 2{,}9 \\ \hline +\,3663 \\ 814 \\ \hline 11{,}803 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \times\,0{,}017 \\ 0{,}9 \\ \hline 0{,}0153 \end{array}$

Щоб *поділити десятковий дріб на натуральне число*, треба виконати ділення, не звертаючи уваги на кому, проте після закінчення ділення цілої частини діленого треба в частці поставити кому.

$\begin{array}{r|l} -\,0{,}024 & 5 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}0048 \\ \cline{1-1} -\,40 & \\ 40 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$

Щоб *поділити десятковий дріб на десятковий*, треба в діленому і дільнику перенести кому на стільки цифр праворуч, скільки їх стоїть після коми в дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число. *Приклад*. 12,1088 : 2,56 = 1210,88 : 256 = 4,73.

Звичайні дроби

Частку від ділення числа a на число b можна записати у вигляді *звичайного дробу* $\frac{a}{b}$, де a – *чисельник дробу*, b – його *знаменник*.

Основна властивість дробу: величина дробу не зміниться, якщо його чисельник і знаменник помножити або поділити на одне й те саме натуральне число.

Приклади. 1) $\frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}$ (скоротили дріб $\frac{15}{20}$ на 5);

2) $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$ (звели дріб $\frac{3}{7}$ до знаменника 14).

Дроби з однаковими знаменниками додають і віднімають, використовуючи формули: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ і $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

Приклади. 1) $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$;   2) $\frac{17}{19} - \frac{3}{19} = \frac{14}{19}$;

3) $2\frac{1}{5} + 7\frac{3}{5} = 9\frac{4}{5}$;   4) $7\frac{5}{11} - 2\frac{2}{11} = 5\frac{3}{11}$.

Щоб *додати або відняти дроби з різними знаменниками,* їх спочатку зводять до спільного знаменника, а потім виконують дію за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Приклади. 1) $\frac{{}^{5/}1}{6} + \frac{{}^{3/}3}{10} = \frac{5+9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$;

2) $\frac{{}^{3/}7}{8} - \frac{{}^{2/}5}{12} = \frac{21-10}{24} = \frac{11}{24}$.

Так *додають і віднімають мішані числа.*

Приклади. 1) $5\frac{{}^{4/}1}{3} + 2\frac{{}^{3/}3}{4} = 7\frac{4+9}{12} = 7\frac{13}{12} = 8\frac{1}{12}$;

2) $7\frac{{}^{4/}4}{5} - 6\frac{{}^{5/}3}{4} = 1\frac{16-15}{20} = 1\frac{1}{20}$;

3) $5\frac{{}^{2/}4}{9} - 2\frac{{}^{3/}5}{6} = 3\frac{8}{18} - \frac{15}{18} = 2\frac{26-15}{18} = 2\frac{11}{18}$.

Щоб *помножити два дроби*, треба перемножити їх чисельники і їх знаменники і перший добуток записати чисельником, а другий – знаменником: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Приклади. 1) $\frac{5}{8} \cdot \frac{14}{15} = \frac{{}^{1}\cancel{5} \cdot \cancel{14}^{7}}{{}_{4}\cancel{8} \cdot \cancel{15}_{3}} = \frac{7}{12}$;

2) $7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$;

3) $2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{30}{7} = \frac{{}^{1}\cancel{7} \cdot \cancel{30}^{10}}{{}_{1}\cancel{3} \cdot \cancel{7}_{1}} = \frac{10}{1} = 10$.

Щоб *поділити один дріб на другий,* треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Приклади. 1) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$;

2) $2\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} = \frac{5}{2} : \frac{7}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{{}_{1}\cancel{2} \cdot 7} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$.

Додатні і від'ємні числа

Модулем числа називають відстань від початку відліку до точки, що зображує це число на координатній прямій.

Модулем додатного числа і числа нуль є саме це число, а модулем від'ємного числа – протилежне йому число: $|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$

Приклади. $|3| = 3$; $|-2| = 2$; $|0| = 0$; $|\pi| = \pi$; $\left|-2\frac{1}{7}\right| = 2\frac{1}{7}$.

Щоб *додати два від'ємних числа*, треба додати їх модулі й перед отриманим результатом записати знак «–». $-3 + (-7) = -10$.

Щоб *додати два числа з різними знаками*, треба від більшого модуля доданків відняти менший модуль і перед отриманим результатом записати знак того доданка, модуль якого більший.

Приклади. 1) $-5 + 5 = 0$; 2) $7 + (-3) = 4$; 3) $-9 + 5 = -4$.

Щоб *від одного числа відняти друге*, треба до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику: $a - b = a + (-b)$.

Приклади. 1) $5 - 11 = 5 + (-11) = -6$; 2) $-3 - 7 = -3 + (-7) = -10$; 3) $-5 - (-9) = -5 + 9 = 4$; 4) $4 - (-7) = 4 + 7 = 11$.

Добуток двох чисел з однаковими знаками дорівнює добутку їх модулів. Добуток двох чисел з різними знаками дорівнює добутку їх модулів, узятому зі знаком «–».

Приклади. 1) $-2 \cdot (-7) = 14$; 2) $4 \cdot (-2) = -8$.

Частка двох чисел з однаковими знаками дорівнює частці від ділення їх модулів. Частка двох чисел з різними знаками дорівнює частці від ділення їх модулів, узятій зі знаком «–».

Приклади. 1) $-18 : (-3) = 6$; 2) $4 : (-1) = -4$; 3) $-20 : 4 = -5$.

Рівняння

Коренем, або *розв'язком*, *рівняння* називають число, яке перетворює рівняння в правильну числову рівність.

Приклади. 1) Число 3 є коренем рівняння $2x - 5 = 1$, оскільки $2 \cdot 3 - 5 = 1$.

2) Число -2 не є коренем рівняння $3x + 7 = 0$, оскільки $3 \cdot (-2) + 7 = 1 \neq 0$.

Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і такі рівняння, які не мають коренів.

Приклади. 1) Рівняння $4x = 8$ і $x + 3 = 5$ – рівносильні, оскільки кожне з них має єдиний корінь, що дорівнює 2.

2) Рівняння $7 - x = 6$ і $10x = 20$ не є рівносильними, оскільки перше має корінь – число 1, а друге – число 2.

Під час розв'язування *рівнянь* використовують такі *властивості*:

1) якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме, відмінне від нуля, число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

Рівняння вигляду $ax = b$, де a і b – деякі числа, x – змінна, називають *лінійним рівнянням з однією змінною*.

Дані про розв'язки лінійного рівняння подамо за допомогою схеми:

$ax = b$

Якщо $a \neq 0$, то $x = \dfrac{b}{a}$	Якщо $a = 0$, $b = 0$, то x – будь-яке число	Якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то коренів немає

Приклади. 1) $-0{,}5x = 14$; $x = 14 : (-0{,}5)$; $x = -28$.

2) $0x = 5$; рівняння не має коренів.

Багато рівнянь послідовними перетвореннями зводять до лінійного рівняння, рівносильного даному.

Приклади. 1) $5(x + 2) - 4x = -3(x + 7)$.

Розкриємо дужки: $5x + 10 - 4x = -3x - 21$.

Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину рівняння, а інші – у праву, змінивши знаки доданків, які переносимо, на протилежні: $5x - 4x + 3x = -21 - 10$; зведемо подібні доданки: $4x = -31$; розв'яжемо отримане лінійне рівняння: $x = -31 : 4$; $x = -7{,}75$.

Відповідь: $-7{,}75$.

2) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{5-x}{3} = \dfrac{x+13}{6}$. Помножимо обидві частини рівняння на найменше спільне кратне знаменників дробів – число 6:

$\dfrac{6(x+1)}{2} + \dfrac{6(5-x)}{3} = \dfrac{6(x+13)}{6}$;

$3(x + 1) + 2(5 - x) = x + 13$.

Далі розв'язуємо, як у попередньому прикладі:

$3x + 3 + 10 - 2x = x + 13$;
$3x - 2x - x = 13 - 3 - 10$;
$0x = 0$; x – будь-яке число.

Відповідь: будь-яке число.

Степінь з натуральним показником

Степенем числа a з натуральним показником n називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a. *Степенем числа a* з показником 1 називають саме це число.

Приклади. 1) $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$;

$$2)\ \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27};$$

3) $1{,}8^1 = 1{,}8$; 4) $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$.

Властивості степеня з натуральним показником:

$a^m a^n = a^{m+n}$, $(ab)^n = a^n b^n$, $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$,
$a^m : a^n = a^{m-n}$, $a^{m+n} = a^m a^n$, $a^n b^n = (ab)^n$.
$(a^m)^n = a^{mn}$, $a^{m-n} = a^m : a^n$,

Приклади. 1) $a^7 a^8 = a^{7+8} = a^{15}$; 2) $m^5 : m = m^{5-1} = m^4$;
3) $(b^5)^{10} = b^{5\cdot 10} = b^{50}$.

Використовуючи властивості степеня з натуральним показником, можемо значно спрощувати обчислення.

Приклади. 1) $127^5 : 127^4 = 127^{5-4} = 127^1 = 127$;

2) $(2^3)^8 : 4^{10} = 2^{3\cdot 8} : (2^2)^{10} = 2^{24} : 2^{20} = 2^{24-20} = 2^4 = 16$;

$$3)\ \frac{3^5 \cdot 9^2}{27^2} = \frac{3^5 \cdot (3^2)^2}{(3^3)^2} = \frac{3^5 \cdot 3^4}{3^6} = 3^{5+4-6} = 3^3 = 27;$$

4) $5^{12} \cdot 0{,}2^{12} = (5 \cdot 0{,}2)^{12} = 1^{12} = 1$;

5) $2^9 \cdot 0{,}5^8 = 2 \cdot 2^8 \cdot 0{,}5^8 = 2 \cdot (2 \cdot 0{,}5)^8 = 2 \cdot 1^8 = 2 \cdot 1 = 2$.

Одночлен

Цілі вирази – числа, змінні, їх степені й добутки – називають *одночленами*.

Наприклад, 7; $-\frac{9}{13}b^2c$; $7a^5m^3$ – одночлени;

вирази $m + c^2$, $p^3 - 2a + 3b$; $\frac{a+b}{a-b}$ – не є одночленами.

Якщо одночлен містить тільки один числовий множник, і до того ж цей множник записано першим, та містить степені різних змінних, то такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*.

Наприклад, $2a^2b$ – одночлен стандартного вигляду, а одночлен $2a^2b \cdot (-3ab^7)$ не є одночленом стандартного вигляду. Цей одночлен можна звести до одночлена стандартного вигляду:

$$2a^2b \cdot (-3ab^7) = 2 \cdot (-3) \cdot (a^2a) \cdot (bb^7) = -6a^3b^8.$$

Множення одночленів

Приклади. 1) $-2x^2y^7 \cdot 5x = -2 \cdot 5 \cdot (x^2x) \cdot y^7 = -10x^3y^7$;

$$2)\ \frac{1}{3}p^3c^8 \cdot \left(-\frac{2}{7}p^4m^2\right) \cdot 1\frac{1}{6}c^3m = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{7}{6}(p^3p^4)\cdot(c^8c^3)\cdot(m^2m) =$$

$$= -\frac{1}{9}p^7c^{11}m^3.$$

Піднесення одночлена до степеня

Приклади. 1) $(-2m^3n^4)^3 = (-2)^3 \cdot (m^3)^3 \cdot (n^4)^3 = -8m^9n^{12}$;

2) $(-c^5d^8)^6 = (-1)^6 \cdot (c^5)^6 \cdot (d^8)^6 = c^{30}d^{48}$.

Многочлен

Многочленом називають суму одночленів. Многочлен, що є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків, називають *многочленом стандартного вигляду*.

Многочлен $3m^2n - 5mn^2 + 7m^2n + mn^2$ не є многочленом стандартного вигляду, але його можна звести до многочлена стандартного вигляду: $\underline{3m^2n} - \underline{\underline{5mn^2}} + \underline{7m^2n} + \underline{\underline{mn^2}} = 10m^2n - 4mn^2$.

Додавання і віднімання многочленів

Приклади. 1) $(2x^2 + 3x - 5) + (x^2 - 3x) = \underline{\underline{2x^2}} + \underline{3x} - 5 + \underline{\underline{x^2}} - \underline{3x} = 3x^2 - 5$;

2) $(3a^2 - 5 + 2a) - (2a^2 + 7 - 3a) = \underline{3a^2} - 5 + \underline{\underline{2a}} - \underline{2a^2} - 7 + \underline{\underline{3a}} = a^2 + 5a - 12$.

Множення одночлена на многочлен

Приклади. 1) $3a(a^3 - 2a + 7) = 3a \cdot a^3 + 3a \cdot (-2a) + 3a \cdot 7 = 3a^4 - 6a^2 + 21a$;

2) $-2xy(3x^2 - 5xy + y^2) = -2xy \cdot 3x^2 - 2xy \cdot (-5xy) - 2xy \cdot y^2 = -6x^3y + 10x^2y^2 - 2xy^3$.

Множення многочлена на многочлен

$$\boldsymbol{(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.}$$

Приклади. 1) $(3x - 5)(x + 2) = 3x^2 + 6x - 5x - 10 = 3x^2 + x - 10$;

2) $(2a - b)(a^2 - 3ab + b^2) = 2a^3 - 6a^2b + 2ab^2 - ba^2 + 3ab^2 - b^3 = 2a^3 - 7a^2b + 5ab^2 - b^3$.

Формули скороченого множення

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$,

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$,

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

Приклади. 1) $(x - 5)(x + 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$;

2) $(2m + 3)^2 = (2m)^2 + 2 \cdot 2m \cdot 3 + 3^2 = 4m^2 + 12m + 9$;

3) $(5x^2 - 2xy)^2 = (5x^2)^2 - 2 \cdot 5x^2 \cdot 2xy + (2xy)^2 = 25x^4 - 20x^3y + 4x^2y^2$;

4) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9) = (a - 3)(a^2 + 3a + 3^2) = a^3 - 3^3 = a^3 - 27$;

5) $$\left(\frac{1}{2}b + c^2\right)\left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}bc^2 + c^4\right) = \left(\frac{1}{2}b + c^2\right)\left(\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - \frac{1}{2}b \cdot c^2 + (c^2)^2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}b\right)^3 + (c^2)^3 = \frac{1}{8}b^3 + c^6.$$

Розкладання многочленів на множники

Винесення спільного множника за дужки $\underline{a}b + \underline{a}c = \underline{a}(b + c)$.

Приклади. 1) $12x^2 + 15x = \underline{3x} \cdot 4x + \underline{3x} \cdot 5 = \underline{3x}\,(4x + 5)$;

2) $25a^3b - 20a^2b^2 = \underline{5a^2b} \cdot 5a - \underline{5a^2b} \cdot 4b = \underline{5a^2b}(5a - 4b)$.

Спосіб групування

$$ax + ay + bx + by = a(\underline{x + y}) + b(\underline{x + y}) = (x + y)(a + b).$$

Приклади. 1) $ab - 5a + 2b - 10 = (ab - 5a) + (2b - 10) = a(\underline{b - 5}) + 2(\underline{b - 5}) = (b - 5)(a + 2)$;

2) $a^2b + c^2 - abc - ac = (a^2b - abc) + (c^2 - ac) = ab(a - c) - c(a - c) = (a - c)(ab - c)$.

Використання формул скороченого множення

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$,
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Приклади. 1) $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7)(x + 7)$;
2) $m^2 + 10m + 25 = m^2 + 2 \cdot m \cdot 5 + 5^2 = (m + 5)^2$;
3) $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 = (2a - 3b)^2$;
4) $c^3 - 64 = c^3 - 4^3 = (c - 4)(c^2 + c \cdot 4 + 4^2) = (c - 4)(c^2 + 4c + 16)$;

5) $$\frac{1}{8}x^6 + y^9 = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 + (y^3)^3 = \left(\frac{1}{2}x^2 + y^3\right)\left(\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot y^3 + (y^3)^2\right) = \left(\frac{1}{2}x^2 + y^3\right)\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^3 + y^6\right).$$

Функція

Якщо кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, то таку залежність називають *функціональною залежністю*, або *функцією*.

Змінну x у цьому випадку називають *незалежною змінною* (або *аргументом*), а змінну y – *залежною змінною* (або *функцією* від заданого аргументу).

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють *область визначення функції*; усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють *область значень функції*.

Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою вигляду $y = kx + l$, де x – незалежна змінна, k і l – деякі числа.

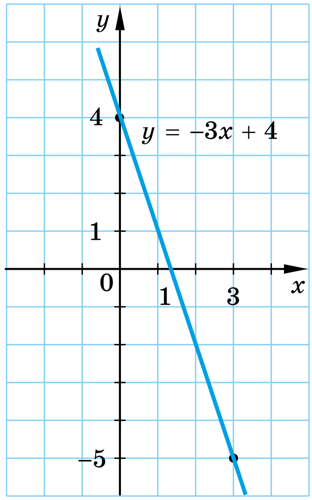
Графіком будь-якої лінійної функції є пряма. Для побудови графіка лінійної функції досить знайти координати двох точок графіка, позначити ці точки на координатній площині та провести через них пряму.

Приклад. Побудуємо графік функції $y = -3x + 4$.

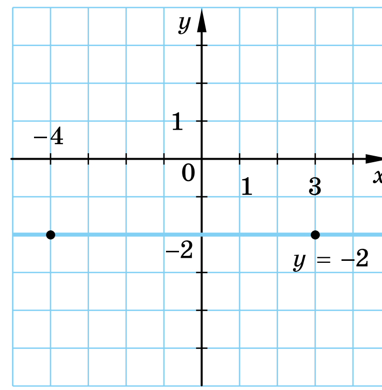
Складемо таблицю для деяких двох значень аргументу:

x	y
0	4
3	−5

Позначимо на координатній площині отримані точки та проведемо через них пряму (мал. 1).



Мал. 1



Мал. 2

Приклад. Побудуємо графік функції $y = -2$. Будь-якому значенню x відповідає одне й те саме значення y, що дорівнює -2. Графіком функції є пряма, що складається з точок з координатами $(x; -2)$, де x – будь-яке число. Позначимо дві будь-які такі точки, наприклад $(3; -2)$ і $(-4; -2)$, і проведемо через них пряму (мал. 2).

Системи лінійних рівнянь з двома змінними

Якщо треба знайти спільний розв'язок двох (або більшої кількості) рівнянь, то кажуть, що ці рівняння утворюють *систему рівнянь*.

Приклад. $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x - 3y = 5 \end{cases}$ – система рівнянь з двома змінними x і y.

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару значень змінних, для яких кожне рівняння перетворюється у правильну числову рівність.

Пара чисел $x = 2$; $y = -1$ є розв'язком вищевказаної системи, оскільки $2 \cdot 2 + (-1) = 3$ і $2 - 3 \cdot (-1) = 5$.

Пара чисел $x = 5$; $y = -7$ не є розв'язком системи. Для цих значень змінних перше рівняння перетворюється у правильну рівність $(2 \cdot 5 + (-7) = 3)$, а друге – ні $(5 - 3 \cdot (-7) = 26 \neq 5)$.

Розв'язати систему рівнянь – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x - 7y = 1, \\ 4x + 9y = 38. \end{cases}$

1.	Виражаємо одну змінну з якого-небудь рівняння системи через другу	$3x = 1 + 7y,$ $x = \dfrac{1 + 7y}{3}$
2.	Замість цієї змінної підставляємо в інше рівняння системи вираз, що утворився	$4 \cdot \dfrac{1 + 7y}{3} + 9y = 38$
3.	Розв'язуємо отримане рівняння з однією змінною	$4(1 + 7y) + 3 \cdot 9y = 3 \cdot 38,$ $4 + 28y + 27y = 114,$ $55y = 110,$ $y = 2$
4.	Знаходимо відповідне значення другої змінної	$x = \dfrac{1 + 7 \cdot 2}{3},$ $x = 5$
5.	Записуємо відповідь	(5; 2)

Розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 3y = 19. \end{cases}$

1.	Множимо (якщо є потреба) обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти біля однієї зі змінних стали протилежними числами	$\begin{cases} 7x - 4y = 2, & \mid \times 3 \\ 5x + 3y = 19; & \mid \times 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 21x - 12y = 6, \\ 20x + 12y = 76 \end{cases}$
2.	Додаємо почленно ліві й праві частини рівнянь системи	$41x = 82$
3.	Розв'язуємо отримане рівняння з однією змінною	$x = 2$
4.	Підставляємо знайдене значення змінної в одне з рівнянь системи (краще початкової) і знаходимо відповідне значення другої змінної	$7 \cdot 2 - 4y = 2,$ $-4y = -12,$ $y = 3$
5.	Записуємо відповідь	(2; 3)

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

Повторюємо алгебру за 7 клас

11. 1615 р. **12.** 1710 р. **13.** 1) −11; 11; 2) рівняння не має розв'язків; 3) −1; 5; 4) 0,5; 5) −1; 0,2; 6) −10; 14. **14.** 8 см; 24 см; 20 см. **15.** 18 кг; 12 кг; 36 кг. **16.** 4,5. **17.** −3,5. **30.** 1) 16; 2) 25; 3) 1; 4) 81. **31.** 1) 9; 2) 10; 3) 1; 4) 2. **32.** 1) $-3x$; 2) $12 - 23a$. **33.** 1) $4m$; 2) $38x - 7$. **34.** 5. **35.** 8. **38.** 1) 0; 0,25; 2) −0,2; 3) −1; 3. **39.** 1) 0; −0,5; 2) $\frac{1}{6}$; 3) −5; 1. **42.** $m^4 - m^3 - 4m^2 + 13m - 15$. **43.** 1) 2,5; 2) 7,5; 3) −25; 4) 125. **44.** 1) 1,4; 2) 5,6; 3) −49; 4) 343. **57.** 1) (0; −4); (8; 0); 2) (0; 16); (4; 0); (−4; 0). **58.** 1) (0; 3); (1,5; 0); 2) (0; 0); (−2; 0). **71.** 12 кг; 16 кг. **73.** 1) (12; 0); (0; −8); 2) (0; 3); 3) (−3; 0). **74.** 1) (10; 0); (0; 8); 2) (−8; 0); 3) (0; 2). **75.** 1) $a = -3$; $b = 2$; 2) (4; 3); 3) (−2; 3). **76.** 1) $m = 2$; $n = -1$; 2) (3; 0); 3) (3; −1). **77.** 18 км/год; 2 км/год. **78.** $y = 9 - 2x$. **79.** $y = 3x + 11$. **80.** 30 грн; 25 грн.

Розділ 1

§ 1. **1.7.** 7) x – будь-яке число; 8) $m \neq 0$. **1.11.** 3) −1,92; 4) −41,2. **1.13.** 2) $x = -3$; 3) $x = 1$ і $x = -7$; 4) немає таких значень x. **1.14.** 2) $y = -1$; 3) $y = -2$ і $y = 3$; 4) немає таких значень y. **1.15.** 1) $a \neq 1$; $a \neq -3{,}5$; 2) $t \neq 0$; $t \neq 7$; 3) $m \neq 5$; $m \neq -5$; 4) $x \neq 9$. **1.16.** 1) $p \neq 9$; $p \neq -2{,}5$; 2) $a \neq 0$; $a \neq 5$; 3) $c \neq 2$; $c \neq -2$; 4) $a \neq -1$. **1.18.** 1) $a \neq 2$; $a \neq 3$; 2) $x \neq 1$; $x \neq -1$; 3) $m \neq 0$; $m \neq 1$; 4) $k \neq 6$; $k \neq -2$. **1.19.** 1) $x \neq -2$; $x \neq 4$; 2) $m \neq 4$; $m \neq -4$; 3) $x \neq 0$; $x \neq -1$; 4) $a \neq 1$; $a \neq -5$. **1.29.** 18 хв. **1.30.** 9.

§ 2. **2.16.** 1) $-\frac{1}{m}$; 2) $-\frac{3m}{2n}$; 3) $m + 3$; 4) $\frac{5}{a-2}$; 5) $\frac{3+n}{7}$; 6) $\frac{m+n}{m-n}$. **2.17.** 4) $\frac{m-n}{5-a}$. **2.18.** 3) $\frac{9x+9y}{x^2-y^2}$; 4) $\frac{4k^2+4k+4}{k^3-1}$; 5) $-\frac{a}{b-a}$; 6) $-\frac{p^2+2p}{4-p^2}$. **2.20.** 3. **2.21.** 12 століття. **2.22.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$; 3) $\frac{9(b-3c)}{5}$. **2.23.** 1) 2; 2) $\frac{(a-b)(a^2+b^2)}{a^2-ab+b^2}$; 3) $\frac{1}{8(3m+n)}$. **2.24.** 1) Графіком є пряма $y = \frac{x}{6}$ з «виколотою» точкою (−6; −1); 2) графіком є пряма $y = 2 - x$ з «виколотою» точкою (2; 0). **2.25.** 1) $y = -\frac{x}{5}$ з «виколотою» точкою (5; −1); 2) $y = 3 + x$ з «виколотою» точкою (−3; 0). **2.30.** 29 584 952 та 13 175 564. **2.31.** 12 год.

§ 3. **3.14.** 1) $\frac{m-2}{m+2}$; 2) $\frac{3}{c}$. **3.15.** 1) $\frac{a-3}{a+3}$; 2) $\frac{2}{m}$. **3.17.** 1) 15; 2) 2025. **3.18.** 1) −2; 2) 198. **3.19.** 3) $x - \frac{3}{x+5}$; 4) $4 + \frac{7}{a-b}$. **3.20.** 3) $y + \frac{2}{y+1}$; 4) $5 - \frac{1}{p-q}$.

3.21. 1) $\frac{1}{m-2}$; 2) $\frac{3}{a-2}$; 3) $\frac{m}{n-3}$. **3.22.** 1) $\frac{1}{3-a}$; 2) $\frac{5}{m-3}$; 3) $\frac{p}{q-4}$. **3.24.** $\frac{x-y-z}{x+y+z}$. **3.27.** 1) 144 см/год. **3.28.** *Порада.* Розгляньте суму $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_7 - b_7)$.

§ 4. **4.24.** $\frac{5n}{n^2-m^2}$; 2. **4.27.** 1) $\frac{4}{ab}$; 2) $\frac{m+x}{x}$; 3) $\frac{1}{x(x-2)}$; 4) $\frac{b^2+3ab+9a^2}{ab}$. **4.28.** 1) $-\frac{2}{ab}$; 2) $\frac{t-a}{a}$; 3) $\frac{2}{a(a-3)}$; 4) $\frac{n^2+2mn+4m^2}{mn}$. **4.30.** 1) $-\frac{2n^2}{m+n}$; 2) $\frac{p^2-4p}{p-2}$; 3) $\frac{1}{1-a^2}$; 4) $\frac{10p+3}{2p-3}$. **4.33.** 1) $\frac{1}{x+1}$; 2) $\frac{5}{m-5}$; 3) $\frac{m-6}{6m}$; 4) $\frac{1}{2(a-3)}$. **4.38.** 1) $\frac{2x^3}{(x-y)(x+y)^2}$; 2) $\frac{16}{(x-2)^2(x+2)^2}$. **4.39.** $a = 8$. **4.40.** *Порада.* Після спрощень отримаємо $a^2 + 4$. **4.42.** Графіком функції є пряма $y = 4$ з «виколотою» точкою (2; 4). **4.43.** 18 років. *Порада.* Після спрощень отримаємо $-\frac{8}{6a+b}$. **4.44.** 5. *Порада.* Після спрощень отримаємо $-\frac{5}{5x+y}$. **4.45.** Ні. *Порада.* Після спрощень отримаємо $-\frac{1}{2x}$. **4.48.** 1) 4; 2) 2; 3) 10; 4) 5. **4.51.** 1) 133 кг, 2660 кг; 2) 2394 м^2. **4.52.** 5.

§ 5. **5.13.** 1955 р. **5.14.** 1975. **5.19.** 1) $\frac{(m-2)(m-3)}{3(m+3)}$; 2) $\frac{(x-5)(x+3)}{x+5}$. **5.20.** 1) $\frac{7(a+4)}{(a-1)(a-4)}$; 2) $\frac{(y-2)(y-3)}{y+3}$. **5.23.** 1) $\frac{y}{2}$; 2) $\frac{x+y}{x-y}$. **5.24.** 1) $\frac{n^2}{2}$; 2) $\frac{m-n}{m+n}$. **5.25.** 1) 0; 2) 9,6. **5.26.** 1) $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2$; 2) $\frac{5(c-y-1)}{3(a+b+1)}$. **5.27.** 0. **5.32.** 480 тис. грн. **5.33.** 1) Так; 2) ні.

§ 6. **6.11.** 15 місяців. **6.12.** 110 год. **6.13.** 1) $\frac{3c}{4ab}$; 2) $\frac{a}{c^3}$; 3) $\frac{c^4}{3}$; 4) $\frac{b}{2a^5}$. **6.14.** 1) $\frac{2a}{c^6}$; 2) $\frac{3x}{y}$. **6.15.** 1) $\frac{2a+1}{2a-3}$; 2) $\frac{1}{2-x}$; 3) $\frac{7(y-5x)}{y}$; 4) $1\frac{1}{3}$. **6.16.** 1) 1; 2) -5. **6.17.** 1) 0,1; 2) 5,032. **6.18.** $\frac{a-8}{a-5}$. **6.20.** $\frac{2a-3}{a-6}$. **6.21.** $\frac{c+y}{b-2}$. **6.23.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 0. **6.25.** 23 832 грн. **6.26.** 45 партій.

§ 7. **7.1.** 1) 4; 2) $\frac{n}{x+3}$; 3) $\frac{2a}{2a+b}$; 4) $\frac{xy}{x+y}$. **7.2.** 1) 2; 2) $\frac{a}{3-b}$; 3) $\frac{2x}{3x-y}$;

4) $\frac{mn}{n-m}$. **7.3.** 18 год. **7.4.** 1) $\frac{x+7}{7x}$; 2) $\frac{3n+m}{3n-m}$; 3) $-3a-5$; 4) $\frac{5x}{3}$. **7.5.** 1) $\frac{m-5}{5m}$; 2) $\frac{y-x}{y+x}$; 3) $7-2b$; 4) $\frac{m}{2}$. **7.8.** 1) −2; 2) $\frac{a-3}{2(a+3)}$. **7.9.** 1) 2; 2) $\frac{a-2}{a+2}$. **7.10.** 1) 3; 2) 4. **7.11.** 1) 2; 2) 2. **7.14.** 1) $-\frac{1}{1+a}$; 2) 4. **7.15.** 1) $\frac{1}{2-a}$; 2) 2. **7.19.** 3) $\frac{2x^6+2y^6}{x^4y^4}$; 4) $\frac{4a^2-4b^2}{ab}$. *Порада*. Спочатку розкрити квадрати суми та різниці. **7.20.** 2) $\frac{4m}{n^2}$. **7.21.** 1) $\frac{x-1}{x+1}$; 2) 1; 3) p; 4) $3-c$; 5) $\frac{x+1}{x-1}$; 6) $\frac{m}{n}$. **7.22.** 1) $\frac{m+4}{m-4}$; 2) 1; 3) t; 4) $\frac{1}{x-1}$; 5) $\frac{2+m}{2-m}$; 6) $\frac{x}{2}$. **7.23.** *Порада*. Значення виразу дорівнює 2. **7.24.** 1. **7.25.** 51. **7.26.** 7. **7.27.** 1) $\frac{2x-1}{2x(2x+1)}$; 2) $\frac{1}{2}$. **7.29.** *Порада*. Значення виразу дорівнює $\frac{1}{(m+1)^2}$. **7.30.** 1) $1-x^2-x$; 2) $\frac{m^3}{m^3-m+1}$. **7.31.** 1) x^2+2x+1; 2) $\frac{n^2}{n^3-n+1}$. **7.39.** 180 год. **7.40.** 11.

§ 8. **8.14.** $\frac{10}{15}$. **8.15.** $\frac{3}{15}$. **8.16.** 2. **8.17.** 3. **8.18.** 1) 2; 2) 3; 3) −5; 4) 9. **8.19.** 1) 1; 2) −2; 3) 2; 4) −3. **8.20.** Ні, корінь першого рівняння 3, а другого – 0. **8.21.** Ні, корінь першого рівняння 4, а другого – 0. **8.22.** $\frac{4}{9}$. **8.23.** $\frac{2}{5}$. **8.24.** 1) −4; 2) коренів немає. **8.25.** 1) −4; 2) коренів немає. **8.26.** 1) −4; 2) коренів немає. **8.27.** 1) −1; 2) коренів немає. **8.28.** 1) $a=0$; $a=4$; 2) $a=1$; $a=4$. **8.29.** $a=3$; $a=1$. **8.30.** $\frac{10(x-2)}{x}$; 9 медалей. **8.31.** $\frac{2a-b}{2a+b}$. **8.35.** 21 грн.

§ 9. **9.14.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) −1,5; 4) −11; 5) 0,5; 6) $\frac{35}{192}$; 7) 1,4; 8) $-\frac{3}{64}$; 9) $2\frac{33}{64}$; 10) 0,064; 11) 14; 12) $\frac{88}{125}$. **9.15.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $-1\frac{1}{3}$; 3) −699; 4) 19; 5) $-\frac{3}{50}$; 6) $\frac{7}{8}$; 7) $\frac{5}{16}$; 8) 36; 9) $-\frac{29}{216}$. **9.16.** 2700 м. **9.18.** 1) $a^n>0$; 2) $a^n>0$; 3) $a^n<0$. **9.20.** 1) $\frac{m^2n^2a^4}{cx^3p^3}$; 2) $\frac{25x^3mb^2}{a}$. **9.21.** 1) $3x^2p^{-1}$; 2) $15mn^{-2}c^{-3}$;

3) $2xb^{-5}(a-b)^{-2}$; 4) $(x+y)^7(x-y)^{-3}$. **9.23.** 3) $\frac{(mn+1)^2}{mn}$; 4) $\frac{ab}{b-a}$. **9.24.** 2) $\frac{y+x}{xy}$. **9.25.** 1) $\frac{24}{49}$; 2) $5\frac{11}{49}$. **9.26.** $4\frac{2}{5}$. **9.27.** $\frac{3x^2-1}{x^2}$. **9.29.** 10 грн у Сергія; 14 грн в Олексія. **9.33.** Найнижчий – модель A ($R = 16$), найвищий – модель B ($R = 22$). **9.34.** 3; 2; 5,11 долара.

§ 10. **10.18.** 1) $(4m^{-1})^3$; 2) $(0{,}1p^{-4})^2$; 3) $(0{,}05c^{-4}p^6)^2$; 4) $\left(\frac{3}{2}c^3x^{-5}\right)^4$. **10.19.** 1) 625; 2) $\frac{1}{10}$; 3) 3; 4) 49. **10.20.** 1) 16; 2) $\frac{1}{4}$. **10.21.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) 49; 5) $-\frac{1}{6}$; 6) 2. **10.22.** 1) 4; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) 36; 5) $\frac{1}{100}$; 6) $\frac{1}{25}$. **10.23.** 72 м. **10.24.** 1) $7a^5b^{-2}$; 2) $-2x^{-18}y^3$. **10.25.** 1) $\frac{a^3}{2b^3}$; 2) $-\frac{2a^5}{5x^8}$. **10.26.** 1) $7m^2n^{-2}$; 2) $-\frac{x^2}{3c^2}$. **10.29.** 1) 125; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{a^{2n}}{b^4}$. **10.30.** 1) 49; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{x^{6m}}{y^6}$. **10.31.** 1) $2\cdot 5^n$; 2) x^8; 3) $\frac{1}{m^2}$. **10.32.** 1) $\frac{6}{4^n}$; 2) x^8; 3) $\frac{1}{b^3}$. **10.34.** 24 грн, 32 грн. **10.37.** Купити велокуртку й светр, після цього велотуфлі зі знижкою 10 %; 6380 грн, економія буде 120 грн. **10.38.** $x = 3$; $y = 3$.

§ 11. **11.25.** 31 %. **11.26.** $\approx 1{,}3666\cdot 10^8$ с або 1582 доби. **11.29.** $2^{239}\approx 8{,}83\times$ $\times\, 10^{71}$ бактерій. **11.30.** 1) −16; 2) −23; 3) −11; 4) −15. **11.31.** 1) 18; 2) 13; 3) 12; 4) 10. **11.32.** 1) 1; 2) 180. **11.33.** $a = -4$, $a = -1$. **11.37.** 1) 12 л, 360 л; 2) більше ніж на 3,5 доби. **11.38.** 108.

§ 12. **12.16.** $y = -\frac{48}{x}$. **12.17.** $y = \frac{14}{x}$. **12.18.** $2 \leqslant y \leqslant 8$. **12.19.** 1) 4; 2) −3; 3; 3) −1; 4. **12.20.** 1) 2; 2) −2; 2; 3) −1; 5. **12.24.** *Порада.* 1) Після спрощень одержимо $y = \frac{2}{x}$; 2) графіком є гіпербола $y = -\frac{6}{x}$ з «виколотою» точкою (3; −2). **12.27.** $\frac{1}{81}$. **12.28.** 7280 грн. **12.29.** −1.

Вправи для повторення розділу 1

4. −0,1. **5.** 1) x – будь-яке число; 2) $m < 0$; 3) $a \neq 0$; $a \neq 1$; $a \neq -1$; 4) $x \neq 2$; $x \neq 5$. **6.** 1) 1; 2) немає таких значень x; 3) −2; 4) $0 < x < 3$ або $x > 3$. **11.** 1) 1; 2) 0. **14.** 2. **16.** $\frac{z-x-y}{x+y+z}$. **20.** 1) $\frac{3}{b+2}$; 2) $\frac{1}{m-1}$. **21.** $a = -3$. **22.** *Порада.* Значення виразу дорівнює 3. **23.** 1) $\frac{4m-1}{4m+1}$;

2) $\dfrac{2x-1-4x^2}{2x+1}$. **24.** *Порада*. Після спрощення виразу матимемо $\dfrac{1}{(x-2)^2}$.
25. 1) 1; 2; 2) 1; 2; 3; 6; 3) 1; 16. **26.** *Порада*. Графіком функції є пряма $y = x + 1$ з «виколотою» точкою (1; 2). **32.** *Порада*. Вираз тотожно дорівнює 1. **33.** 1) 0; 2) $\dfrac{8}{3-2x}$; 3) $\dfrac{3x-2y}{xy}$; 4) $\dfrac{2a+1}{6(2a-1)}$; 5) $\dfrac{6(x+1)}{x^2+x+1}$; 6) $\dfrac{2a}{(1-3b)(a+2)}$. **36.** 1) $a = -24$; $b = -6$; 2) $a = 3$; $b = -3$. **37.** $\dfrac{2sv}{v^2-9}$; 8 год. **43.** 1) $\dfrac{5xt^{10}}{3}$; 2) $a^2 - b^2$. **44.** $\dfrac{(x+b)(x-c)}{(x-a)^2}$. **45.** *Порада*. Значення виразу дорівнює 1. **46.** *Порада*. Значення виразу дорівнює $\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2$.
50. 1) $\dfrac{1}{3-x}$; 2) $\dfrac{2(5x-2y)}{5(5x+2y)}$. **51.** $\dfrac{a^2}{a^2-2a-15}$. **52.** *Порада*. Після спрощення виразу отримаємо $-\dfrac{2(x+y)^2}{x^2}$. **53.** 0. **54.** *Порада*. $a^2 + 5a + 4 = a^2 + a + 4a + 4 = a(a+1) + 4(a+1) = (a+1)(a+4)$. **55.** 1) $\dfrac{3}{a}$; 2) $-\dfrac{3m}{m+3}$; 3) $\dfrac{2}{a-b}$; 4) $p - 1$. **57.** 1) $\dfrac{1}{(a+b)^2}$; 2) $\dfrac{6}{a+3}$. **58.** $1\dfrac{11}{14}$. **59.** *Порада*. 1) Після спрощень отримаємо 3; 2) після спрощень отримаємо −1. **61.** 5 або −5. **62.** $\dfrac{1}{x^2-4}$. **63.** *Порада*. Після спрощень отримаємо $x^2 + 4$. **64.** *Порада*. Після спрощень отримаємо $\dfrac{1}{m+5}$. **65.** Ні, оскільки після спрощень матимемо $\dfrac{1}{x}$. **68.** 2. **69.** 4) 0. **70.** 18 км/год. **71.** 1) −0,5; 2) −2,5.
72. 12 днів, 24 дні. **73.** 1) Якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \dfrac{a}{5}$; 2) якщо $a = b$, то коренів немає; якщо $a \neq b$, то $x = \dfrac{a-b}{2}$.
79. 1) $7^{-3} > (-7)^3$; 2) $(-1,2)^0 > (-5)^{-5}$; 3) $(-13)^{-4} > (-13)^4$; 4) $(-12)^6 > 12^{-6}$.
80. 1) $\dfrac{1}{4}$; 2) −0,16; 3) −10; 4) −99. **81.** 1) $\dfrac{a^2-a+1}{a^3(1+a)}$; 2) −1. **82.** 1. **83.** $x = -3$.
84. a^8b^8. **89.** 30. **92.** 1) $x(x^2 + 5x^{-1} + x^{-6})$; 2) $x^{-1}(x^4 + 5x + x^{-4})$; 3) $x^{-3}(x^6 + 5x^3 + x^{-2})$. **97.** $6,35 \cdot 10^4$ км². **98.** 1) $3,6 \cdot 10^3$ с; 2) $8,64 \cdot 10^4$ с; 3) $2,592 \cdot 10^6$ с; 4) $3,1536 \cdot 10^7$ с; 5) $3,15576 \cdot 10^9$ с. *Порада*. Врахувати, що в будь-якому столітті 25 високосних років і 75 – невисокосних. **102.** 1) Ні; 2) так. **105.** (2; 2) і (−2; −2). **106.** (3; −3) і (−3; 3).

Розділ 2

§ 13. **13.10.** 1) $0 \leqslant y \leqslant 9$; 2) $0 \leqslant y \leqslant 4$. **13.12.** 1) 0; 3; 2) −2. **13.13.** 1) 2; −2; 2) 0; 2. **13.14.** 1) Графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотою» точкою (−1; 1); 2) графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотими» точками (−2; 4) і (2; 4). **13.15.** 1) Графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотою» точкою (0; 0); 2) графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотими» точками (−1; 1) і (1; 1). **13.22.** 250. **13.23.** 480 діб.

§ 14. **14.18.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **14.19.** 1) $x > 0$; 2) x – будь-яке число; 3) $x \geqslant 0$; 4) $x < 0$. **14.20.** 1) $y \geqslant 0$; 2) $y > 0$; 3) y – будь-яке число; 4) $y \leqslant 0$. **14.21.** 1) Коренів немає; 2) 32; 3) 13; 4) 4,5. **14.22.** 1) 12; 2) коренів немає; 3) $\frac{1}{8}$; 4) 1. **14.23.** 1) $a = 0$; 2) $a = -3$; 3) a – будь-яке число; 4) $0 \leqslant a < 3$ або $a > 3$. **14.24.** 1) 5; −4; 2) 16; 3) 49. **14.25.** 1) 11; −14; 2) 49. **14.26.** −1. **14.27.** 1) $x = 3$; $y = 0$; 2) $x = -2$; $y = -1$. **14.31.** 2,457 тонни. **14.32.** Ні.

§ 15. **15.16.** 1), 3), 5) Так; 2), 4), 6) ні. **15.17.** 1), 3) Ні; 2), 4) так. **15.18.** $\frac{1}{2}$; 0,(1); 0,11; $\frac{1}{10}$; 0,01. **15.19.** 0,02; $\frac{1}{5}$; 0,22; 0,(2); $\frac{1}{4}$. **15.23.** 6,25 см; $9\frac{1}{9}$ дм. **15.24.** *Порада.* Нехай $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ – нескоротний дріб. Тоді $2n^2 = m^2$. **15.28.** 150 мг. **15.29.** 1) Другий; 2) перший.

§ 16. **16.15.** 1) 25; 2) −30; 3) 56; 4) 16,2; 5) 30; 6) 0. **16.16.** 1) 49; 2) −84; 3) 44; 4) −2,1; 5) 40; 6) $\frac{51}{65}$. **16.17.** 1) 8; −4; 2) −1; −5; 3) 1; 4) $-3 \pm \sqrt{7}$; 5) $\frac{7}{9}$; $\frac{1}{3}$; 6) коренів немає. **16.18.** 1) 3; −5; 2) 7; −3; 3) −2; 4) $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$; 5) $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}$; 6) коренів немає. **16.20.** 1) 5; −5; 2) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **16.21.** 1) 8; −8; 2) $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$. **16.22.** 1) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 2) 2; −2; $\sqrt{6}$; $-\sqrt{6}$. **16.23.** 1) $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; 2) 3; −3. **16.24.** 1) $b = 0$; 2) $b \geqslant 4$; 3) $b \geqslant 0$. **16.25.** 1) $m > 0$; 2) немає таких значень m; 3) $m \leqslant 0$. **16.26.** $\frac{x-3}{2x}$. **16.27.** 1) 8; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) $\frac{1}{5}$. **16.31.** 12 %. **16.32.** Так.

§ 17. **17.21.** 1) $15\frac{13}{32}$; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) 12; 4) 0,13. **17.22.** 1) $10\frac{34}{45}$; 2) $1\frac{1}{6}$; 3) 35; 4) 0,07. **17.23.** 1) 210; 2) 48; 3) 12,6; 4) 18; 5) 39; 6) 154. **17.24.** 1) 160; 2) 75; 3) 10,8; 4) 12; 5) 34; 6) 126. **17.25.** 1) 432; 2) 144; 3) 125; 4) 243. **17.26.** 1) 1; 2) 216. **17.27.** 1) 112; 2) 432. **17.28.** 1) $0{,}6x$; 2) $-11y$;

3) p; 4) $5x^2$; 5) $5a^3$; 6) $-\frac{5}{7}c^5$. **17.29.** 1) $0{,}7p$; 2) $-\frac{5}{8}m$; 3) $7b^4$; 4) $-0{,}1a^7$. **17.30.** 1) $-5mn^6$; 2) $-\frac{7}{13}m^7n^9$; 3) x^3y^4; 4) $-\frac{p^3m^6}{x^4}$; 5) $-2m^4p^{10}$; 6) $-x^4z$. **17.31.** 1) $8ab^4$; 2) $-\frac{1}{2}b^4c^6$; 3) $-\frac{x^4y^6}{z}$; 4) $3b^7$. **17.32.** 1) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-y}$; 2) $\frac{\sqrt{-2x}}{\sqrt{-3y}}$. **17.33.** 1) $x-y$; 2) $n-m$; 3) $x-5$; 4) $6-a$; 5) 5; 6) -2. **17.34.** 1) $m-2$; 2) $-p-4$; 3) 1; 4) -3. **17.35.** 1) 4; 2) 1; 3) $9-2\sqrt{21}$; 4) $2+\sqrt{3}$. *Порада.* $7+4\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}+3=(2+\sqrt{3})^2$. **17.36.** 1) -8; 2) $\sqrt{2}-1$. **17.44.** 1) 672 л; 2) *Порада.* Врахуйте, що 1 м^3 = 1000 л. **17.45.** 96 грн.

§ 18. **18.23.** 1) $m\sqrt{13}$; 2) $b\sqrt{b}$; 3) $-a^3\sqrt{7}$; 4) $4x^3\sqrt{x}$. **18.24.** 1) $x\sqrt{11}$; 2) $c^2\sqrt{c}$; 3) $-p^5\sqrt{2}$; 4) $6m^5\sqrt{m}$. **18.25.** 1) $\sqrt{2a^2}$; 2) $-\sqrt{5b^6}$; 3) $\sqrt{3b}$; 4) $-\sqrt{-x^7}$. **18.26.** 1) $\sqrt{3b^2}$; 2) $-\sqrt{7c^{10}}$; 3) $\sqrt{5x^3}$; 4) $-\sqrt{-y^3}$. **18.27.** 1) 47; 2) $165+37\sqrt{6}$; 3) $36-12\sqrt{6}$. **18.28.** 1) $\sqrt{a}(1-\sqrt{3})$; 2) $\sqrt{p}(\sqrt{7}+2)$; 3) $\sqrt{7}(\sqrt{3}+1)$; 4) $\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})$; 5) $\sqrt{2m}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$; 6) $\sqrt{5x}(\sqrt{x}-\sqrt{2})$. **18.29.** 1) $\sqrt{p}(1+\sqrt{2})$; 2) $\sqrt{6}(\sqrt{7}-1)$; 3) $\sqrt{3a}(\sqrt{3}+\sqrt{2a})$. **18.30.** 1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-6}$; 2) $\frac{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}{\sqrt{a}-3\sqrt{b}}$; 3) $\sqrt{2,5}$. **18.31.** 1) $\frac{\sqrt{a}+5}{\sqrt{a}}$; 2) $\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$; 3) $\sqrt{5,5}$. **18.32.** 1) $3(\sqrt{6}+1)$; 2) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$. **18.33.** 1) $5(\sqrt{3}-1)$; 2) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{30}$. **18.34.** 1) 2; 2) 330; 3) 8; 4) 14. **18.35.** 1) 16; 2) 60; 3) 26; 4) 7. **18.36.** 3. **18.37.** 1) $m-1$; 2) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 3) $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 4) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}$. **18.39.** $-\frac{1}{2}$. **18.40.** *Порада.* Використати те, що квадрат натурального числа не може закінчуватися цифрою 7. **18.43.** 101 250 грн.

§ 19. **19.9.** 1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}<\frac{1}{2}\sqrt{84}$; 2) $0,2\sqrt{1\frac{3}{8}}=0,4\sqrt{\frac{11}{32}}$. **19.10.** 1) $\frac{3}{4}\sqrt{48}=\frac{3}{5}\sqrt{75}$; 2) $0,3\sqrt{1\frac{4}{9}}>0,2\sqrt{1\frac{3}{4}}$. **19.11.** 1) $0\leqslant y\leqslant 2$; 2) $1\leqslant y\leqslant 3$. **19.12.** 4. **19.13.** 1. **19.19.** 56 грн. **19.20.** 244,85. *Порада.* Позначити $a=\frac{1}{1997}$; $b=\frac{3}{2000}$.

Вправи для повторення розділу 2

4. 1) Збільшиться в 9 разів; зменшиться у 81 раз. 2) Збільшити у 2 рази; зменшити в 5 разів. **5.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **6.** (−2; 4), (3; 9). **11.** 1) 100; 2) 1. **12.** 1) 20; 2) 13,96. **13.** 1) $x \geqslant 2$; 2) $x \geqslant 3$; 3) $x < -1$, $-1 < x \leqslant 0$; 4) $x = 0$. **14.** 1) Якщо $a = 0$, то $x \geqslant 0$; якщо $a \neq 0$, то $x = 0$; 2) якщо $a \leqslant 0$, то коренів немає; якщо $a > 0$, то $x = \frac{1}{a^2}$; 3) якщо $a \leqslant 0$, то коренів немає; якщо $a > 0$, то $x = \frac{25}{a^2} + 1$; 4) якщо $a = 0$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 0$. **18.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **21.** *Порада.* 1) Знайти $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$. **26.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $3\sqrt{2}$; 4) 5. **28.** 9 або −9. **29.** 1) $m > 1$; 2) $m = 1$; 3) $m < 1$. **36.** 15 см або $6\frac{2}{3}$ см. **37.** 1) 600; 2) 0,09; 3) 360; 4) 648. **38.** 1) $p^2c^4a^6$; 2) $-7xy^3$; 3) $\frac{m^{10}}{n^{12}}$; 4) $\frac{a^5}{b^7}$. **39.** 1) 0,4; 2) 0,3; 3) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{13} - \sqrt{11}$. **40.** 1) $\frac{x-7}{x+2}$; 2) $\frac{p-2}{p+3}$. **44.** 1) $2x^4\sqrt{7x}$; 2) $\frac{m\sqrt{7m}}{6}$; 3) $-5ab^2\sqrt{b}$; 4) $2xy^5\sqrt{2x}$; 5) $-2p^3\sqrt{-2p}$; 6) $xy\sqrt{xy}$. **46.** 1) 24; 2) $\frac{\sqrt{6}}{12}$. **48.** 1) $-\frac{1}{2+\sqrt{2x}+x}$; 2) $\sqrt{x+y}+1$. **49.** $\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$. **50.** *Порада.* Позначити $\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}} = x$ та знайти x^2. **51.** 1) $\sqrt{3}$; 2) −1; 3) $\sqrt{7p^2}$; 4) $-\sqrt{\frac{3-b}{2}}$. **54.** 1) Так, (1; 1); 2) так, (64; 8); 3) так, (0; 0); 4) ні. **55.** 1) 3; $\sqrt{14}$; 4; $\sqrt{16,2}$; $\sqrt{19,1}$; 2) 0,2; $\frac{1}{4}$; $\sqrt{\frac{1}{11}}$; $\sqrt{0,1}$. **56.** 1) $x \geqslant 1$; 2) $0 \leqslant x < 4$; 3) $1 < x \leqslant 16$; 4) $81 \leqslant x < 10\,000$; 5) $x \geqslant 0$; 6) таких значень x немає.

Розділ 3

§ 20. **20.15.** $\frac{1}{9}$. **20.16.** −2. **20.17.** $a = 2$; $b = -6$. **20.18.** $b = -4$; $c = 3$. **20.19.** 1) 0; −1; 2) 0; −24; 3) −1; 1; 4) 0. **20.20.** 1) 0; 2; 2) 0; 24; 3) −1; 1; 4) 0. **20.21.** 0; −4,5; **20.22.** 0; −11. **20.23.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ або $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$. **20.24.** $\sqrt{2}$ і $\sqrt{2} + 2$ або $-\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2} + 2$. **20.25.** 1) 0; 5; −5; 2) 2. **20.26.** 1) 0; 3; −3; 2) 3. **20.32.** 1) 24 000 Вт. **20.33.** $2n - 3$.

§ 21. 21.10. 1) -1; 3; 2) 1; $-2{,}5$; 3) 5. **21.11.** 1) 1; -5; 2) -1; 4,5; 3) 2; $-0{,}4$. **21.12.** 1) 2; 6; 2) -1; $-\frac{1}{3}$; 3) 2; 4; 4) 3; -8. **21.13.** 1) -1; 2) 2; 2,6; 3) 4; 3; 4) 1; -6. **21.14.** 1) 1; $-0{,}6$; 2) -1; $\frac{1}{3}$; 3) 23 км. **21.15.** 1) -1; $6\frac{2}{3}$; 2) 1; $-3{,}5$. **21.16.** 1) $1 \pm \sqrt{15}$; 2) $-1 \pm \sqrt{5}$; 3) $15 \pm 5\sqrt{11}$; 4) $\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$. **21.17.** 1) $-1 \pm \sqrt{7}$; 2) $1 \pm 2\sqrt{3}$; 3) $-5 \pm 2\sqrt{10}$; 4) $\frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}$. **21.18.** 1) 4; 1; 2) 4; -4; 3) 1; 4) 2. **21.19.** 1) 9; 3; 2) 3; -3; 3) 5; 4) 2. **21.20.** 1) $-\frac{1}{8}$; 2) -4; 4. **21.21.** 1) $\frac{1}{16}$; 2) -6; 6. **21.23.** (0; -15), (75; 0). **21.24.** 1) -35; 2) 39. **21.27.** 18,75 %. **21.28.** 4; 10.

§ 22. 22.12. 1) $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; 2) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$; 3) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$; 4) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. **22.13.** 1) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$; 2) $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; 3) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; 4) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$. **22.14.** $x_2 = -2{,}5$; $q = 8{,}75$. **22.15.** $x_2 = -6$; $p = 4{,}5$. **22.16.** $x_1 = 5$; $x_2 = -2$; $p = -3$ або $x_1 = -5$; $x_2 = 2$; $p = 3$. **22.17.** $x_1 = 5$; $x_2 = -1$; $q = -5$. **22.18.** 1) $3x^2 - 14x - 5 = 0$; 2) $24x^2 + 26x + 5 = 0$; 3) $x^2 - 5 = 0$; 4) $x^2 - 4x + 1 = 0$. **22.19.** 1) $3x^2 + 5x - 2 = 0$; 2) $16x^2 - 10x + 1 = 0$; 3) $x^2 - 7 = 0$; 4) $x^2 - 6x + 2 = 0$. **22.20.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) 12; 3) 22; 4) $-7\frac{1}{3}$; 5) $2\frac{4}{9}$; 6) 28. **22.21.** 1) $-2{,}5$; 2) -10; 3) 29; 4) $-14{,}5$; 5) 7,25; 6) 33. **22.22.** $x^2 - 7x + 1 = 0$. **22.23.** $x^2 + 8x + 8 = 0$. **22.24.** 80 кг; 120 кг. **22.25.** $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. **22.28.** -7 °C. **22.29.** На 12 років.

§ 23. 23.1. 12 і 17. **23.2.** 12 і 15. **23.3.** 42 см. **23.4.** 80 м. **23.5.** 7 см і 10 см. **23.6.** 30 см. **23.7.** 48 см^2. **23.8.** 14 і 15. **23.9.** 70×70 см. **23.10.** 15 дм. **23.11.** 19, 20, 21 або -13, -12, -11. **23.12.** 18, 19, 20 або -18, -17, -16. **23.13.** 5 і 7. **23.14.** 16 км/год і 12 км/год. **23.15.** 10 см і 12 см. **23.16.** 1 см. **23.17.** 1,5 м. **23.18.** 10 учасників. **23.19.** 5. **23.20.** 1,8 с; 1,2 с. *Порада.* Спочатку, виходячи з початкових умов, знайти v_0. **23.21.** 0,7 с. **23.22.** 2,6 с; 3,4 с. **23.23.** 3 л. *Порада.* Нехай першого разу використали x л кислоти. Ураховуючи те, що остаточно води в посудині стало 4,5 л, маємо рівняння $x - \frac{x}{6} \cdot x + x = 4{,}5$. **23.26.** $a = 0$ або $a = -2{,}25$. **23.28.** 62,25 %.

§ 24. 24.19. 1) $3 \pm \sqrt{30}$; 2) $\frac{-35 \pm 5\sqrt{17}}{2}$. **24.20.** 1) $-4 \pm 2\sqrt{19}$; 2) $\frac{15 \pm 9\sqrt{5}}{2}$. **24.21.** 1) $(x - 1 - 2\sqrt{3})(x - 1 + 2\sqrt{3})$; 2) розкласти на множники не можна;

3) $-2\left(x+\frac{3+\sqrt{65}}{4}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{65}}{4}\right)$; 4) розкласти на множники не можна. **24.22.** 1) $(x+2-\sqrt{11})(x+2+\sqrt{11})$; 2) розкласти на множники не можна. **24.23.** 1) $\frac{4}{x-2}$; 2) $\frac{x-4}{x}$; 3) $\frac{2x-1}{x-3}$; 4) $\frac{x-2}{x+7}$; 5) $\frac{2x-1}{3x-1}$; 6) $\frac{5x-2}{8-2x}$. **24.24.** 1) $\frac{x+1}{x}$; 2) $\frac{x+4}{3x+2}$; 3) $\frac{x+3}{x-5}$; 4) $\frac{2(x+1)}{3(x-3)}$. **24.25.** 1) 1,93; 2) $4\frac{2}{3}$. **24.26.** 1) $\frac{4}{(x-2)(x+4)}$; 2) $\frac{1}{x+2}$; 3) 1; 4) $\frac{(x-2)(5-x)}{2(x+3)}$. **24.27.** 1) $\frac{1}{x-5}$; 2) $\frac{1}{x-2}$. **24.30.** 1) $x(x+1)(x+2)$; 2) $-2x(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ або $x(x+3)(1-2x)$; 3) $\frac{1}{4}x^2(x-1)(x+5)$; 4) $-\frac{1}{2}x^3(x+2)(x-6)$. **24.31.** 1) $x(x-4)(x-8)$; 2) $\frac{1}{3}x^2(x-9)(x-3)$. **24.32.** 1) Графіком є пряма $y=x+2$ з «виколотою» точкою (1; 3); 2) графіком є пряма $y=x-3$ з «виколотими» точками (0; −3) і (−1; −4). **24.33.** 1) $\frac{x^2}{3x-1}$; 2) $\frac{1}{4}$. **24.34.** 1) $\frac{x^2}{2x+1}$; 2) 27. **24.35.** 1) $-0{,}4a^3x^7$; 2) $2mp^3\sqrt{2m}$. **24.36.** 1) 24; 2) 68; 3) 0,68; 4) 376. **24.41.** 1164 грн. **24.42.** 3 : 2.

§ 25. 25.9. 1) 9; −1; 2) 2; −9; 3) 5; −2; 4) −2; $1\frac{1}{3}$. **25.10.** 1) 4; −1; 2) 1; $-\frac{1}{2}$; 3) 1; 3; 4) 2; $-1\frac{1}{2}$. **25.11.** 1) 0; 2; −2; 2) 0; 3) 0; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 4) 0; 2; −3. **25.12.** 1) 0; 3; −3; 2) 0; 3) 0; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$; 4) 0; 3; −4. **25.13.** 1) 4; −5; 2) 1; 4. **25.14.** 1) 3; −4; 2) 2; 6. **25.15.** 1) 1; −1; 3; 2) −6; 3) −7; 4) коренів немає. **25.16.** 1) 1; 2) −3; 3) 7; 4) коренів немає. **25.17.** 1) −6; 3; 2) −2; $-1\frac{2}{3}$; 3) −3; 4) −2. **25.18.** 1) −4; 3; 2) −2. **25.19.** 1) −1; −5,5; 2) −7; 3) −9; 4) коренів немає. **25.20.** 1) 5; −3,6; 2) −1; 3) −15; 4) коренів немає. **25.21.** 1) −3; 4; 2) 15. **25.22.** 1) 2; 3; −3; 2) −1; $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **25.23.** 1) 1; 2; −2; 2) −2; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. **25.24.** 1) 1; −1; 2) −1; 2. **25.25.** 1) 1; −1; 2) 2; −3. **25.26.** 1) 0; 1,5; 2) $-2\pm\sqrt{35}$. **25.27.** $\frac{-1\pm\sqrt{57}}{2}$. **25.28.** 1) 1; −1; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; 2) 1; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. *Порада.* $x^3+2x^2-2x-1=(x^3-1)+(2x^2-2x)=(x-1)(x^2+x+1)+2x(x-1)=$ $=(x-1)(x^2+x+1+2x)=(x-1)(x^2+3x+1)$. **25.29.** 1) 1; $\pm\sqrt{3}$; 2) −2; 1; 4. **25.30.** 1) 9. *Порада.* $\sqrt{x}=t$; 2) 0; −2; $-1\pm\sqrt{7}$; 3) $2\pm\sqrt{3}$;

4) 0; −1; 2; −3. **25.31.** 1) 4; 2) 0; 2; $1 \pm \sqrt{5}$; 3) $-1 \pm \sqrt{6}$; 4) 0; 1; −2; 3. **25.32.** $3(x+7)\left(x-\frac{2}{3}\right) = (x+7)(3x-2)$. **25.33.** 12 і 15. **25.34.** 2. **25.35.** 12 км/год; 16 км/год. **25.36.** Через 8 місяців. **25.37.** 2,5.

§ 26. 26.1. 4 і 6. **26.2.** 8 і 12. **26.3.** $\frac{9}{10}$. **26.4.** $\frac{1}{6}$. **26.5.** 12 км/год; 16 км/год. **26.6.** 70 км/год; 60 км/год. **26.7.** 45 км/год. **26.8.** 80 км/год. **26.9.** 60 км/год. **26.10.** 2 км/год. **26.11.** 14 км/год. **26.12.** 24 км/год. **26.13.** 2 км/год. **26.14.** 20 км/год. **26.15.** 50 м^2, 40 м^2. **26.16.** 12 автомашин. **26.17.** 24 год; 48 год. **26.18.** 36 год; 45 год. **26.19.** 45 хв; 36 хв. **26.20.** 30 днів; 42 дні. **26.21.** 16 км або 20 км. *Порада*. Нехай x км/год – початкова швидкість, тоді $4x$ км – відстань між селами. Маємо рівняння $\frac{10}{x} + \frac{4x-10}{x-1} = \frac{9}{2}$. **26.22.** 27 км/год. **26.24.** 1) $\frac{x+5}{x}$; 2) $\frac{x+3}{2x+2}$. **26.25.** 1) 16; 2) $-7 \pm \sqrt{6}$. **26.26.** Придбати 9 пачок плитки 20 см × 20 см, витративши 2700 грн.

Вправи для повторення розділу 3

3. Так. **4.** 1) $\pm\sqrt{2}$; 2) 0; $\frac{3}{4}$. **5.** 30 см. **6.** 1) 0; −9; 2) 2; −2. **7.** 1) $1\frac{1}{4}$; 2) $a > 0$. **11.** 1) 1; −3; 2) 2; −1,5. **12.** 1) 1; 2; 2) $5 \pm 2\sqrt{15}$; 3) $2\sqrt{2}$; $-3\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **15.** 1) $x_1 = 3$; $x_2 = -2a$ для будь-якого a; 2) якщо $a = 0$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то $x_1 = \frac{1}{a}$; $x_2 = \frac{2}{a}$. **16.** 1) 1; −6; 0; −5; 2) −1; 6; 0; 5; $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$; 3) −3; 4) $\frac{1}{9}$. **19.** $x_1 = 2$; $x_2 = -4$; $q = -8$. **21.** $x_1 = 6$; $x_2 = 9$; $p = 4$ або $p = -4$. **22.** 1,6. **23.** $b = 15$ або $b = -15$. **24.** 1; $\frac{1}{2}$. **25.** $5x^2 - 8x + 1 = 0$. **26.** 6 см і 9 см. **27.** 9; 10; 11 або −11; −10; −9. **28.** 10; 11; 12; 13; 14 або −2; −1; 0; 1; 2. **29.** 24 см^2. **30.** 16 команд. **31.** 0,216 м^3 або $\frac{121}{375}$ м^3. **32.** 40 см; 80 см. **37.** 1) $\frac{2x+9}{x+2}$; 2) $\frac{2(x+5)}{x^2+2x+4}$; 3) $\frac{x-3}{x+2,5}$; 4) $\frac{4x+1}{1-3x}$. **38.** 1) $\frac{2}{x+3}$; 2) $\frac{x+2}{x+1}$; 3) $x(x-5)$; 4) $\frac{1}{2(x+6)}$. **39.** $p = 5$; $x_2 = -2$. **41.** 1) 4; −4; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 81. **42.** 1) $(x + a)(x - 6a)$; 2) $(x - 2b)(x + 5b)$. **43.** 3; $x = 4$. **44.** $a = -2$; −13. **46.** 1) −2; 2) 0; $1\frac{2}{3}$;

3) 1; 4) 3; $-3{,}5$. **48.** (2; 0), (-2; 0). **49.** 1) -1; $-1{,}5$; 2) 0; $1\frac{2}{3}$; 3) -5; 6; 4) рівняння не має розв'язків; 5) -4; 6) 1; -1. **50.** 1) -3; 2) 3; -3; 3) 0. **51.** 1) 1; -1; 2) -1; 1; -3. **52.** (-2; -8); $\left(\frac{3}{4}; 3\right)$. **53.** 1) $\pm\frac{7}{8}$; 2) -1. *Порада.* $27x^3 + 18x^2 - 12x - 8 = (3x - 2)(3x + 2)^2$. **54.** 1) 1; 3; $2 \pm \sqrt{3}$. *Порада.* $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ і далі $x^2 - 4x = t$; 2) -1; 4. *Порада.* $x(x - 1) \times (x - 2)(x - 3) = (x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2)$, заміна: $x^2 - 3x = t$; 3) 1; 2; -1; 4; 4) $\frac{5 \pm \sqrt{85}}{2}$; $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$; 5) -2; 3; $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$; 6) 1; 10; $\frac{11 \pm \sqrt{113}}{2}$. **55.** 1) 5; -3; $\frac{1 \pm \sqrt{217}}{4}$; 2) -1; $-4 \pm \sqrt{21}$. **56.** 12 км/год. **57.** 10 год. **58.** 16 км/год. **59.** О 18 год. **60.** 2 км/год. **61.** 20 с.; 16 с. **62.** Богдан – 60 деталей; Михайло – 40 деталей. **63.** 2 год; 6 год. **64.** 6 год; 9 год. **65.** 2 кг або 4 кг. **66.** 225 км. **67.** 40 віконних блоків. *Порада.* Нехай x віконних блоків – щоденна норма. Тоді $5x + \left(\frac{800}{x} - 6\right)(x + 5) = 830$.

Задачі підвищеної складності

1. *Порада.* $\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{2ab}{a + b} > 0$. **2.** $\frac{m^2 + n^2 + mn}{m + n}$. **3.** 1) $\frac{(x - y - z)x}{2}$; 2) $\frac{n + 1}{n - 2m}$; 3) 4; 4) $\frac{a - b}{a + b}$; 5) $1 + 2p$; 6) $-\frac{xy}{(x + y)^2}$. **6.** *Порада.* Після спрощення одержимо $\frac{16}{1 - a^{16}}$. **8.** Піднесемо рівність $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$ до квадрата. Маємо $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} + 2 \cdot \frac{xyp + xzn + yzm}{mnp} = 1$. З рівності $\frac{m}{x} + \frac{n}{y} + \frac{p}{z} = 0$ знайдемо, що $xyp + xzn + yzm = 0$. Отже, $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} = 1$. **9.** *Порада.* З умови випливає, що $a - b = \frac{b - c}{bc}$; $b - c = \frac{c - a}{ac}$; $c - a = \frac{a - b}{ab}$. Перемножити утворені рівності. **10.** 1) Якщо $a = 2$, рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 2$, то $x = 2$; 2) якщо $a = 1$ або $a = -1$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 1$ і $a \neq -1$, то $x = a$; 3) якщо $a = 2$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 2$, то $x = a + 2$; 4) якщо $a = 1$, то x – будь-яке число; якщо $a = -1$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 1$ і $a \neq -1$, то $x = \frac{a - 1}{a + 1}$. **11.** 1) Якщо $a \neq 0$, то $x = a$; 2) якщо $b \neq 0$ і $a = -b$, то рівняння не має розв'язків; якщо $b \neq 0$ і $a \neq -b$, то $x = \frac{a-b}{a+b}$; 3) якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{2a}{3}$; 4) якщо $a = 0$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то $x = 6a$. **12.** 1) 2 або 3; 2) −9 або −8; 3) 7 або 8; 4) 5 або 6. **13.** 1) Якщо $a < -3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \geqslant -3$, то $x = (a+3)^2$; 2) якщо $a = 0$, то $x \geqslant 0$; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; 3) якщо $a = -3$, то $x \geqslant -2$; якщо $a < -3$ або $-3 < a < 3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \geqslant 3$, то $x = a^2 - 6a + 7$. **14.** 1) −2; 2) 1. **15.** 1) $\sqrt{3} - 1$; 2) 1; 3) −10. **16.** 1) 2; 2) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. **17.** 1) 1; 2) 8. **18.** 1) $y = \begin{cases} 3x, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ 5x, & \text{якщо } x < 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \geqslant 1, \\ 1 - 2x, & \text{якщо } x < 1. \end{cases}$ **19.** 1) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; 2) $1 + \sqrt{3} - \sqrt{7}$; 3) $\sqrt{2} - 1$; 4) $\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)}{2}$. **20.** Так. **21.** 1) $\frac{1}{xy}$; 2) $\frac{1+a}{a}$. **22.** 1) $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}$; 2) 1. **23.** 1) $-\sqrt{a}$, якщо $0 < a < 2$; $\sqrt{a}$, якщо $a > 2$; 2) −2, якщо $x < 0$; 2, якщо $x > 0$. **25.** $\frac{1}{2}$. **26.** 6. **27.** 1) 19; 2) 80; 3) 343. **28.** 1) −4; −3; 2) 19. **29.** 1) Якщо $a = 1$, то $x = -\frac{1}{2}$; якщо $a \neq 1$, то $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{1-a}$; 2) якщо $a = -1$, то $x = -1$; якщо $a \neq -1$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2a}{1+a}$. **30.** 1) −1; 2) 2; 3) рівняння не має розв'язків. **31.** Нехай $b^2 - 4ac = 3$, тоді $b^2 = 3 + 4ac$. Права частина рівності − непарне число, отже, $b = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Тоді одержимо $2(k^2 + k - ac) = 1$, що неможливо. **32.** −1. **33.** 1. **34.** 12. **35.** 1) $x^2 - 7x - 2 = 0$; 2) $2x^2 + 65x + 179 = 0$; 3) $16x^2 + 106x + 1 = 0$. **36.** *Порада.* $D = (b + c - a)(b + c + a)(b - c + a)(b - c - a)$. **37.** *Порада.* $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$. Далі використати теорему Вієта. **38.** 1) 1; 2; −3; 2) 1; $\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$; 3) −1; $3 \pm \sqrt{3}$; 4) $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. *Порада.* $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x^4 - 2x^3 + x^2) - (4x^2 + 4x + 1) = (x^2 - x)^2 - (2x + 1)^2$. **39.** 1) Якщо $a = 1$, то x − будь-яке число; якщо $a = -2$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 1$ і $a \neq -2$, то $x = \frac{1}{a+2}$; 2) якщо $a = 1$, то $x = 4$; якщо $a = 4$, то $x = 1$; якщо $a \neq 1$ і $a \neq 4$, то $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; 3) якщо $a = 1$ або $a = 3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 1$ і $a \neq 3$, то $x = a$; 4) якщо $a = 1$, то $x = 4$; якщо $a \neq 1$, то $x_1 = 3a$, $x_2 = 4$; 5) якщо $a = 0$, то x − будь-яке число, крім −7; якщо $a = -7$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$ і $a \neq -7$, то $x = a$; 6) якщо $a = 1$ або $a = -1$, то $x = 0$; якщо $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, то $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1 - a^2}{a}$. **40.** 6; −6;

10. **41.** 9; –9. *Порада.* $x^4 - x^2 + 20x - 100 = x^4 - (x - 10)^2$. **42.** $a = 42$; $b = 39$. **43.** 1) 2; 2) 1. **44.** 1) Якщо $a = 1$, то $x = -1$; якщо $a = -2$, то $x = \frac{1}{3}$; якщо $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -2$, то $x_1 = \frac{a+1}{a-1}$, $x_2 = -1$; 2) якщо $a = -\frac{9}{4}$ або $a = -\frac{1}{4}$, то $x = -1$; якщо $a = -3$, то $x = -\frac{9}{8}$; якщо $a = 1$, то $x = \frac{7}{8}$; якщо $a \neq -3$, $a \neq -\frac{9}{4}$; $a \neq -\frac{1}{4}$, $a \neq 1$, то $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4a+3}{8}$. **45.** 1) 0; 2) 2; –2; $\pm\frac{3\sqrt{21}}{7}$. **46.** 1) 14. *Порада.* Нехай $\sqrt{x-5} = t$. Тоді $x = t^2 + 5$; 2) 4; –4. **47.** 1) $\frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$; $\frac{-5 \pm \sqrt{85}}{6}$; 2) $\frac{5 + \sqrt{13}}{6}$; $\frac{-5 - \sqrt{133}}{6}$. **48.** *Порада.* Графіком рівняння є дві прямі $y = \frac{x}{3}$ і $y = \frac{x}{2}$. **49.** 1) 5; 0,6; 2) $-\frac{2}{9}$; $\frac{10}{19}$; $\frac{14}{17}$; $3\frac{1}{3}$; 3) 2; $\frac{1}{2}$. *Порада.* $x + \frac{1}{x} = t$, тоді $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; 4) $1 \pm \sqrt{7}$; $-3 \pm \sqrt{15}$. *Порада.* $\frac{x}{3} - \frac{2}{x} = t$, тоді $\frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{9} = t^2 + \frac{4}{3}$. **50.** 85 кг. **51.** 7. **52.** 52 км/год або $38\frac{2}{11}$ км/год. **53.** 60 км/год. *Порада.* Слід розглянути дві можливості залежно від того, котрого велосипедиста мотоцикліст обігнав першим. **54.** 1,8 год і 2,25 год. **55.** 0,2 год або 0,33 год. **56.** Іра – за 10 днів, Олег – за 15 днів. **57.** 60 хв; 84 хв.

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	В	Б	Г	В	А	Б	Б	А	В	Г	В	А	1–Б; 2–А; 3–В
2	Б	Г	А	В	Б	А	В	Г	В	А	Г	В	1–В; 2–А; 3–Г
3	А	Г	Б	В	Б	А	В	Б	В	Г	В	Б	1–В; 2–А; 3–Б
4	В	Б	Г	А	Б	В	Г	Б	А	В	В	Г	1–Г; 2–А; 3–Б
5	Б	В	Г	Б	А	В	Б	А	Б	Г	А	Б	1–Б; 2–А; 3–Г
6	Б	Г	Б	А	В	Г	Б	В	Б	А	Б	Б	1–Б; 2–Г; 3–А

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Розділ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім'я учня / учениці	Клас	Навчальний рік	Оцінка	
				на початку року	в кінці року
1					
2					
3					
4					
5					

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ $\sqrt{x} = m$ ТА $x^2 = a$

<table>
<tr><td colspan="2">$\sqrt{x} = m$, m – число</td></tr>
<tr><td>$m \geqslant 0$</td><td>$m < 0$</td></tr>
<tr><td>$x = m^2$</td><td>коренів немає</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">$x^2 = a$, a – число</td></tr>
<tr><td>$a > 0$</td><td>$a = 0$</td><td>$a < 0$</td></tr>
<tr><td>$x_1 = \sqrt{a}$,
$x_2 = -\sqrt{a}$</td><td>$x = 0$</td><td>коренів немає</td></tr>
</table>

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕПОВНОГО КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

<table>
<tr><td colspan="4">$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$b = 0$, $c = 0$</td><td colspan="2">$b = 0$, $c \neq 0$</td><td>$b \neq 0$, $c = 0$</td></tr>
<tr><td>$ax^2 = 0$</td><td colspan="2">$ax^2 + c = 0$</td><td>$ax^2 + bx = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$x^2 = 0$,
$x = 0$</td><td colspan="2">$x^2 = -\frac{c}{a}$</td><td rowspan="3">$x(ax + b) = 0$
$x = 0$ або $ax + b = 0$,
$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$</td></tr>
<tr><td>$-\frac{c}{a} > 0$</td><td>$-\frac{c}{a} < 0$</td></tr>
<tr><td>$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$,
$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$</td><td>коренів немає</td></tr>
</table>

ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

<table>
<tr><td colspan="3">$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$D = b^2 - 4ac$</td></tr>
<tr><td>$D > 0$</td><td>$D = 0$</td><td>$D < 0$</td></tr>
<tr><td>$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$,
$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$</td><td>$x = -\frac{b}{2a}$</td><td>коренів немає</td></tr>
</table>

ТЕОРЕМА ВІЄТА

Якщо x_1 і x_2 – корені зведеного квадратного рівняння

$$x^2 + px + q = 0,$$

то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

РОЗКЛАДАННЯ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА НА МНОЖНИКИ

Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного тричлена

$$ax^2 + bx + c,$$

то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$